Sborník prací Přírodovědecké fakulty University Palackého v Olomouci. Matematika

Zdeněk Dostál

Rennie's generalization of Kantorovich's inequality in a Hilbert space

Sborník prací Přírodovědecké fakulty University Palackého v Olomouci. Matematika, Vol. 19 (1980), No. 1, 101--102

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/120094`

1980 — ACTA UNIVERSITATIS PALACKIANAE OLOMUCENSIS
FACULTAS RERUM NATURALIUM — TOM 65

RENNIE'S GENERALIZATION OF KANTOROVICH'S INEQUALITY IN A HILBERT SPACE

ZDENĚK DOSTÁL

(*Received March 31, 1979*)

Let A be a positive definite operator in a Hilbert space H. Assume that the spectrum $\sigma(A)$ of A is contained in the closed interval $m \leqq t \leqq M$, $0 < m$.

It is known that there exists a mapping $f \to f(A)$ which sends each function f from the Banach algebra $C(\sigma(A))$ of complex continuous functions defined on $\sigma(A)$ to the bounded operator $f(A)$ on H such that

a) if $a(t) = t$ then $a(A) = A$
b) $(f_1 + f_2)(A) = f_1(A) + f_2(A)$
c) $(f_1 . f_2)(A) = f_1(A) f_2(A)$
d) $f \geqq 0$ implies $f(A) \geqq 0$.

For the proof see e.g. [4], pp. 165–172.

It simply follows that

$$(M - A)(A - m) A^{-1} \geqq 0.$$

Hence, for any vector x of the unit norm

$$(Ax, x) + mM(A^{-1}x, x) \leqq m + M.$$

Denoting the second term on the left hand side by u, we obtain

$$mM(Ax, x)(A^{-1}x, x) \leqq (m + M) u - u^2 \leqq (m + M)^2/4, \tag{1}$$

which is the Greub–Rheinboldt [1] formulation of the inequality of Kantorovich.

References

[1] Greub, W. and Rheinboldt, W.: *On a generalisation of an inequality of L. W. Kantorovich.* PAMS 10, 407—415, 1959.

[2] Rennie, B. C.: *An Inequality which includes that of Kantorovich.* Amer. Math. Monthly 70, 982, 1963.

[3] Mond, B.: *A matrix version of Kantorovich's inequality.* PAMS 16, 1131, 1965.

[4] Pták, V.: *Moderní analysa I,* SPN Praha 1974, pp. 165—172.

Souhrn

RENNIEHO ZEVŠEOBECNĚNÍ KANTOROVIČOVY NEROVNOSTI V HILBERTOVĚ PROSTORU

ZDENĚK DOSTÁL

V práci se dokazuje Greub—Rheinboldtova formulace Kantorovičovy nerovnosti pro positivně definitní operátor A v Hilbertově prostoru H. Originální příspěvek předložené práce spočívá v nalezení tohoto nového důkazu jinak známé skutečnosti.

Резюме

ОБОБЩЕНИЕ РЕННИ НЕРАВЕНСТВА КАНТОРОВИЧА В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

ЗДЕНЕК ДОСТАЛ

В работе доказывается предложение Греуб-Рейнболдта об неравенстве Канторовича для положительно определенный оператор A в Гильбертовом пространстве H. Суть настоящей работы в том, что в ней приводится новое доказательство этого известного предложения.