Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Jan Schuster

Příspěvky ke geometrii kuželoseček. [II.]

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 68 (1939), No. Suppl., D121--D136

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/120758

ČLÁNKY A REFERÁTY.

Příspěvky ke geometrii kuželoseček.

Dr. **Jan Schuster,** Praha.

(Pokračování.)

12. Dány-li dvě tečny a normála, má se určit vztah mezi směrem a úseky osy na tečně. Stopy M, N normál na tečně mějte vzájemnou vzdálenost $2m$, průsek osy s tečnou od středu úsečky MN vzdálen o u.

Podle dřívějších úvah platí:

$$KS = \frac{p}{2}[\sec^2(\alpha + \varphi) + \operatorname{cosec}^2\varphi] = (u + m)\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha + \varphi)}$$

$$LS = \frac{p}{2}[\sec^2(\beta + \varphi) + \operatorname{cosec}^2\varphi] = (u - m)\frac{\sin\beta}{\sin(\beta + \varphi)}.$$

Vyloučením parametru obdržíme

$$\frac{u + m}{u - m} = \frac{\sec^2(\alpha + \varphi) + \operatorname{cosec}^2\varphi}{\sec^2(\beta + \varphi) + \operatorname{cosec}^2\varphi} \cdot \frac{\sin(\alpha + \varphi)\sin\beta}{\sin(\beta + \varphi)\sin\alpha}.$$

Je-li $\beta = 90°$, t. j. je-li N dotykový bod, platí:

$$\frac{u + m}{u - m} = \frac{\sec^2(\alpha + \varphi) + \operatorname{cosec}^2\varphi}{2\operatorname{cosec}^2\varphi} \cdot \frac{\sin(\alpha + \varphi)}{\cos\varphi\sin\alpha} =$$

$$= \frac{\cos^2(\alpha + \varphi) + \sin^2\varphi}{2\cos^2(\alpha + \varphi)}[1 + \operatorname{cotg}\varphi\operatorname{tg}\alpha].$$

13. Jest určiti parabolu ze čtyř normál:

$$y = A_k x + a_k \quad (k = 1, 2, 3, 4).$$

Řešení provedeme podle odstavce 9, ale trinom T_k necháme rozvinutý. Tím vzniknou rovnice:

$$u(A_k - B)(1 + A_k^2) - (1 + BA_k)^2(y_0 - x_0 A_k - a_k) = 0$$
$$(k = 1, 2, 3, 4).$$

Z těchto čtyř rovnic vyloučíme u, x_0, y_0, což dá pro směrnici B osy křivky determinantní rovnici:

$$\left| \frac{(A_k - B)(1 + A_k^2)}{(1 + BA_k)^2},\ 1,\ A_k,\ a_k \right| = 0.$$

Když označíme Δ_k ($k = 1, 2, 3, 4$) minory prvků prvního sloupce, bude rovnice znít:

$$\sum_{k=1}^{4} \frac{(A_k - B)(1 + A_k^2)}{(1 + BA_k)^2} \Delta_k = 0.$$

Tato rovnice je podle B stupně sedmého. Ostatní prvky u, x_0, y_0 plynou potom lineárně.

Kdyby šlo o tečny, máme řešiti podle odst. 10 soustavu rovnic:

$$u(1 + B_k^2) - (y_0 - x_0 B_k - b_k)(B - B_k) = 0 \quad (k = 1, 2, 3, 4),$$

takže pro směr B osy obdržíme rovnici:

$$|\, 1 + B_k^2,\ B - B_k,\ (B - B_k) B_k,\ (B - B_k) b_k \,| = 0.$$

Přičteme-li první sloupec a B-násobný druhý ke třetímu, čímž vznikne

$$1 + B_k^2 + B(B - B_k) + (B - B_k) B_k = 1 + B^2,$$

můžeme rovnici ve třetím sloupci číslem $1 + B^2$ zkrátit, takže

$$|\, 1 + B_k^2,\ B - B_k,\ 1,\ (B - B_k) b_k \,| = 0.$$

Když pak odečteme od prvního sloupce třetí, a od druhého B násobný třetí, bude jednoduše

$$|\, B_k^2,\ B_k,\ 1,\ (B - B_k) b_k \,| = 0;$$

takže je rovnice podle B stupně prvního, jak to odpovídá jednoznačnému určení paraboly ze 4 tečen poučkou o Simsonově přímce.

Ale tato výjimečná jednoduchost okamžitě zmizí, jde-li o určení paraboly z prvků smíšených, na př. tří tečen a jedné normály:

$$u \frac{(A_1 - B)(1 + A_1^2)}{(1 + BA_1)^2} - y_0 + x_0 A_1 + a_1 = 0,$$

$$u \frac{1 + B_2^2}{B - B_2} - y_0 + x_0 B_2 + b_2 = 0,$$

$$u \frac{1 + B_3^2}{B - B_3} - y_0 + x_0 B_3 + b_3 = 0,$$

$$u \frac{1 + B_4^2}{B - B_4} - y_0 + x_0 B_4 + b_4 = 0.$$

Vyloučení u, x_0, y_0 z těchto rovnic dá pro B rovnici stupně čtvrtého. Kdyby šlo o dvě normály a dvě tečny, bude úkol stupně pátého. Pro tři normály a jednu tečnu vznikne rovnice stupně šestého.

14. Jistou zajímavost může mít případ, kdy jsou dány tečny a normály patřící ke dvěma bodům paraboly. Potom je úkol vystižen rovnicemi:

$$u \frac{(A_1 - B)(1 + A_1^2)}{(1 + BA_1)^2} - y_0 + x_0 A_1 + a_1 = 0,$$

$$u \frac{(A_2 - B)(1 + A_2^2)}{(1 + BA_2)^2} - y_0 + x_0 A_2 + a_2 = 0,$$

$$u \frac{A_1^2 + 1}{BA_1 + 1} - A_1 y_0 - x_0 + b_1 A_1 = 0,$$

$$u \frac{A_2^2 + 1}{BA_2 + 1} - A_2 y_0 - x_0 + b_2 A_2 = 0.$$

Vylučme u, x_0, y_0 a položme osu y do spojnice dotykových bodů, jimiž jdou tečny i normály, takže $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$. Tím obdržíme

$$\begin{vmatrix} \dfrac{(A_1 - B)(1 + A_1^2)}{(1 + B A_1)^2}, & 1, & A_1, & a_1 \\ \dfrac{(A_2 - B)(1 + A_2^2)}{(1 + BA_2)^2}, & 1, & A_2, & a_2 \\ \dfrac{A_1^2 + 1}{BA_1 + 1}, & A_1, & -1, & a_1 A_1 \\ \dfrac{A_2^2 + 1}{BA_2 + 1}, & A_2, & -1, & a_2 A_2 \end{vmatrix} = 0$$

Znásobme první řádek číslem A_1 a odečtěme jej od třetího, podobně druhý číslem A_2 znásobený od čtvrtého. Tím vznikne

$$\begin{vmatrix} \dfrac{(A_1 - B)(1 + A_1^2)}{(1 + BA_1)^2}, & 1, & A_1, & a_1 \\ \dfrac{(A_2 - B)(1 + A_2^2)}{(1 + BA_2)^2}, & 1, & A_2, & a_2 \\ \dfrac{(1 + A_1^2)(1 + 2BA_1 - A_1^2)}{(1 + BA_1)^2}, & 0, & -(1 + A_1^2), & 0 \\ \dfrac{(1 + A_2^2)(1 + 2BA_2 - A_2^2)}{(1 + BA_2)^2}, & 0, & -(1 + A_2^2), & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Zkraťme rovnici čísly $1 + A_1^2$, $1 + A_2^2$ a odečtěme první řádek od druhého. Tím obdržíme determinant stupně třetího, který má v posledním sloupci prvky $a_2 - a_1$, 0, 0. Dá se tedy hned snížit na druhý stupeň, který představuje pro určení B rovnici:

$$\frac{1 + 2BA_1 - A_1^2}{(1 + BA_1)^2} = \frac{1 + 2BA_2 - A_2^2}{(1 + BA_2)^2}$$

nebo

$$\frac{1 + 2BA_1 - A_1^2}{A_1^2(B^2 + 1)} = \frac{1 + 2BA_2 - A_2^2}{A_2^2(1 + B^2)}.$$

Odtud

$$\frac{1}{A_1^2} - \frac{1}{A_2^2} = 2B\left(\frac{1}{A_2} - \frac{1}{A_1}\right) \text{ nebo } B = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2}\right).$$

Ostatně je tento úkol obsažen v úkolu určiti osu paraboly z daných dvou tečen a jejich bodů dotykových nebo dvou párů soumezných tečen.

15. Pro srovnání metody metrické se známými polohovými určeme kuželosečku z pěti tečen

$$y = B_k x + b_k \quad (k = 1, 2, 3, 4, 5).$$

Pata kolmice z ohniska $F(x_0, y_0)$ na tečnu je podle odst. 10 dána souřadnicemi

$$x = \frac{y_0 B_k + x_0 - b_k B_k}{1 + B_k^2}, \quad y = \frac{y_0 B_k^2 + B_k x_0 + b_k}{1 + B_k^2}.$$

Bod souměrný s ohniskem podle tečny má pak souřadnice:

$$X = 2x - x_0 = \frac{x_0(1 - B_k^2) + 2y_0 B_k - 2b_k B_k}{1 + B_k^2},$$

$$Y = 2y - y_0 = \frac{2B_k x_0 + y_0(B_k^2 - 1) + 2b_k}{1 + B_k^2}.$$

Tento bod má od druhého ohniska $F'(x_1, y_1)$ vzdálenost rovnou velké ose $2R$. Proto

$$4R^2 (1 + B_k^2)^2 = [x_0(1 - B_k^2) + 2y_0 B_k - 2b_k B_k - x_1(1 + B_k^2)]^2 + \\ + [x_0 2B_k + y_0(B_k^2 - 1) + 2b_k - y_1(1 + B_k^2)]^2.$$

Takovýchto pět rovnic slouží k určení neznámých x_0, y_0, x_1, y_1, R.

Při rozvinutí rovnice odpadne činitel $1 + B_k^2$ a zbude

$$4R^2 (1 + B_k^2) = (x_0^2 + y_0^2 + x_1^2 + y_1^2) \cdot (1 + B_k^2) + 4b_k^2 + \\ + 4b_k (x_0 B_k - y_0 + x_1 B_k - y_1) + 2(x_0 x_1 - y_0 y_1)(B_k^2 - 1) - \\ - 4B_k (x_1 y_0 + x_0 y_1).$$

Zavedeme-li zkratky: $x_0 - x_1 = u$, $y_0 - y_1 = v$, $x_0 + x_1 = s$, $y_0 + y_1 = t$, obdržíme

$$4R^2(1+B_k^2) = (u^2+s^2+v^2+t^2)\,\frac{1+B_k^2}{2} + 4b_k^2 + 4b_k(sB_k - t) +$$

$$+ (s^2 - t^2 - u^2 + v^2)\,\frac{B_k^2 - 1}{2} - 2B_k\,(st - uv),$$

nebo

$$(s^2 + v^2 - 4R^2)\,B_k^2 + (u^2 + t^2 - R^2) + s\,4B_k\,b_k - t\,4b_k -$$

$$- 2B_k\,(st - uv) = -4b^2_k.$$

Takových pět rovnic pro indexy $k = 1, 2, 3, 4, 5$ dovoluje určit neznámé jako poměry determinantů, a to nejprve s, t, potom $st - uv$, z čehož se určí uv. Po té z veličin $s^2 + v^2 - 4R^2$ a $u^2 + t^2 - R^2$ se určí $u^2 - v^2$, takže lze určit jednotlivě u, v, a konečně se stanoví R.

16. Dáno pět normál $y = A_k x + \dot{a}_k$ $(k = 1, 2, 3, 4, 5)$.

Pata kolmice spuštěné s ohniska $F(x_0, y_0)$ na normálu má souřadnice

$$x = \frac{x_0 + y_0\,A_k - a_k\,A_k}{1 + A_k^2}, \quad y = \frac{A_k x_0 + y_0\,A_k^2 + a_k}{1 + A_k^2}.$$

Bod souměrný s ohniskem podle normály má polohu

$$X = 2y - x_0 = \frac{x_0(1 - A_k^2) + 2y_0\,A_k - 2a_k\,A_k}{1 + A_k^2},$$

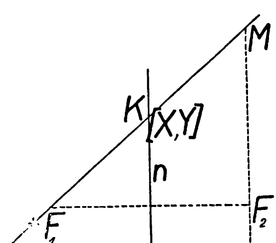
$$Y = 2y - y_0 = \frac{2A_k\,x_0 + y_0(A_k^2 - 1) + 2a_k}{1 + A_k^2}.$$

Přímka FM je spojnice bodu $K(XY)$ s F_1, tedy

$$y - y_1 = \frac{2A_k x_0 + y_0(A_k^2 - 1) + 2a_k - y_1(1 + A_k^2)}{x_0(1 - A_k^2) + 2y_0\,A_k - 2a_k\,A_k - x_1(1 + A_k^2)}\,(x - x_1).$$

Veďme ohniskem F rovnoběžku k normále:

$$y - y_0 = A_k(x - x_0).$$



Obr. 6.

Řešením obou posledních rovnic určíme nyní souřadnice bodu M. Abychom pak snadno přišli na vzdálenost bodů F_1M, zavedeme pokud možná tvar obsahující x_1 a y_1.

Především je

$$A_k(x - x_0) + (y_0 - y_1) =$$

$$= \frac{y_0(A_k^2 - 1) + 2A_k x_k + 2a_k - y_1(1 + A_k^2)}{x_0(1 - A_k^2) + 2y_0 A_k - 2a_k A_k - x_1(1 + A_k^2)}\,(x - x_1).$$

Levou stranu přepišme na

$$A_k(x - x_1) + A_k(x_1 - x_0) + y_0 - y_1$$

a převeďme člen $x - x_1$ na jmenovatele společného s pravou stranou. Tím vznikne (v následujícím zlomku je čitatel příliš dlouhý a proto je vypsán na dvou řádcích)

$$(x - x_1)\frac{\begin{array}{l}[x_0(A_k - A_k^3) + 2y_0A_k^2 - 2a_kA_k^2 - x_1(A_k + A_k^3) - \\ - y_0(A_k^2 - 1) - 2A_kx_0 - 2a_k + y_1(1 + A_k^2)]\end{array}}{x_0(1 - A_k^2) + 2y_0A_k - 2a_kA_k - x_1(1 + A_k^2)} =$$
$$= -(y_0 - y_1) + A_k(x_0 - x_1).$$

Odtud

$$x - x_1 =$$
$$\frac{[A_k(x_0 - x_1) - (y_0 - y_1)][x_0(1 - A_k^2) + 2y_0A_k - 2a_kA_k - x_1(1 + A_k^2)]}{(1 + A_k^2)[-x_0A_k + y_0 - 2a_k - x_1A_k + y_1]}$$

a dosazením do horního výrazu pro $y - y_1$:

$$y - y_1 =$$
$$\frac{[A_k(x_0 - x_1) - (y_0 - y_1)][2A_kx_0 + y_0(A_k^2 - 1) + 2a_k - y_1(1 + A_k^2)]}{[1 + A_k^2][-x_0A_k + y_0 - 2a_k - x_1A_k + y_1]}$$

Je tedy velká osa $2R = F_1M$ dána součtem čtverců obou těchto posledních výrazů:

$$4R^2 = [A_k(x_0 - x_1) - (y_0 - y_1)]^2 [(x_0^2 + y_0^2 + x_1^2 + y_1^2)(1 + A_k^2) +$$
$$+ 4a_k^2 - 4a_k(y_0 - A_kx_0 + y_1 - A_kx_1) - 2(x_0x_1 - y_0y_1)(1 - A_k^2) -$$
$$- 4(x_0y_1 + y_0x_1)A_k] \cdot \frac{1}{(1 + A_k^2)[y_0 - x_0A_k - 2a_k + y_1 - x_1A_k]^2}$$

Zaveďme sem zase zkratky z předchozího odstavce. Tím obdržíme:

$$4R^2(1 + A_k^2)[t - sA_k - 2a_k]^2 =$$
$$= (A_ku - v)^2[u^2 + t^2 + (s^2 + v^2)A_k^2 + 4a_k^2 - 4a_k(t - sA_k) -$$
$$- 2A_k(st - uv)],$$

kteráž rovnice ukazuje jistou podobnost s rovnicí v úkolu tečnovém potud, že druhý činitel vpravo má stejnou stavbu jako celá pravá strana výrazu pro $4R^2(1 + B_k^2)$.

Ovšem další řešení, jež vyžaduje vyšetření pěti takových rovnic, zde pomineme. Jen upozorňujeme zase na snížení stupně řešení, jde-li o smíšené určení kuželosečky z tečen a normál, kdy se výsledné rovnice z odstavce tohoto a předchozího přiměřeně kombinují.

17. Známo, že k parabole možná vést tři normály z daného bodu, neboť teoreticky požadovaná čtvrtá normála je rovnoběžka k hlavní ose, a protne parabolu v jejím bodě úběžném.

Obraťme tedy úkol. Buďte dány tři normály vycházející z jednoho bodu a hledejme směr hlavní osy paraboly, který je jimi zcela určen, neboť všecky paraboly patřící ke třem normálám z téhož bodu vycházejícím, jsou homotetické.

Zvolme průsek normál za počátek, takže $a_k = 0$ v rovnicích v odstavci 13 a jde o tři rovnice tvaru

$$\frac{u(A_k - B)(1 + A_k^2)}{(1 + BA_k)^2} - y_0 + x_0 A_k = 0.$$

Z těchto rovnic vyloučíme u, x_0, y_0, což dá determinantní rovnici po rozvinutí tvaru

$$\sum_{k=1,2,3} \frac{(A_k - B)(1 + A_k^2)(A_{k+1} - A_{k+2})}{(1 + BA_k)^2} = 0,$$

kde se indexy rozumí modulo 3.

Rovnici možno tedy psát ve tvaru

$$\sum_{1,2,3} (A_1 - B)(1 + BA_2)^2 (1 + BA_3)^2 (1 + A_1^2)(A_2 - A_3) = 0,$$

kde indexy se dále mění cyklicky, nebo

$$\begin{aligned} &\Sigma A_1^3(A_2 - A_3) + B\,\Sigma [2A_1(A_2^2 - A_3^2) + 2A_1^3(A_2^2 - A_3^2) - \\ &- A_1^2(A_2 - A_3)] + B^2\,\Sigma [A_1(A_2 - A_3)(A_2 + A_3)^2 + \\ &+ A_1^3(A_2 + A_3)^2 (A_2 - A_3)] + B^3\,\Sigma [- 2A_2A_3(1 + A_1^2)(A_2 - A_3) - \\ &- (1 + A_1^2)(A_2 + A_3)^2(A_2 - A_3)] + B^4\,\Sigma [A_1A_2^2A_3^2(A_2 + A_3) - \\ &- 2A_2A_3(A_2^2 - A_3^2) - 2A_1^2A_2A_3(A_2^2 - A_3^2)] - \\ &- B^5\,\Sigma A_2^2A_3^2(A_2 - A_3) = 0, \end{aligned}$$

z čehož

$$\begin{aligned} &\Sigma A_1^3(A_2 - A_3) + B\,\Sigma A_1(A_2^2 - A_3^2)(3 + 2A_1^2) + \\ &+ B^2\,\Sigma A_1(A_2 - A_3)(A_2 + A_3)^2(1 + A_1^2) + B^3\,\Sigma (1 + A_1^2)\,. \\ &.(A_2 - A_3)(A_2^2 + A_3^2) + B^4\,\Sigma [A_1A_2^2A_3^2(3A_2 - A_3) - \\ &- 2A_2A_3(A_2^2 - A_3^2)] - B^5\,\Sigma A_2^2A_3^2(A_2 - A_3) = 0. \end{aligned}$$

Jednodušší případ by ovšem byl, kdyby z bodu vycházely dvě tečny a jedna normála. Když v prvních třech rovnicích z konce odstavce 13 učiníme $a_1 = 0$, $b_2 = 0$, $b_3 = 0$, můžeme vyloučit u, y_0, x_0 a obdržíme rovnici:

$$\frac{(A_1 - B)(1 + A_1^2)}{(1 + BA_1)^2}(B_3 - B_2) + \frac{1 + B_2^2}{B - B_2}(A_1 - B_3) + \frac{1 + B_3^2}{B - B_3}(B_2 - A_1) = 0,$$

která je stupně třetího podle B.

Kdyby z bodu vycházely dvě normály a jedna tečna, přešla by rovnice ve tvar

$$\frac{(A_1 - B)(1 + A_1^2)}{(1 + BA_1)^2}(B_3 - A_2) + \frac{(A_2 - B)(1 + A_2^2)}{(1 + BA_2)^2}(A_1 - B_3) +$$
$$+ \frac{1 + B_3^2}{B - B_3}(A_2 - A_1) = 0.$$

Tato rovnice by byla stupně čtvrtého.

Pro centrickou kuželosečku by obdobný úkol záležel v určení kuželoseček patřících ke čtyřem normálám, vycházejícím z jednoho bodu. Zvolíme jej zase za počátek soustavy, takže $a_k = 0$, a poslední rovnice z odstavce 16 přejde ve

$$4R^2(1 + A_k^2)(t - sA_k)^2 = (A_k u - v)^2[(u + A_k v)^2 + (sA_k - t)^2]$$
$$(k = 1, 2, 3, 4).$$

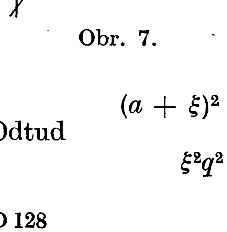
Zde směrnice osy dána poměrem $\frac{v}{u} = B$.

Zase bychom mohli tuto úlohu obměňovat tím způsobem, že bychom dvě z normál nahradili dvěma tečnami. Úloha by ovšem, hledíc k vysokému stupni výsledku eliminace, vyžadovala obtížnou diskusi reálnosti a imaginárnosti řešení.

18. Nyní se věnujme některým úlohám o určení elipsy.

Především buďte dány polohy os a dvě normály.

Označíme-li a, b vzdálenosti stop normál na hlavní ose od středu, ξ, η subnormály obou normál, q poměr poloos, α a β odchylky normál od hlavní osy, bude pořadnice průseku normály s elipsou $\xi \operatorname{tg} \alpha$ a příslušná subtangenta $\xi \operatorname{tg}^2 \alpha$. Když sestrojíme tečnu, protne osu úseček v témž bodě jako tečna afinní kružnice, v níž je přidružená tečna kolmá ke spojnici dotykového bodu se středem elipsy. Platí pro subtangentu dvojí výraz plynoucí ze střední geometrické úměrné:



Obr. 7.

$$\frac{\xi^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}{\xi} = \frac{q^2 \operatorname{tg}^2 \alpha \xi^2}{a + \xi}.$$

Provedeme-li touž úvahu pro druhou normálu, obdržíme dvě rovnice

$$q^2 = \frac{a + \xi}{\xi} = \frac{b + \eta}{\eta} \quad \text{a také} \quad \frac{a}{\xi} = \frac{b}{\eta}.$$

Dále platí pro čtverec poloměru afinní kružnice:

$$(a + \xi)^2 + q^2\xi^2 \operatorname{tg}^2 \alpha = (b + \eta)^2 + q^2\eta^2 \operatorname{tg}^2 \beta.$$

Odtud

$$\xi^2 q^2 (q^2 + \operatorname{tg}^2 \alpha) = \eta^2 q^2 (q^2 + \operatorname{tg}^2 \beta).$$

Když zkrátíme a zavedeme

$$q^2 = \frac{\sigma + 1}{\sigma} \text{ a } \frac{a}{\xi} = \frac{b}{\eta} = \frac{1}{\sigma}, \text{ t. j. } \xi = a\sigma, \ \eta = b\sigma,$$

bude

$$a^2 \left(\frac{\sigma + 1}{\sigma} + \operatorname{tg}^2 \alpha\right) = b^2 \left(\frac{\sigma + 1}{\sigma} + \operatorname{tg}^2 \beta\right),$$

nebo

$$a^2 (\sigma \sec^2 \beta + 1) = b^2 (\sigma \sec^2 \beta + 1).$$

Odtud

$$\sigma = \frac{b^2 - a^2}{a^2 \sec^2 \alpha - b^2 \sec^2 \beta} = \frac{b^2 - a^2}{m^2 - n^2},$$

jsou-li m a n úsečky na normálách, které se promítají do délek a, b. Potom je

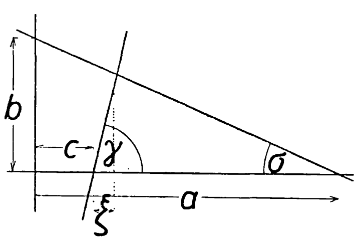
$$\xi = a \frac{b^2 - a^2}{m^2 - n^2}, \quad \eta = b \frac{b^2 - a^2}{m^2 - n^2}.$$

19. Dána poloha os elipsy a jedna tečna a normála.

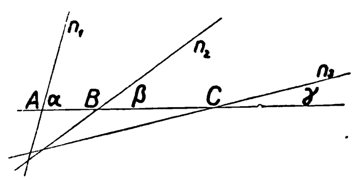
Je-li q poměr afinity kružnice a elipsy, platí podle předešlého odstavce

$$\frac{\xi^2 \operatorname{tg}^2 \gamma}{\xi} = \frac{\xi^2 \operatorname{tg}^2 \gamma q^2}{c + \xi},$$

kdežto pro elipsu, když tečnu přeložíme do polohy odpovídající kružnici, jest obsah trojúhelníka z os vyjadřitelný poloměrem kružnice. Když jej vyjádříme ještě z prvků normály, bude



Obr. 8.



Obr. 9.

$$(c + \xi)^2 + \xi^2 q^2 \operatorname{tg}^2 \gamma = \frac{a^2 b^2 q^2}{b^2 q^2 + a^2}.$$

Máme tedy dvě rovnice:

$$q^2 = \frac{c + \xi}{\xi}, \quad \xi^2 q^4 + \xi^2 q^2 \operatorname{tg}^2 \gamma = \frac{a^2 b^2 q^2}{b^2 q^2 + a^2}.$$

Když q^2 zkrátíme a q vyloučíme, bude

$$\xi^2 \left[1 + \frac{c}{\xi} + \operatorname{tg}^2\gamma\right] = \frac{a^2b^2}{a^2 + b^2 + \frac{b^2c}{\xi}}$$

nebo

$$[\xi^2 \sec^2 \gamma + c\xi] \, [(a^2 + b^2) \, \xi + b^2c] = a^2b^2\xi$$

a po úpravě

$$\xi^2 \, (a^2 + b^2) \sec^2 \gamma + \xi c \, [a^2 + b^2 + b^2 \sec^2 \gamma] + b^2 \, (c^2 - a^2) = 0.$$

Zavedeme-li ještě vzdálenost v tečny elipsy od středu a úsek mezi osami u, bude

$$a^2 + b^2 = u^2, \;\; a = u \cos \sigma, \;\; b = u \sin \sigma, \;\; v = u \sin \sigma \cos \sigma,$$

obdržíme

$$\xi^2 + \xi c \, [\cos^2 \gamma + \sin^2 \sigma] + \sin^2 \sigma \cos^2 \gamma \, [c^2 - u^2 \cos^2 \sigma] = 0,$$

a tedy

$$\xi = -\frac{c}{2} (\cos^2 \gamma + \sin^2 \sigma) \pm$$
$$\pm \sqrt{\frac{c^2}{4} (\cos^2 \gamma - \sin^2 \sigma)^2 + u^2 \sin^2 \sigma \cos^2 \sigma \cos^2 \gamma}$$

nebo

$$\xi = -\frac{c}{2} (\cos^2 \gamma + \sin^2 \sigma) \pm$$
$$\pm \sqrt{\frac{c^2}{4} \cos^2 (\sigma + \gamma) \cos^2 (\sigma - \gamma) + u^2 \cos^2 \gamma}.$$

20. Buďte dány tři normály elipsy a přímka obsahující hlavní osu. Normály dány stopami, jichž úsečky jsou a, b, c a sklony α, β, γ. Nechť má střed elipsy od bodu A vzdálenost u. Subnormály buďte ξ, η, ζ resp. Potom podle odstavce 19 platí pro poměr afinity

$$q^2 = \frac{a + u + \xi}{\xi} = \frac{b + u + \eta}{\eta} = \frac{c + u + \zeta}{\zeta}.$$

Označme tedy

$$\frac{a + u}{\xi} = \frac{b + u}{\eta} = \frac{c + u}{\zeta} = \frac{1}{\sigma}.$$

Výrazy pro poloměr opsané afinní kružnice dají nyní

$$(a + u + \xi)^2 + q^2\xi^2 \operatorname{tg}^2 \alpha = (b + u + \eta)^2 + q^2\eta^2 \operatorname{tg}^2 \beta =$$
$$= (c + u + \zeta)^2 + q^2\zeta^2 \operatorname{tg}^2 \gamma.$$

Odtud

$$\xi^2 \, (q^2 + \operatorname{tg}^2 \alpha) = \eta^2 \, (q^2 + \operatorname{tg}^2 \beta) = \zeta^2 \, (q^2 + \operatorname{tg}^2 \gamma) = \lambda^2,$$

$$q^2 = \frac{\sigma + 1}{\sigma}.$$

Můžeme tedy psát

$$(a + u)^2 \sigma^2 \left(\frac{\sigma + 1}{\sigma} + \operatorname{tg}^2 \alpha\right) = \lambda^2$$

nebo

$$a + u = \frac{\lambda}{\pm\sqrt{\sigma\,[\sigma \sec^2 \alpha + 1]}}, \text{ dále } b + u = \frac{\lambda}{\pm\sqrt{\sigma\,[\sigma \sec^2 \beta + 1]}} \text{ atd.}$$

Tím plyne

$$b - a = \frac{\lambda}{\pm\sqrt{\sigma\,[\sigma \sec^2 \alpha + 1]}} - \frac{\lambda}{\pm\sqrt{\sigma\,[\sigma \sec^2 \beta + 1]}},$$

$$c - b = \frac{\lambda}{\pm\sqrt{\sigma\,[\sigma \sec^2 \gamma + 1]}} - \frac{\lambda}{\pm\sqrt{\sigma\,[\sigma \sec^2 \beta + 1]}}.$$

Odtud vyloučením λ konečně:

$$\frac{(b - a)^{-1}}{\sqrt{\sigma\,(\sigma \sec^2 \alpha + 1)}} - \frac{(c - b)^{-1} + (b - a)^{-1}}{\pm\sqrt{\sigma\,(\sigma \sec^2 \beta + 1)}} + \frac{(c - b)^{-1}}{\pm\sqrt{\sigma\,(\sigma \sec^2 \gamma + 1)}} = 0.$$

Znásobíce činitelem $(b - a)\,(c - b)$, obdržíme

$$\frac{c - b}{\pm\sqrt{\sigma \sec^2 \alpha + 1}} + \frac{a - c}{\pm\sqrt{\sigma \sec^2 \beta + 1}} + \frac{b - a}{\pm\sqrt{c \sec^2 \gamma + 1}} = 0.$$

Umocněním obdržíme

$$\frac{(c - b)^2}{\sigma \sec^2 \alpha + 1} + \frac{(a - c)^2}{\sigma \sec^2 \beta + 1} + \frac{(b - a)^2}{\sigma \sec^2 \gamma + 1} =$$

$$= 2 \sum \frac{(a - c)\,(b - a)}{\sqrt{\sigma \sec^2 \beta + 1}\,\sqrt{\sigma \sec^2 \gamma + 1}}.$$

Když znovu umocníme, odpadne vpravo součet dvojnásobných součinů následkem předešlé rovnice, a bude

$$\left[\frac{(c - b)^2}{\sigma \sec^2 \alpha + 1} + \frac{(a - c)^2}{\sigma \sec^2 \beta + 1} + \frac{(b - a)^2}{\sigma \sec^2 \gamma + 1}\right]^2 =$$

$$= 4 \sum \frac{(a - c)^2\,(b - a)^2}{(\sigma \sec^2 \beta + 1)\,(\sigma \sec^2 \gamma + 1)}$$

nebo

$$\frac{(c - b)^4}{(\sigma \sec^2 \alpha + 1)^2} + \frac{(a - c)^4}{(\sigma \sec^2 \beta + 1)^2} + \frac{(b - a)^4}{(\sigma \sec^2 \gamma + 1)^2} =$$

$$= 2 \sum \frac{(a - c)^2\,(b - a)^2}{(\sigma \sec^2 \beta + 1)\,(\sigma \sec^2 \gamma + 1)}.$$

K určení σ převedeme rovnici na celistvý tvar, což dá

$$\Sigma (c - b)^4 [\sigma^2 \sec^2 \beta \sec^2 \gamma + \sigma (\sec^2 \beta + \sec^2 \gamma) + 1]^2 =$$
$$= 2 (\sigma \sec^2 \alpha + 1) (\sigma \sec^2 \beta + 1) (\sigma \sec^2 \gamma + 1) \,.$$
$$. \, \Sigma (a - c)^2 (b - a)^2 (\sigma \sec \alpha + 1).$$

Tato rovnice je formálně stupně čtvrtého. Ale absolutní člen je nulou, totiž

$$\Sigma (c - b)^4 - 2\Sigma (a - c)^2 (b - a)^2 = 0,$$

a proto se sníží stupeň na třetí.

Postup další vede zpět na λ, odtud na u, q, a hned na ξ, η, ζ. Ostatně bylo by lze vyjít z rovnice v odstavci 16, když položíme $v = 0$, $t = 0$. Pak jde o řešení tří rovnic tvaru:

$$4R^2 (1 + A_k^2) [sA_k + 2a_k]^2 =$$
$$= A_k^2 u^2 [u^2 + s^2 A_k^2 + 4a_k^2 + 4a_k s A_k]$$

nebo

$$4R^2 (1 + A_k^2) [sA_k + 2a_k]^2 =$$
$$= A_k^2 u^2 [u^2 + (sA_k + 2a_k)^2] \quad (k = 1, 2, 3).$$

Tato rovnice dovoluje úpravu na vyloučení dvou neznámých. Když totiž dělíme rovnici číslem u^2, a označíme-li $\frac{4R^2}{u^2} = R_1^2$, je rovnice podle R_1^2 a u^2 lineární a eliminace obou vede na determinant třetího řádu:

$$| (1 + A_k^2) (sA_k + 2a_k)^2, A_k^2, A_k^2 (sA_k + 2a_k)^2 | = 0, \quad (k = 1, 2, 3.)$$

Odečtěme třetí sloupec od prvního:

$$| (sA_k + 2a_k)^2, A_k^2, A_k^2 (sA_k + 2a_k)^2 | = 0.$$

Pak odečtěme číslem s^2 znásobený druhý sloupec od prvního a zkraťme číslem 4. To dá

$$| a_k^2 + s A_k a_k, A_k^2, A_k^2 (sA_k + 2a_k)^2 | = 0.$$

Rovnici možno pak vypsat tímto způsobem:

$$s^3 A_1 A_2 A_3 \Sigma A_1^3 (A_3 a_2 - A_2 a_3) + s^2 \{\Sigma (a_2 A_3 - a_3 A_2) [A_1^4 (a_2 A_3 + a_3 A_2) +$$
$$+ 4a_1 A_1^3 A_2 A_3]\} + 4s\Sigma (a_2 A_3 - a_3 A_2) [a_1^2 A_1^2 A_2 A_3 + a_1 A_1^3 (a_2 A_3 +$$
$$+ a_3 A_2)] + 4\Sigma a_1^2 A_1^2 (a_2^2 A_3^2 - a_3^2 A_2^2) = 0.$$

Zde vidíme, že stupeň úkolu potvrzen. Řešení podle u^2 a R_1^2 je pak už stupně prvního.

21. Jiný úkol by byl stanovit elipsu z dané normály a dvou tečen, leží-li hlavní osa v dané přímce.

Je-li u úsečka středu, platí pro normálu a obě tečny

$$\frac{\xi^2 \operatorname{tg}^2 \gamma}{\xi} = \frac{\xi^2 \operatorname{tg}^2 \gamma q^2}{c - u - \xi}$$

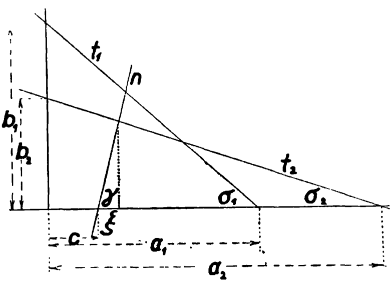
$$(c - u + \xi)^2 + \xi^2 q^2 \operatorname{tg}^2 \gamma = \frac{(a_1 - u)^4 \operatorname{tg}^2 \sigma_1 q^2}{(a_1 - u)^2 \operatorname{tg}^2 \sigma_1 q^2 + (a_1 - u)^2} =$$

$$= \frac{(a_2 - u)^2 \operatorname{tg}^2 \sigma_2 q^2.}{\operatorname{tg}^2 \sigma_2 q^2 + 1}$$

Odtud platí

$$q^2 = \frac{c - u + \xi}{\xi}, \quad \xi^2 q^2 + \xi^2 \operatorname{tg}^2 \gamma =$$

$$= \frac{(a_1 - u)^2 \operatorname{tg}^2 \sigma_1}{\operatorname{tg}^2 \sigma_1 q^2 + 1} = \frac{(a_2 - u)^2 \operatorname{tg}^2 \sigma_2}{\operatorname{tg}^2 \sigma_2 q^2 + 1}$$



Obr. 10.

Vyloučením q obdržíme

$$\xi \sec^2 \gamma + c - u = \frac{(a_1 - u)^2 \operatorname{tg}^2 \sigma_1}{(c - u) \operatorname{tg}^2 \sigma_1 + \xi \sec^2 \sigma_1} =$$

$$= \frac{(a_2 - u)^2 \operatorname{tg}^2 \sigma_2}{(c - u) \operatorname{tg}^2 \sigma_2 + \xi \sec^2 \alpha_2}$$

nebo

$$\xi \sec^2 \gamma + c - u = \frac{(a_1 - u)^2 \sin^2 \sigma_1}{(c - u) \sin^2 \sigma_1 + \xi} = \frac{(a_2 - u)^2 \sin^2 \sigma_2}{(c - u) \sin^2 \sigma_2 + \xi}.$$

Odtud obdržíme dvě lineární rovnice pro u tvaru

$$u = \frac{c\xi \sec^2 \gamma \sin^2 \sigma_1 + \xi^2 \sec^2 \gamma + \xi c + (c^2 - a_1{}^2) \sin^2 \sigma_1}{\sin^2 \sigma_1 [\xi \sec^2 \gamma + 2c - 2a_1] + \xi} =$$

$$= \frac{c\xi \sec^2 \gamma \sin^2 \sigma_2 + \xi^2 \sec^2 \gamma + c\xi + (c^2 - a_2{}^2) \sin^2 \sigma_2}{\sin^2 \sigma_2 [\xi \sec^2 \gamma + 2c - 2a_2] + \xi}.$$

Tím získána pro ξ rovnice stupně třetího. Když na obou stranách odečteme veličinu c, zruší se v čitatelích člen první a třetí a zbude

$$\frac{\xi^2 \sec^2 \gamma - (c - a_1)^2 \sin^2 \sigma_1}{\sin^2 \sigma_1 [\xi \sec^2 \gamma + 2c - 2a_1] + \xi} = \frac{\xi^2 \sec^2 \gamma - (c - a_2)^2 \sin^2 \sigma_2}{\sin^2 \sigma_2 [\xi \sec^2 \gamma + 2c - 2a_2] + \xi}.$$

Odtud vznikne především

$$\xi^3 \sec^4 \gamma (\sin^2 \sigma_2 - \sin^2 \sigma_1) + 2c\xi^2 \sec^2 \gamma (\sin^2 \sigma_2 - \sin^2 \sigma_1) -$$
$$- 2\xi^2 \sec^2 \gamma (a_2 \sin^2 \sigma_2 - a_1 \sin^2 \sigma_1) - \sin^2 \sigma_1 \sin^2 \sigma_2 \{[a_1{}^2 - a_2{}^2 -$$
$$- 2c(a_1 - a_2)] \xi \sec^2 \gamma + 2 (c - a_1)(c - a_2)(a_2 - a_1)\} -$$
$$- \xi \{c^2(\sin^2 \sigma_1 - \sin^2 \sigma_2) - 2c(a_1 \sin^2 \sigma_1 - a_2 \sin^2 \sigma_2) + (a_1{}^2 \sin \sigma_1 -$$
$$- a_2{}^2 \sin^2 \sigma_2)\} = 0$$

nebo

$$\xi^3 \sec^4 \gamma\, (\sin^2 \sigma_2 - \sin^2 \sigma_1) + 2\xi^2 \sec^2 \gamma\, [c(\sin^2 \sigma_2 - \sin^2 \sigma_1) - a_2 \sin^2 \sigma_2 + a_1^2 \sin^2 \sigma_1] - \xi\, [\sec^2 \gamma \sin^2 \sigma_1 \sin^2 \sigma_2\, (a_1 - a_2)\,(a_1 + a_2 - 2c) + c^2(\sin^2 \sigma_1 - \sin^2 \sigma_2) - 2c(a_1 \sin^2 \sigma_1 - a_2 \sin^2 \sigma_2) + a_1^2 \sin^2 \sigma_1 - a_2^2 \sin^2 \sigma_2] - 2\,(c - a_1)\,(c - a_2)\,(a_2 - a_1) \sin^2 \sigma_1 \,.\, \sin^2 \sigma_2 = 0.$$

Po rozřešení této rovnice se určí u. Pak obdržíme hned q, čímž se z tečen hned odvodí velká poloosa a úkol je zcela hotov.

Úkol se dá také řešit z rovnic z odstavce 15 a 16, neboť pro $v = t = 0$ platí rovnice:

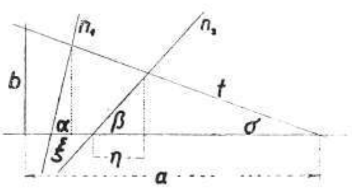
$$4R^2\,(1 + B_1^2) = u^2 + (sB_1 + 2b_1)^2,$$
$$4R^2\,(1 + B_2^2) = u^2 + (sB_2 + 2b_2)^2,$$
$$4R^2\,(1 + A_3^2)\,(sA_3 + 2a_3)^2 = A_3^2 u^2\,[u^2 + (sA_3 + 2a_3)^2].$$

Z prvních dvou rovnic určíme R^2 a u^2 a dosadíme do třetí, což dá:

$$4R^2 = \frac{(sB_1 + 2b_1)^2 - (sB_2 + 2b_2)^2}{B_1^2 - B_2^2},$$
$$u^2 = \frac{(sB_1 - 2b_1)^2\,(1 + B_2^2) - (sB_2 + 2b_2)^2\,(1 + B_1^2)}{B_1^2 - B_2^2}.$$

Rovnice se ukazuje po dosazení stupně čtvrtého. Ale uvážíme-li, že nejvyšší člen ve $4R^2$ je s^2, v u^2 pak také s^2, vidíme, že člen stupně čtvrtého vlevo jest $s^2(1 + A_3^2)\,A_3^2 s^2$, vpravo $A_3^2 s^2(s^2 + s^2 A_3^2)$. Tedy se člen stupně čtvrtého zruší a rovnice je zase stupně třetího ve shodě s předchozí metodou.

22. Podobně bychom postupovali při daných dvou normálách a jedné tečně, leží-li hlavní osa v dané přímce.



Obr. 11.

Nyní jsou základní rovnice:

$$(c_1 - u + \xi)^2 + \xi^2 q^2 \operatorname{tg}^2 \alpha = (c_2 - u + \eta)^2 + \eta^2 q^2 \operatorname{tg}^2 \beta = \frac{(a - u)^2 \operatorname{tg}^2 \sigma q^2}{q^2 \operatorname{tg}^2 \sigma + 1},$$
$$q^2 = \frac{c_1 - u + \xi}{\xi} = \frac{c - u + \eta}{\eta}.$$

Dosazením těchto hodnot do předešlých rovnic dospějeme k rovnicím

$$\xi^2(q^2 + \operatorname{tg}^2 \alpha) = \eta^2(q^2 + \operatorname{tg}^2 \beta) = \frac{(a - u)^2 \operatorname{tg}^2 \sigma}{q^2 \operatorname{tg}^2 \sigma + 1}.$$

Položme

$$\frac{c_1 - u}{\xi} = \frac{c_2 - u}{\eta} = \frac{1}{\varphi}, \quad \text{tedy } q^2 = \frac{1 + \varphi}{\varphi}.$$

Tím vznikne:

$$(c_1-u)^2\varphi[1+\varphi\sec^2\alpha]=(c_2-u)^2\,\varphi[1+\varphi\sec^2\beta]=\frac{(a-u)^2\varphi\sin^2\sigma}{\sin^2\sigma+\varphi}.$$

Zde se φ jednou zkrátí a rovnice se zavedením společného parametru λ převede na

$$c_1-u=\frac{\lambda}{\pm\sqrt{1+\varphi\sec^2\alpha}},\quad c_2-u=\frac{\lambda}{\pm\sqrt{1+\varphi\sec^2\beta}},$$
$$a-u=\pm\,\lambda\sqrt{1+\varphi\operatorname{cosec}^2\sigma}.$$

Dáme-li do poměru rozdíl těchto rovnic, vypadne parametr λ a rovnice bude mít tvar:

$$\frac{c_1-c_2}{a-c_1}=\left(\frac{1}{\pm\sqrt{\varphi\sec^2\alpha+1}}-\frac{1}{\pm\sqrt{\varphi\sec^2\beta+1}}\right):$$
$$:\left(\pm\sqrt{\varphi\operatorname{cosec}^2\sigma+1}-\frac{1}{\pm\sqrt{\varphi\sec^2\alpha+1}}\right).$$

Odtud

$$(c_1-c_2)\sqrt{\varphi\operatorname{cosec}^2\sigma+1}+\frac{c_2-a}{\pm\sqrt{\varphi\sec^2\alpha+1}}+\frac{a-c_1}{\pm\sqrt{\varphi\sec^2\beta+1}}=0$$

jako v odstavci 20.

Tato rovnice se zase rationalisuje, při čemž se ukáže rovnicí stupně 6, kde absolutní člen je nulový, čímž klesne stupeň na pátý.

Kdybychom vyšli od obecných rovnic, jak naznačeno v předchozím odstavci, bylo by řešit rovnice:

$$4R^2\,(1+B_1{}^2)=u^2+(sB_1+2b_1)^2,$$
$$4R^2\,(1+A_2{}^2)\,(sA_2+2a_2)^2=A_2{}^2u^2\,[u^2+(sA_2+2a_2)^2],$$
$$4R^2\,(1+A_3{}^2)\,(sA_3+2a_3)^2=A_3{}^2u^2\,[u^2+(sA_3+2a_3)^2].$$

Zde by byl postup následující: Z první rovnice se dosadí R^2 do druhé a třetí. Z obou těchto se vyloučí u^4 a vznikne rovnice obsahující jen u^2, jež se vyloučí, čímž vznikne pro u^2 výraz ve tvaru zlomku, který má v čítateli stupeň čtvrtý, ve jmenovateli druhý podle neznámé s. Další postup je pak už průhledný.

23. Dáno-li ohnisko a tři normály elipsy, zvolme ohnisko za počátek $x_0=y_0=0$, a podle předposlední rovnice z odstavce 16 jde o řešení rovnic:

$$4R^2=\frac{[A_kx_1-y_1]^2\,[(x_1{}^2+y_1{}^2)\,(1+A_k{}^2)+4a_k{}^2-4a_k\,(y_1-A_kx_1)]}{(1+A_k{}^2)\,[y_1-x_1A_k-2a_k]^2}$$
$$(k=1,2,3)$$

podle neznámých R, x_1, y_1.

Úkol je, jak patrno, značně složitý.

Kdyby některá normála nebo dvě byly nahrazeny tečnami, šlo by o kombinaci s rovnicemi tvaru

$$4R^2 (1 + B_k^2) = (x_1^2 + y_1^2) (1 + B_k^2) + 4b_k^2 + 4b_k (x_1 B_k - y_1).$$

Úloha sama se tím řešitelnosti mnoho nepřiblíží.

Stejně bychom mohli hledati centrickou kuželosečku ze směru hlavní osy a čtyř normál. Zvolíme-li osu úseček rovnoběžnou k hlavní ose, je $y_0 = y_1$, t. j. v rovnicích odstavce 16 se položí $v = 0$, takže je

$$4R^2 (1 + A_k^2) (t - sA_k - 2a_k)^2 =$$
$$= A_k^2 u^2 [u^2 + t^2 + s^2 A_k^2 + 4a_k^2 - 4a_k (t - sA_k) - 2A_k st]$$

pro $k = 1, 2, 3, 4$. Stupeň rovnice se zde poněkud sníží, zavedeme-li novou neznámou $\frac{4R^2}{u^2} = 4R_1^2$, při čemž $2R_1$ znamená převratnou hodnotu číselné výstřednosti.

Rovnici lze přepsat na

$$4R_1^2 (1 + A_k^2) (t - sA_k - 2a_k)^2 = A_k^2 [u^2 + (t - sA_k - 2a_k)^2]$$

nebo

$$(t - sA_k - 2a_k)^2 [4R_1^2 (1 + A_k^2) - A_k^2] = u^2 A_k^2.$$

Rovnice se jeví lineární podle R_1^2 a u^2, jež lze užitím dvou vypočíst a dosadit do ostatních.

Zase kdyby při daném směru os byly dány smíšeně tečny a normály, kombinovaly by se s předchozími rovnicemi rovnice tvaru:

$$4R^2 (1 + B_k^2) = u^2 + (sB_k - t + 2b_k)^2.$$

(Dokončení.)