Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Josef Langr

Čtyřmi imagiárními body položiti kuželosečku podobnou dané

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 75 (1950), No. 2, D145--D151

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/120768`

ČTYŘMI IMAGINÁRNÍMI BODY POLOŽITI KUŽELOSEČKU PODOBNOU DANÉ.

Ing. Dr JOSEF LANGR.

Konstrukci provedeme užitím úhlové inverse v trojúhelníku čili isogonální konjugací podobně jako při daných bodech reálných, kteroužto úlohu jsem probral v ročníku 74. tohoto časopisu, str. D 73 až D 80. Při daných reálných bodech byly zvoleny tři z nich za vrcholy základního trojúhelníka ABC a ku spojnicím čtvrtého bodu D s vrcholy A, B, C byly stanoveny přímky s nimi souměrně sdružené dle příslušných os úhlů. Tyto přímky jdou společným bodem, jenž je isogonálním obrazem D_0 bodu D. Tímto obrazem prochází přímka k_0, jakožto isog. obraz kuželosečky k. Kolmice ku k_0 ze středu O kružnice l opsané základ. trojúhelníku protíná kružnici v bodech M, N a k_0 v P. Přitom jest $\overline{PM} : \overline{PN} = a^2 : b^2$. Poněvadž poměr poloos žádané kuželosečky $a : b = v$ je znám, lze určiti délku $\overline{OP}$. Vedeme tedy obraz k_0 bodem D_0 tak, aby se dotýkal kružnice l^v o středu O a poloměru $\overline{OP}$. Protože však v našem případě dané body jsou imaginární, je třeba postup přizpůsobiti a užíti některých pomocných konstrukcí a vlastností, jež předem probereme.

1. *Kružnice d jdoucí dvěma vrcholy základního trojúhelníka ABC (na př. AB) má za isogonál. obraz opět kružnici d_0 jdoucí vrcholy A, B* (viz obr. 1). Středy S^d, S_0^d obou kružnic oddělují harmonicky průsečíky M, N osy strany AB s kružnicí l opsanou trojúhelníku ABC.

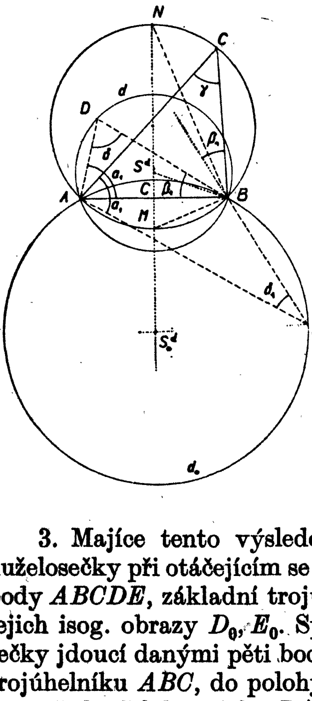
V obr. 1 je zvolen na kružnici d o středu S^d bod D, při čemž $\sphericalangle DAB = \alpha_1$, $\sphericalangle DBA = \beta_1$, a $\sphericalangle ADB = \delta$. V zákl. trojúhelníku ABC jsou úhly α, β, γ. Sestrojme obvyklým způsobem obraz D_0. Dle toho bude $\sphericalangle CAD_0 = \alpha_1$, $\sphericalangle ABD_0 = \pi - \beta + \beta_1$. Pro úhel $\delta_1 = \sphericalangle AD_0B$ máme z trojúhelníka ABD_0 výsledek $\delta_1 = \pi - (\alpha_1 - \alpha) - (\pi - \beta + \beta_1) = \delta - \gamma$. Volíme-li kterýkoliv jiný bod na kružnici d, úhel δ se nemění a je tudíž i úhel δ_1 stálý a bod D_0 se tedy pohybuje po kružnici d_0 o středu S_0^d, která je obrazem kružnice d, čímž je důkaz podán. — Dále je zřejmé, že NB je kolmo k MB. Poněvadž je úhel $S^dBA = \frac{\pi}{2} - \delta$, $\sphericalangle MBA = \frac{\gamma}{2}$, jest $\sphericalangle S^dBM = \frac{\pi}{2} - \delta + \frac{\gamma}{2}$ a ježto je $\sphericalangle S_0^dBM = \sphericalangle S_0^dBA - \sphericalangle MBA = \frac{\pi}{2} - \delta_1 - \frac{\gamma}{2} = \frac{\pi}{2} - \delta + \frac{\gamma}{2}$, jest $\sphericalangle S^dBM = \sphericalangle S_0^dBM$ a je proto $(MNS_0^dS^d) = 1$.

Z uvedeného důkazu také vysvítá, že, otočí-li se bod D na d o jistý úhel, otočí se D_0 na d_0 o týž úhel, avšak ve smyslu opačném.

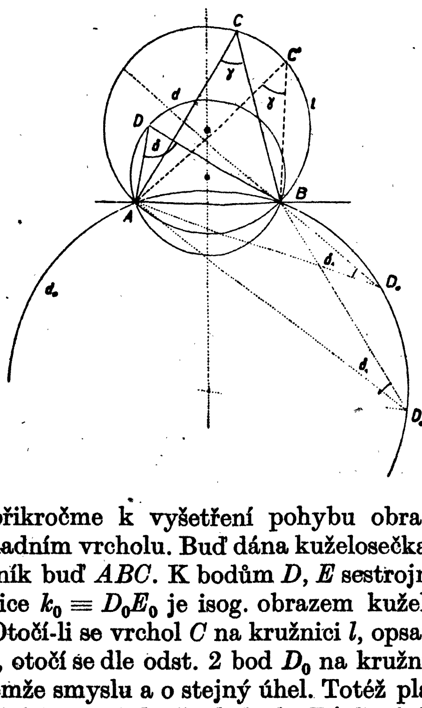
2. *Otáčí-li se vrchol základního trojúhelníka ABC po opsané kružnici l, opisuje i obraz D_0 bodu D kružnici d_0, při čemž úhly otočení vrcholu i bodu*

D_0 *jsou stejné a smysl otáčení souhlasný.* V obr. 2 je nakreslen trojúhelník ABC s opsanou kružnicí l a bod D i jeho obraz D_0. Nechť bod C se pohybuje po kružnici l. Jeho poloha po otočení buď C'. Vyšetřeme pro změněný trojúhelník ABC' obraz bodu D. Učiňme proto $\sphericalangle DAC' = \sphericalangle BAD_0'$ a $\sphericalangle DBA = \pi - \sphericalangle C'BD'_0$, čímž získáme bod D_0'. Dle odst. 1 jest $\sphericalangle AD_0'B = \delta - \gamma = \delta_1$. Jelikož úhly γ, δ se nemění, zůstal $\sphericalangle AD_0'B = \sphericalangle AD_0B = \delta_1$, t. j. bod D_0' leží opět na kružnici d_0 jako původní D_0. Souhlasný smysl vysvítá z obrazu.

Obr. 1.



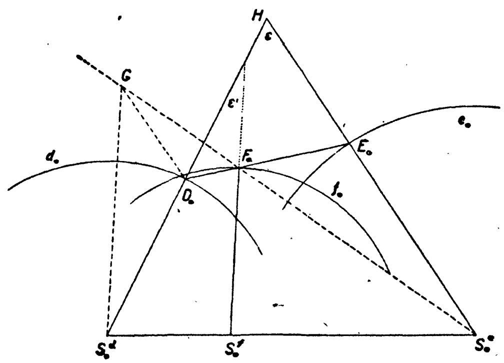
Obr. 2.



3. Majíce tento výsledek přikročme k vyšetření pohybu obrazu kuželosečky při otáčejícím se základním vrcholu. Buď dána kuželosečka k body $ABCDE$, základní trojúhelník buď ABC. K bodům D, E sestrojme jejich isog. obrazy D_0, E_0. Spojnice $k_0 \equiv D_0E_0$ je isog. obrazem kuželosečky jdoucí danými pěti body. Otočí-li se vrchol C na kružnici l, opsané trojúhelníku ABC, do polohy C', otočí se dle odst. 2 bod D_0 na kružnici d_0 o středu S_0^d do polohy D_0' v témže smyslu a o stejný úhel. Totéž platí i pro bod E_0, který se otočí na kružnici e_0 o středu S_0^e do bodu E_0'. Spojnice $D_0'E_0' \equiv k_0'$ je isogonálním obrazem kuželosečky k' jdoucí body $ABC'DE$, kde ovšem základním trojúhelníkem je teď trojúhelník ABC'. Při dalším otáčení vrcholu C po l mění obraz k_0 svoji polohu a obaluje při tom, jak známo, kuželosečku. Její jedna osa leží v středné $S_0^dS_0^e$. Kuželosečky této dalo by se užíti při naší konstrukci; k cíli vede však i jiná jednodušší cesta bez použití obálky. Platí totiž tato věta. *Pohybují-li se body D_0, E_0 po kružnicích d_0, e_0 (o středech S_0^d, S_0^e) stejnou úhlovou rychlostí a v souhlasném smyslu, opisuje libovolný bod F_0 spojnice D_0E_0, pro který poměr*

$\overline{D_0F_0} : \overline{F_0E_0} = \mu$ *zůstává stálý*, kružnici f_0 o středu $S_0{}^f$ ležícím na $S_0{}^dS_0{}^e$. Při tom jest $\overline{D_0F_0} : \overline{F_0E_0} = \overline{S_0{}^dS_0{}^f} : \overline{S_0{}^fS_0{}^e} = \mu$. K důkazu veďme (obr. 3) bodem D_0 rovnoběžku s $S_0{}^eE_0$, jež protne $S_0{}^eF_0$ v bodě G. Jest proto $\overline{GF_0} : \overline{F_0S_0{}^e} = \overline{D_0F_0} : \overline{F_0E_0} = \mu$, tudíž $\overline{GF_0} : \overline{F_0S_0{}^e} = \overline{S_0{}^dS_0{}^f} : \overline{S_0{}^fS_0{}^e}$ a proto je $S_0{}^dG$ rovnoběžno s $S_0{}^fF_0$. Také jest $\overline{GD_0} : \overline{S_0{}^eE_0} = \mu$. Je-li $\overline{S_0{}^dD_0} = r_1$,

Obr. 3.



$\overline{S_0{}^eE_0} = r_2$ a $\sphericalangle\ S_0{}^dHS_0{}^e = \varepsilon$, máme z trojúhelníka $S_0{}^dD_0G$ dle Carnotovy věty

$$(\overline{S_0{}^dG})^2 = r_1{}^2 + \mu^2r_2{}^2 + 2\mu r_1r_2 \cos\varepsilon$$

a také

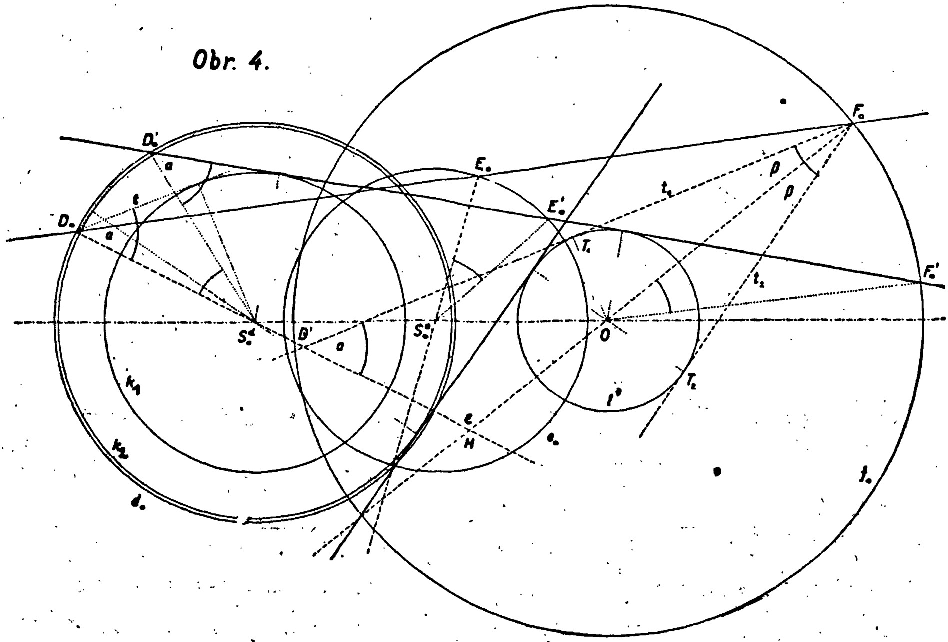
$$\overline{S_0{}^dG} : \overline{S_0{}^fF_0} = \overline{S_0{}^dS_0{}^e} : \overline{S_0{}^fS_0{}^e} = (\overline{S_0{}^dS_0{}^f} + \overline{S_0{}^eS_0{}^f}) : \overline{S_0{}^fS_0{}^e} = (\mu + 1) : 1.$$

Je-li $\overline{S_0{}^fF_0} = r_3$, jest $\overline{S_0{}^dG} = r_3(\mu + 1)$ a $r_3{}^2 = \dfrac{1}{(1 + \mu)^2}(r_1{}^2 + \mu^2r_2{}^2 +$ $+ 2\mu r_1r_2 \cos\varepsilon)$. Otáčí-li se body D_0, E_0 po svých kružnicích, nemění se při tom r_1, r_2, μ, ε, na kterých r_3 závisí a proto je hodnoty stálé. Bod F_0 opisuje tedy též kružnici, jak bylo dokázati. Při tom zůstávají úhly, které svírá $S_0{}^fF_0$ s $S_0{}^dH$ nebo s $S_0{}^eH$ beze změny.

4. Má-li býti přímka D_0E_0 isog. obrazem kuželosečky, jejíž délky os jsou v daném poměru ν, musí se dotýkati kružnice l^ν soustředné s l o poloměru odpovídajícímu příslušným způsobem poměru ν. Body D_0, E_0 musí se tedy na kružnicích d_0, e_0 o středech $S_0{}^d$, $S_0{}^e$ pootočiti o tolik, aby nastal dotyk spojnice D_0E_0 s kružnicí l^ν, jejíž střed O, leží v středu kružnice l na $S_0{}^dS_0{}^e$. Stanovme na D_0E_0 (obr. 4) bod F_0 tak, aby $\overline{D_0E_0} : \overline{E_0F_0} = \overline{S_0{}^dS_0{}^e} : \overline{S_0{}^eO}$. Dle odst. 3 víme, že F_0 opisuje kružnici soustřednou s l^ν mající poloměr r_3. Sestrojme tedy přímku $D_0E_0F_0$ odpovídající určité poloze pohyblivého vrcholu C na l (kružnice l není v obr. 4 vyrýsována) a veďme z F_0 tečnu t_1 k l^ν s dotyk. bodem T_1.

Úhel $\sphericalangle T_1F_0O = \beta$ bude přímka $D_0E_0F_0$ ve své výsledné poloze svírati s F_0O. Avšak i úhel ε poloměrů $D_0S_0^d$ a F_0O se nemění. Proto známe i třetí úhel α trojúhelníka $D'HF_0$ (D' je průsečík tečny t_1 s přímkou $D_0S_0^d$), jelikož je $\alpha + \beta + \varepsilon = \pi$. Veďme tedy bodem D_0 přímku t svírající s $S_0^dD_0$ úhel α, t. j. rovnoběžku s t_1 a opišme z S_0^d kružnici k_1 dotýkající se t. Této kružnice se musí $D_0E_0F_0$ ve své výsledné poloze taktéž dotýkati. Jest tedy $D_0E_0F_0$ ve své žádané poloze společnou tečnou kružnic l^ν a k_1. Označíme-li tuto polohu $D_0'E_0'F_0'$ (společná vnější tečna

Obr. 4.



kružnic k_1 a l^ν), musí býti úhly $\sphericalangle D_0'S_0^dD_0$, $\sphericalangle E_0'S_0^eE_0$ a $\sphericalangle F_0'OF_0$ navzájem si rovné. Tato poloha odpovídá vrcholu C' na l, při čemž je $\sphericalangle C'OC$ roven taktéž těmto třem úhlům. — Dle uvedeného možno tedy sestrojiti kuželosečku o daném poměru os jdoucí reálnými body A, B, D, E vedle způsobu popsaného v prvém článku (str. D 73, ročník 74) též takto: Sestrojíme libovolnou kružnici l jdoucí body A, B; sestrojme dále kružnice d_0, e_0, o středech S_0^d, S_0^e a určeme na D_0E_0 bod F_0. Ovšem, že jsme k tomu zvolili na l vrchol C a sestrojili soustřednou kružnici l^ν s l. Z F_0 veďme tečnu k l^ν, s ní rovnoběžku bodem D_0 a její dotyčnou kružnici k_1. Společná tečna $D_0'E_0'F_0'$ kružnic k_1, l^ν je obrazem žádané kuželosečky. Určíme úhel otočení $D_0S_0^dD_0'$ a v témže smyslu o týž úhel otočíme C do C'. Kuželosečka je tak dána body A, B, C', D, E. Ke kružnicím k_1, l^ν je možna ještě druhá vnější společná tečna s prvou dle středné symetrická. Tato druhá tečna, jak lze jednoduchou úvahou dokázati, je obrazem téže kuželosečky jako prvá. — Budiž ještě podotknuto, že ke kružnicím k_1, l^v lze vésti též vnitřní tečnu, tato však nevyhovuje. Úhly otáčení na kružnicích nejsou stejné, dělící poměr bodů D_0, E_0, F_0 se změnil a zjistíme, že nelze z počáteční polohy $D_0E_0F_0$ docíliti polohy takové, aby byla vnitřní tečnou kružnic.

Konečně připomeňme, že z bodu F_0 lze ku l^v vésti ještě druhou tečnu t_2, z níž obdobným způsobem obdržíme kružnici k_2 o středu S_0^d. V tomto případě vyhovuje vnitřní tečna kružnic k_2, l^v (obr. 4). Aby řešení bylo reálné, je nutné, aby poloměr $r^v < \overline{OF_0}$.

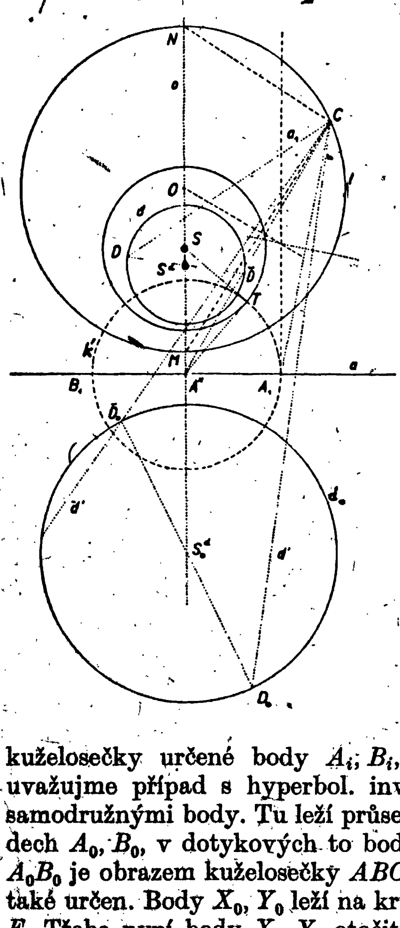
5. Uveďme ještě známé konstrukce vztahující se na imaginární body, jichž budeme v dalším potřebovati.

Buď dána na přímce a bodová involuce eliptická svým středem A^* a párem sdružených bodů A_1, B_1 souměrných dle A^* (obr. 5). Chceme sestrojiti kružnici, jež protíná a v imag. samodružných bodech A_i, B_i této eliptické involuce. Opišme nad průměrem A_1B_1 kružnici k'; tečna k ní, dotýkající se jí v libovolném bodě T, protne kolmici o (v A^* ku a vztyčenou) v bodě S. Žádaná kružnice má střed v bodě S, $\overline{ST}$ je její poloměr a má s a společné body A_i, B_i. Všechny takovéto kružnice, které protínají přímku a v bodech A_i, B_i, tvoří svazek. Hledáme-li v tomto svazku kružnici l, jež jde daným bodem C, vztyčíme v A_1 kolmici a_1 ku a, kterou přetneme osou úsečky $\overline{A_1C}$. Průsečík je středem pomocné kružnice, jež se dotýká a v A_1 a jde bodem C. Kolmice z tohoto průsečíku k A^*C protne o ve středu O žádané kružnice l procházející body A_i, B_i, C. — Považujme trojúhelník A_iB_iC za základní a ukažme ještě, jak se dle něho určí isog. obraz D_0 bodu D. Jsou-li M, N průsečíky kolmice o s kružnicí l, jsou CM, CN osami úhlu základního trojúhelníka při C. Leží proto D_0 na přímce d' souměrně sdružené s CD dle osy CM. Stanovme na o střed S^d kružnice d jdoucí body D, A_i, B_i. Její obraz je kružnice d_0 o středu S_0^d na o, při čemž je $(MNS^dS_0^d) = -1$. Poloměr kružnice d_0 je roven délce tečny z S_0^d ku k' vedené. Kružnice d_0 protíná d' ve dvou bodech, z nichž jeden je obrazem D_0. Abychom zjistili, který z nich to je, volme na d bod $\overline{D}$ diametrálný k D a ku přímce $\overline{D}C$ sestrojme souměrnou $\overline{d'}$ dle CM. Přímka $\overline{d'}$ protne d_0 též ve dvou bodech. Jeden z průsečíků na d' a druhý na $\overline{d'}$ musí ležeti k sobě na d_0 diametrálně a to jsou tedy obrazy D_0 a $\overline{D}_0$.

6. Přistupme k vlastním úlohám a řešme nejprve případ, kdy *dány jsou dva imaginární body A_i, B_i, dva reálné D, E a poměr os v.* Body A_iB_i jsou určeny na přímce a středem el. involuce A^* a párem sdružených symetr. bodů A_1, B_1. *První způsob.* Považujme A_iB_iD za základní trojúhelník a opišme mu kružnici l, řídíce se pokyny předešlého odstavce. Současně opišme i soustřednou kružnici l^v. K bodu E nalezněme E_0. Tečny

z E_0 k l^v vedené k_0, k_0' jsou isog. obrazy dvou výsledných kuželoseček. K úběžnému bodu U_0 obrazu k_0 sestrojme na l bod U. Máme tak 3 reálné body kuželosečky, směr os (viz str. D 77, ročník 74), jejich poměr a můžeme ji tedy sestrojiti.

Obr. 5.



Druhý způsob. Sestrojíme kružnici l jdoucí body A_i, B_i a s ní soustřednou l^v. Na l zvolíme bod C jako třetí vrchol zákl. trojúhelníka A_iB_iC a k bodům D, E stanovíme jejich obrazy D_0, E_0, jež leží na kružnicích d_0, e_0. Body D_0, E_0 otočme o potřebný úhel tak, že spojnice D_0E_0 se dotkne l^v (odst. 4). O tento úhel otočíme i C ve stejném smyslu a obdržíme C' na l jako třetí reálný bod kuželosečky.

Třetí způsob. Veďme body D, E libovolnou kružnici l a soustřednou s ní l^v. Zvolme na l bod C. Na přímce a volme v dané involuci dva páry sdružených bodů ${}^1A$, ${}^1B$ a ${}^2A$, ${}^2B$ a sestrojme k nim dle zákl. trojúhelníka DEC obrazy ${}^1A_0$, ${}^1B_0$, ${}^2A_0$, ${}^2B_0$. Tyto obrazy leží na kuželosečce a_0, která je isog. obrazem přímky a, a tvoří na ní křivou involuci. Průsečík Z_0 přímek ${}^1A_0{}^1B_0$, ${}^2A_0{}^2B_0$ leží uvnitř kuželosečky, průsečík X_0 přímek ${}^1A_0{}^2A_0$, ${}^1B_0{}^2B_0$ a průsečík Y_0 přímek ${}^2A_0{}^1B_0$, ${}^1A_0{}^2B_0$ leží vně a jejich spojnice X_0Y_0 je polárou bodu Z_0 vzhledem k a_0 a současně i obrazem kuželosečky určené body A_i; B_i, C, D, E. K snadnějšímu pochopení uvažujme případ s hyperbol. involucí, v níž body A, B jsou jejími samodružnými body. Tu leží průsečík Z_0 vně a_0 a X_0, Y_0 protíná ji v bodech A_0, B_0, v dotykových to bodech tečen vedených ze Z_0 k a_0. Avšak A_0B_0 je obrazem kuželosečky $ABCDE$ a proto body X_0, Y_0 je její obraz také určen. Body X_0, Y_0 leží na kružnicích x_0, y_0, jež procházejí body D, E. Třeba nyní body X_0, Y_0 otočiti na nich tak, aby X_0Y_0 byla tečnou kružnice l^v. O tento úhel otočí se i vrchol C do C' který je bodem žádané, kuželosečky.

7. *Sestrojení kuželosečky o daném v, jsou-li všechny 4 body A_i, B_i, D_i, E_i imaginární.*

Body A_i, B_i buďtež dány na přímce a eliptickou invólucí určenou středem A^* a párem sdružených symetrických bodů A_i, B_i; body D_i, E_i

na přímce d involucí o středu D^* a páru sdruž. symetrických bodů D_1, E_1. Sestrojme kružnici l jdoucí body A_i, B_i, jak bylo ukázáno v odst. 5 a soustřednou kružnici l^v. Na d zvolme dva páry sdružených bodů ${}^1D$, ${}^1E$ a ${}^2D$, ${}^2E$ a na l vrchol C. Sestrojme dle základního trojúhelníka A_iB_iC obrazy ${}^1D_0$, ${}^1E_0$, ${}^2D_0$, ${}^2E_0$. Jako ve 3. způsobu předešlé úlohy i zde máme průsečík X_0 přímek ${}^1E_0{}^2E_0$, ${}^2D_0{}^1D_0$ a průsečík Y_0 přímek ${}^1E_0{}^2D_0$, ${}^2E_0{}^1D_0$, které určují obraz kuželosečky $A_iB_iCD_iE_i$. Tyto průsečíky třeba pootočiti na příslušných kružnicích x_0, y_0 tak, aby jejich spojnice se dotkla kružnice l^v. O stejný úhel otočíme v témže smyslu i C do C', který je prvním reálným bodem žádané kuželosečky. K úběžnému bodu U_0 pootočení přímky X_0Y_0 vyhledáme snadno na l bod U jako druhý bod kuželosečky. Diametrálný bod $\overline{U}$ má svůj obraz $\overline{U}_0$ v dotyčném bodě pootočené X_0Y_0 s l^v a vyhledáme způsobem dříve popsaným $\overline{U}$. Máme tak průměr $U\overline{U}$ a určíme střed kuželosečky. Směr os stanovíme též dle dřívějšího, čímž je kuželosečka reálnými prvky dostatečně určena.

Construction de la conique passant par quatre points imaginaires et semblable a une conique donnée. Suite d'un autre article, publié dans ce journal, *74* (1949), pp. D 73—D 80. Les points imaginaires A_i, B_i; D_i, E_i sont donnés par deux involutions elliptiques sur deux droites. On construit le cercle l quelconque qui passe par les points A_i, B_i et on choisit convenablement un point C sur le cercle l. Ce point C forme avec les points A_i, B_i le triangle fondamental de la *conjugation isogonale*. A l'aide de cette transformation quadratique, qui fait correspondre à la conique cherchée une droite, l'auteur construit cette conique.

O KONSTRUKCI PARABOLY, JSOU-LI DÁNY JEJÍ TEČNY A NORMÁLA.

BOŘIVOJ KEPR, Praha.

Dříve nežli přistoupíme k řešení úlohy uvedené v nadpise, proveďme tuto přípravnou úvahu:

Buďtež dány tečny t_1, t_2, t_3, t_4, určující osnovu $o(t_1t_2t_3t_4)$ kuželoseček. Ze šesti průsečíků, jež poskytují tyto přímky, vytkněme body $A_{1,2} \equiv (t_1t_2)$, $A_{1,3} \equiv (t_1t_3)$, $A_{1,4} \equiv (t_1t_4)$, $A_{2,3} \equiv (t_2t_3)$. Svazek přímek v bodě $A_{1,2}$, resp. $A_{1,4}$ označíme pro stručnost také $A_{1,2}$, resp. $A_{1,4}$. Zvolme nyní třeba na tečně t_4 bod $M \neq A_{i,4}$, kde $A_{i,4} \equiv (t_it_4)$, $i = 1, 2, 3$. Bod M budiž vrcholem svazku přímek označeného také (pro stručnost) M (viz obr. 1).

Platí nyní věta: Geometrickým místem bodů dotyku kuželoseček osnovy $o(t_i)$ na jednotlivých paprscích (jakožto tečnách) svazku M je kuželosečka k, procházející body $A_{1,2}$, $A_{1,3}$, $A_{2,3}$, M a dotýkající se tečny t_4 v bodě M.