Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Karel Lerl

Úlohy o zrcadlení na přímce

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 68 (1939), No. Suppl., D158--D163

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/120749

prací, uveřejněných v různých časopisech, upozorňujeme aspoň na tato souborná díla:

M. v. Ardenne: Die Kathodenstrahlröhre und ihre Anwendung in der Schwachstromtechnik, Berlin, 1933. — J. F. Rider: The Cathode — ray tube at work, V. vyd., New York, 1937. — P. E. Klein: Die praktische Verwendung des Elektronenstrahloszillographen, Berlin, 1936.

Fysikální ústav Masarykovy university.

V Brně v únoru 1939.

Úlohy o zrcadlení na přímce.

Karel Lerl.

Mnohé partie ve sbírkách jsou chudě zastoupeny příklady. Takovou partií je na př. osová souměrnost; chci v dalším vyznačiti takovou dosti obsáhlou skupinu příkladů na osovou souměrnost. Jsou to úlohy o zrcadlení. Můžeme je roztříditi ve tři skupiny: zrcadlení α) na přímce, β) na dvou přímkách, γ) na třech a více přímkách. Přímku nazveme zrcadlící a znázorníme ji stejným způsobem jako rovinné zrcadlo ve fysice, paprsky pak opatříme šipkami. Paprsek dopadající a odražený jsou různoběžky, jejichž osami souměrnosti je jednak zrcadlící přímka, jednak kolmice dopadu. Pro paprsek odražený platí jednoduchý zákon, který odvodil již Euklid ze symetrie předmětu a obrazu u rovinných zrcadel; dráha paprsku je minimální, jak bylo známo již Heronu Alexandrijskému. Dopadne-li paprsek kolmo na zrcadlící přímku, probíhá pak ve směru opačném celou svou původní dráhu, jak již uvedl Kepler ve svém principu o obrácení cesty světelného paprsku.*) Tytéž zákony platí nejen v optice, nýbrž i při rázu dokonale pružných těles (na př. koule se stěnou), jak udal lanškrounský rodák Jan Marek Marci (1595—1667) ve svém spise „De proportione motus, ...“ (Pragae, 1639), jehož priorita musela býti často obhajována (viz články dr. Fr. J. Studničky a J. Smolíka).

α) Základní úloha, která jest uvedena v učebnicích i ve sbírkách zároveň s důkazem o minimální dráze, je: Stanoviti na přímce z bod C tak, aby spojnice jeho s danými body A a B na téže straně přímky ležícími, tvořily stejné úhly, t. j. jinými slovy:

*) Podle nových osnov jsou žáci již v III. tř. seznámeni se základy optiky, tedy úlohy ty jsou v kvartě možné. — Stylisace úloh jest ovšem mnohy stručnější.

z bodu A vésti paprsek, aby po odraze na přímce z dospěl do bodu B. Paprsku odraženému (při jiných úlohách) jakož i paprsku dopadajícímu lze pak předepsati různé podmínky (jako směr), na př. aby paprsek byl tečnou nebo sečnou (kružnice) dané délky atd. Lze tedy hlavně strojné úlohy o kružnicích uvésti na takový tvar, aby se jednalo o zrcadlení. Na př.: Ke kružnici k_1 vésti tečny tak, aby po zrcadlení byly tečnami kružnice k_2 (obě před přímkou z); nebo příklad 8 v Rozhledech matematicko-přírodovědeckých, r. 1931/32, R 29: Před zrcadlící přímkou z dány jsou kružnice k_1, k_2, k_3 a body A_1, A_2, A_3. Jest sestrojiti takovou kružnici k, aby chordála ch_i (k, k_i) po odrazu na přímce z procházela bodem A_i $(i = 1, 2, 3)$. Konečně nečiní zde žádných potíží ani probrati vliv pohybu přímky z (posunutí a otočení) na polohu obrazu.

β) Základní úlohou je tato: Jsou dány dvě zrcadlící přímky z_1, z_2 (svírající ostrý úhel); z bodu M vésti paprsek na z_1 tak, aby po odraze na z_1 a z_2 procházel bodem N. Na místo bodů M, N lze pak obdobně uvésti směr paprsků, kružnice, k nimž paprsky jsou tečnami nebo sečnami dané délky, atd. Zároveň možno udati úlohu, neřešitelnou kružítkem a pravítkem, na př.: Jsou dány přímky z_1, z_2 a bod M, z něhož jest vésti paprsek tak, aby úsek odraženého paprsku mezi oběma přímkami z_1, z_2 měl předepsanou délku (použitím větve konchoidy Nikodemovy, který ji použil při délickém problému a trisekci úhlu). Konečně druží se sem i skupina úloh, jichž důkaz spočívá buďto na dvojici úhlů nebo na vnějších úhlech trojúhelníka. Na př. je-li $z_1 \perp z_2$, paprsek dopadající na z_1 a paprsek odražený od z_2 jsou rovnoběžny (souhlasné úhly jsou si rovny). Pro tuto skupinu bych vytkl úlohu, jejímiž obměnami nebo číselnými údaji lze vytvořiti řadu dalších, složitých a zajímavých úloh. Dvě přímky z_1, z_2 svírají ostrý úhel α; z bodu M uvnitř úhlu dopadá paprsek na z_2 tak, že se přibližuje k průsečíku P přímek z_1, z_2. a) Po kolikátém odrazu počne se od něho vzdalovati? b) Ve kterém případě prochází průsečíkem P? c) Kolikátý odraz je poslední? d) Otočením z_2 k z_1 tak, že $\sphericalangle z_1Pz'_2 = \frac{\alpha}{n}$, projde paprsek z M všemi body odrazu na z_1 jako v prvém případě, při čemž k-tý odraz prvého případu se stane odrazem nk-tým.

a) Průsečíkem P veďme postupně přímky $z_3, z_4, z_5, \ldots$, odchýlené navzájem o týž úhel: $\sphericalangle (z_1z_2) = \sphericalangle (z_2z_3) = \sphericalangle (z_3z_4) = \ldots \ldots = \alpha$; paprsek z bodu M prodlužme; nechť protíná $z_2, z_3, z_4, \ldots$ v bodech $A_2, A_3, A_4, \ldots$ Sestrojíme-li jednotlivé body odrazu uvnitř úhlu $\sphericalangle z_1z_2$, získáme body $A'_2, A'_3, \ldots$ Přímky $z_3, z_4, z_5, \ldots$ znázorňují nám střídavě zrcadlící přímky $z_1, z_2, z_1, z_2, \ldots$, ježto paprsek s svírá s nimi tytéž úhly jako paprsek odražený s přímkami z_1, z_2, a body $A_3, A_4, A_5, \ldots$ jsou homologické s body A'_3, $A'_4, A'_5, \ldots$ Padne-li tedy pata kolmice vedené z P na s mezi přímky z_{x+1} a z_{x+2}, nastane vzdalování se paprsku od bodu P mezi x-tým a $x + 1$-vým odrazem. Je jasno, že $\sphericalangle (sz_n) = \beta + (n - 2) \alpha$, kdež $\beta = \sphericalangle (sz_2)$. Platí tedy $\beta + (x - 1) \alpha < 90°$ a $\beta + x\alpha > 90°$, z čehož

$$\frac{90° - \beta}{\alpha} < x < \frac{90° - \beta}{\alpha} + 1,$$

čímž je x určeno.

b) Ze znázornění je patrno, že paprsek prochází bodem P, jde-li jím bez odrazu.

c) Poslední odraz bude y-tý, při čemž

$$\beta + y\alpha \geqq 180°, \ y \geqq \frac{180° - \beta}{\alpha},$$

anebo

$$\frac{180° - \beta}{\alpha} \leqq y < \frac{180° - \beta}{\alpha} + 1.$$

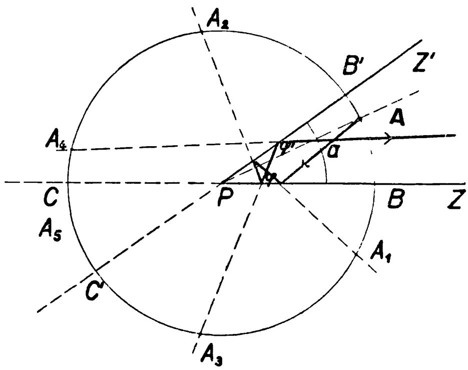
d) Uvedené tvrzení plyne přímo ze znázornění.

γ) Všimněme si nyní úloh se třemi zrcadlícími přímkami. Na př.: Bodem M uvnitř $\triangle ABC$ jest sestrojiti paprsek tak, aby po odraze na straně $\overline{BC}$ a pak po odraze na $\overline{AB}$ a $\overline{AC}$ dospěl k témuž bodu na straně $\overline{BC}$, kde po prvé dopadl.

Paprsek nechť dopadne na $\overline{BC}$ pod úhlem ε_1, na $\overline{AB}$ pod ε_2, na $\overline{AC}$ pod ε_3 a po druhé na $\overline{BC}$ pod úhlem ε_0. Pro tyto úhly platí vztahy plynoucí z trojúhelníků A_1BC_1, AB_1C_1, A_1B_1C, kde A_1, C_1, B_1, A_1 jsou body dopadu: $\varepsilon_2 = \beta - \varepsilon_1$; $\varepsilon_3 = \alpha - \varepsilon_2 = \alpha - \beta + \varepsilon_1$, $\varepsilon_0 = \gamma - \alpha + \beta - \varepsilon_1$, takže $\varepsilon_0 + \varepsilon_1 = \gamma + \beta - \alpha$. Paprsek dopadne na $\overline{BC}$ v bodě A_1, po odrazu prochází bodem M_1, souměrným s bodem M podle $\overline{BC}$; dopadne na $\overline{AB}$ v bodě C_1 a po odrazu prochází bodem M_2, souměrným s M_1 podle strany $\overline{AB}$; dopadne na $\overline{AC}$ v bodě B_1 a po odraze prochází bodem M_3, souměrným s M_2 podle $\overline{AC}$. Má dopadnouti na $\overline{BC}$ opět v bodě A_1. Jde zde patrně o konstrukci trojúhelníka o straně $\overline{M_1M_3}$, jehož třetí vrchol leží na dané přímce BC, a jehož úhel při tomto vrcholu se rovná $180° - (\varepsilon_0 + \varepsilon_1)$. Geometrické místo vrcholů nad úsečkou je kruhový oblouk, jež protne přímku BC v hledaném bodě A_1. — Při řešení této úlohy byla podána toliko kostra postupu, avšak zevrubný rozbor by byl velmi zajímavý a složitý; ukázal by, na čem všem závisí možnost řešení vůbec. Obměnami a zavedením jiných podmínek pro dráhu paprsku, jako na př. směr, délka úseku, několikanásobný odraz na dvou stranách atd., získali bychom úlohy složitější.

Mějme nyní obecně n-úhelník $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ a uvnitř body P, Q. Jak je nutno vésti z bodu P paprsek, aby po odrazu na straně $\overline{A_1A_2}$ a po následujících odrazech postupně na stranách $\overline{A_2A_3}, \overline{A_3A_4}, \ldots, \overline{A_nA_1}$ procházel bodem Q? Konstrukce je snadnou vzhledem k té vlastnosti, že odražený paprsek prochází vždy bodem souměrným. Sestrojme tedy postupně body souměrné podle stran: ku P bod P_1 podle $\overline{A_1A_2}$, ku P_1 bod P_2 podle $\overline{A_2A_3}$ atd., až konečně dojdeme k bodu P_n, jímž má procházeti odražený paprsek, který má však zároveň procházeti i daným bodem Q. Tedy spojnice $\overline{P_nQ}$ stanoví na poslední straně bod dopadu; zpětným postupem až k bodu P můžeme stanoviti dráhu žádaného paprsku. Úloha je zřejmě neřešitelná, vyskytne-li se při postupném zjišťování bodů dopadu některý z nich na prodloužení strany a nikoliv na straně samé. Vhodná volba podmínek nám opět počet úloh rozhojní.

δ) Tento výklad zakončíme krátkou úvahou o stanovení počtu obrazů v klínu zrcadel. Jako vždy uvažujeme vše toliko v rovině kolmé k průsečnici zrcadel, jdoucí svíticím bodem, takže i dřívější názvosloví ponecháme. Dány jsou zrcadlící přímky z, z' a průsečíkem P opišme kružnici, jdoucí svíticím bodem, jež protne přímky z, z' v bodech B, resp. B'. Pro jednoduchost vyjádření volme poloměr její $r = 1$. Na této kružnici se musejí podle zákonů o odrazu nacházeti obrazy bodu A (viz obr.). Úhly $A\widehat{P}B$, $A\widehat{P}B'$, $B\widehat{P}B'$ označme φ, resp. φ', α. Paprsky vycházející z bodu A a dopadající na z, odrážejí se tak, jakoby vycházely z bodu A_1 (ležícího na kružnici tak, že oblouky $\widehat{A_1B} = \widehat{AB}$, tedy $\widehat{AA_1} = 2\varphi$). Paprsky zrcadlem z odražené dopadnou na z' a odrazí se tak, jakoby vycházely z bodu A_2, jehož poloha je stanovena $\widehat{A_1B'} = \widehat{A_2B'}$. Je tedy oblouk $\widehat{AA_2}$ určen úhlem $2\pi - 2\varphi - 2\varphi'$. Pokračujeme-li takto a měříme-li stále oblouky z A přes B, tu obdržíme



$$\widehat{AA}_{2n+1} = (2n + 2)\,\varphi + 2n\varphi',$$
$$\widehat{AA}_{2n} = 2\pi - 2n\varphi - 2n\varphi'.$$

Druhou skupinu obrazů obdržíme, sledujeme-li paprsky vycházející z A a dopadající na zrcadlící přímku z'. Označme obraz vznikající takto po k-té reflexi A'_k. Jde nyní o to, abychom ustanovili indexy posledních obrazů v obou skupinách. Patrně bude A_k tenkráte posledním obrazem, jestliže paprsky tento obraz vytvořující, byvše jednou zrcadlící přímkou odraženy, nezasáhnou již druhou zrcadlící přímku, t. j. jestliže nazpět prodlouženy protínají prodlouženou zrcadlící přímku za průsečíkem P. V tomto případě se však A_k nalézá mezi body C a C', v nichž BP a $B'P$ kružnici po druhé protínají. Je-li k liché, tu se poslední reflexe vyskytla v zrcadle z. Pak může arci A_k zapadnouti do bodu C', avšak nikoliv do bodu C, neboť v tomto případě by A_k splynul s předcházejícím obrazem, jenž vznikl reflexí na z' a jenž by pak musil platiti za poslední. Proto je

$$180° - \varphi' \leqq \widehat{AA}_{2n+1} < 180° + \varphi,$$

aneb

$$180° - \varphi' \leqq 2n\varphi + 2n\varphi' + 2\varphi < 180° + \varphi.$$

Poněvadž $\alpha = \varphi + \varphi'$, lze poslední nerovnost psáti ve tvaru

$$180° - \varphi' \leqq (2n + 1)\,\alpha + \varphi - \varphi' < 180° + \varphi;$$

přičtením $\varphi' - \varphi$ dostaneme

$$180° - \varphi \leqq (2n + 1)\,\alpha < 180° + \alpha - \varphi,$$

z čehož dělením α vyjde nerovnost:

$$\frac{180° - \varphi}{\alpha} \leqq 2n + 1 < \frac{180° - \varphi}{\alpha} + 1.$$

Obdobně máme v případě, kdy poslední do oblouku $\widehat{CC'}$ zapadající obraz má sudý index:

$$180° - \varphi' < \widehat{AA}_{2n} \leqq 180° + \varphi,$$

aneb

$$180° - \varphi' < 360° - 2n\varphi - 2n\varphi' \leqq 180° + \varphi,$$

čili

$$\frac{180° - \varphi}{\alpha} + 1 > 2n \geqq \frac{180° - \varphi}{\alpha}.$$

Jsou tedy meze pro číslo $2n$ tytéž jako pro $2n + 1$ a proto vychází přesně počet nečárkovaných obrazů x z nerovností

$$\frac{180° - \varphi}{\alpha} \leqq x < \frac{180° - \varphi}{\alpha} + 1.$$

Počet obrazů x', vznikajících paprsky, jež dopadají nejdříve na přímku zrcadlící z', vychází obdobně z nerovností

$$\frac{180^\circ - \varphi'}{\alpha} \leqq x' < \frac{180^\circ - \varphi'}{\alpha} + 1.$$

Počet všech obrazů jest $x + x'$. Výsledek lze vysloviti takto: Rozděluje-li svítící bod dvě zrcadlící přímky v úhlu α na části φ a φ', nalezneme počet vznikajících obrazů tímto způsobem. Doplněk úhlu φ na 180° dělme úhlem α; vyjde-li dělení beze zbytku, zaznamenejme si podíl, nevyjde-li dělení beze zbytku, zaznamenejme pak nejblíže vyšší celé číslo. Stejně tak učiňme s úhlem φ'. Součet obou takto získaných čísel udává počet obrazů.

Diskusi by ovšem zasluhoval též případ, kdy oba poslední obrazy na oblouku $\widehat{CC'}$ se kryjí, což přenecháváme již čtenáři samotnému.

Poznámky k metodice trigonometrie.

Karel Lerl.

1. Mnozí didaktikové zahajujíce novou partii geometrie snaží se konkretními úlohami z praktického života učiniti ji zajímavou a ukázati právě na těchto úlohách důležitost a nutnost této části z důvodů praktických. Zájem žáků se vzbudí jen konkretností, od níž se přechází pozvolna k abstraktním pojmům. Tohoto hlediska musí býti dbáno též na počátku výuky trigonometrie, kdy počínáme pojmem „*goniometrická funkce*“. Zde lze vhodně volenými příklady z prakse ukázati, že funkce ty jsou nutnými. Didaktik *Höfler**) klade na prvé místo funkci *tangens*. Definice goniometrických funkcí pro ostrý úhel spolu s větou Pythagorovou slouží výhradně k praktickým příkladům, zejména k řešení pravoúhlého trojúhelníka. Potom následuje rozšíření pojmu funkce pro každý úhel (tedy i záporný); grafické znázornění průběhu funkcí umožňuje snadnější vniknutí do podstaty tabulek a jejich používání. Z vlastní goniometrie nutno probrati zatím jen nejdůležitější vzorce a vztahy, neboť předčasné jejich hromadění je didakticky závadné. Žáku není dosud totiž z probraného učiva dostatečně známo, jaký budou míti tyto vztahy účel a použití. Přílišné hromadění vzorců vede žáka jen k bezmyšlenkovitému memorování vzorců, jichž pak používá současně toliko ku strohému upravování vyumělkovaných výrazů a pod. Isolovanou abstraktností nevzbuzuje se pražádná činnost, ba spíše naopak zmenšuje se jí duševní pohyblivost a postup vyučování se stává těžkopádným. Na důkladné probrání a doplnění goniometrie je dosti času až ve vlastní trigonometrii. Zakončením tohoto úvodu jest úprava běžných výrazů k logaritmování, při čemž se z týchž důvodů omezujeme na věci podstatné.

*) *A. Höfler*, Didaktik des mathem. Unterrichts, str. 263 a násl.