Miloš Neubauer

Úvod do transfinitní aritmetiky

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 67 (1938), No. Suppl., D101--D120

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/120815

ČLÁNKY A REFERÁTY.

Úvod do transfinitní aritmetiky.*)

Miloš Neubauer, Brno.

Budu užívat pojmů, znaků a názvů, zavedených v prvých čtyřech paragrafech spisu *E. Čech, Bodové množiny*, část první (Praha, 1936, JČMF), bez citace; zrovna tak budu užívat vět obsažených v těch paragrafech a připojených cvičeních.[1])

Velká latinská písmena kromě F budou značit množiny. Je-li a věc, pak $\{a\}$ bude značit množinu obsahující jediný prvek a to a. Jsou-li a, b různé věci, pak $\{a, b\}$ čili $\{b, a\}$ bude značit množinu sestávající z prvků a, b. Je-li a věc, pak

$$a \text{ non } \epsilon A$$

bude značit, že není $a \epsilon A$. Písmeno N bude značit množinu všech celých čísel ≥ 0. Písmena m, n, p, q budou značit prvky z N. Pro $n \epsilon N$ kladu $W(n) = \underset{p}{\mathrm{E}} [p < n]$; tedy $W(0) = \emptyset$. Znak

$$\sum_{z \epsilon C} A_z \text{ resp. } \prod_{z \epsilon C} A_z \tag{1}$$

značí totéž co znak $\sum_{z \epsilon C} A(z)$ resp. $\prod_{z \epsilon C} A(z)$ zavedený Čechem l. c. str. 6. Znak $\sum_{n=0}^{\infty} A_n$ resp. $\prod_{n=0}^{\infty} A_n$ značí (1) pro $C = N$.

K pojmu zobrazení připomínám toto: 1. Je-li $A \neq \emptyset \neq B$ a přiřadí-li se každému $x \epsilon A$ přesně jeden $f(x) \epsilon B$, pak množina všech párů $(x, f(x))$, kde $x \epsilon A$, je zobrazení množiny A do B; toto zobrazení budu značit f. To není ve sporu s definicí znaku $f(x)$ u Čecha l. c. str. 8. 2. $\emptyset$ je jediné zobrazení množiny $\emptyset$ do libovolné množiny a neexistuje zobrazení neprázdné množiny do $\emptyset$. 3. Je-li f

*) V topologickém semináři jsme potřebovali různých pojmů a vět z transfinitní aritmetiky v rozsahu větším, než kam sahá V. Jarníkův výklad v jeho *Úvodu do teorie množství* (dodatek ke K. Petrovu *Počtu integrálnímu*). Proto jsem požádal M. Neubauera, aby stručný výklad o těchto věcech nejprve ústně přednesl a pak (v poněkud změněné formě) v Časopise publikoval. Čtenář začátečník učiní dobře, když si před četbou tohoto článku přečte znovu citovanou stať Jarníkovu. *Čech.*

[1]) Dokonce stačí znalost prvých čtrnácti stran tohoto Čechova spisu.

prosté zobrazení množiny A do nějaké množiny a je-li $M \subset A$, pak parciální zobrazení f_M je prosté zobrazení množiny M na $f(M)$. 4. Je-li f prosté zobrazení množiny A na B, pak $f(f_{-1}(y)) = y$ pro $y \in B$.

K pojmu uspořádání připomínám: Každá část dobře uspořádané množiny je dobře uspořádána.

1. Kartézský součin a mocnina. Je-li $C \neq \emptyset$ a A_z množina pro $z \in C$, pak

$$\mathfrak{P}_{z \in C} A_z \tag{2}$$

(čti: *kartézský součin* množin A_z) značí množinu všech zobrazen množiny C do $\sum_{z \in C} A_z$ takových, že $f(z) \in A_z$ pro $z \in C$. Znak $\mathfrak{P}_{n=0}^{\infty} A_n$ resp. $A_0 * A_1$ čili $A_1 * A_0$ značí (2) pro $C = N$ resp. $C = \{0, 1\}$.

Koroláry. $A_z \subset B_z$ pro $z \in C \Rightarrow \mathfrak{P}_{z \in C} A_z \subset \mathfrak{P}_{z \in C} B_z$. $A_z \neq \emptyset$ pro $z \in C \Leftrightarrow \mathfrak{P}_{z \in C} A_z \neq \emptyset$.

B^A (čti: *mocnina* A množiny B) značí množinu všech zobrazení množiny A do B.

Koroláry. $A_z = A$ pro $z \in C \Rightarrow \mathfrak{P}_{z \in C} A_z = A^C$. $B^{\emptyset} = \{\emptyset\}$. $\emptyset^A = \emptyset \Leftrightarrow A \neq \emptyset$. $\{b\}^A$ sestává z jediného prvku.

2. Ekvivalence. $A \sim B$ (čti: A *ekvivalentní s* B) značí, že existuje prosté zobrazení množiny A na B.

Kolorály. $A \sim A$. $A \sim B \Rightarrow B \sim A$. $A \sim B \sim C$ (t. j. $A \sim B$, $B \sim C$) $\Rightarrow A \sim C$. $\emptyset \sim A \Leftrightarrow A = \emptyset$. Je-li A konečná a $A \sim B$, pak B je konečná. $\{a\} \times B \sim B \sim B \times \{a\}$. Je-li $B_z = \{z\} \times A_z$ pro $z \in C$, pak $A_z \sim B_z$ pro $z \in C$ a součet $\sum_{z \in C} B_z$ je disjunktní.

2·1. *Mají-li* $A = \sum_{z \in C} A_z$, $B = \sum_{z \in C} B_z$ *disjunktní sčitance a je-li* $A_z \sim B_z$ *pro* $z \in C$, *pak* $A \sim B$.

Důkaz. Stačí předpokládat $A \neq \emptyset$, neboť $A = \emptyset \Rightarrow A_z = B_z = \emptyset$ pro $z \in C \Rightarrow B = \emptyset$. Pro $z \in C$ budiž f_z prosté zobrazení množiny A_z na B_z. Pro $x \in A$ budiž $x \in A_{z_x}$. Položím-li $f(x) = f_{z_x}(x)$ pro $x \in A$, zřejmě f je prosté zobrazení množiny A na B.

2·2. $A_z \sim B_z$ *pro* $z \in C \Rightarrow \mathfrak{P}_{z \in C} A_z \sim \mathfrak{P}_{z \in C} B_z$.

Důkaz. Budiž $A = \mathfrak{P}_{z \in C} A_z$, $B = \mathfrak{P}_{z \in C} B_z$. Stačí předpokládat $A \neq \emptyset$, neboť $A = \emptyset \Rightarrow B = \emptyset$. Pro $z \in C$ budiž f_z prosté zobrazení množiny A_z na B_z.[2]) Položím-li pro $(a, z) \in A \times C$ $a'(z) = f_z(a(z))$,

[2]) Konec důkazu provedu podrobně. Detaily důkazů vět **2·3** až **2·7** jsou obdobné. Mám dokázat $A \sim B$, t. j. mám udat prosté zobrazení mno-

zřejmě $a' \in B$. Položím-li $f(a) = a'$ pro $a \in A$, zřejmě f je prosté zobrazení množiny A na B.

2·3. $A \times B \sim A * B$.

Důkaz. $A \neq \emptyset \neq B \Leftrightarrow A \times B \neq \emptyset$. Tedy stačí předpokládat $A \neq \emptyset \neq B$. Položím-li $f((x, y)) = \{(0, x), (1, y)\}$ pro $(x, y) \in A \times B$, zřejmě f je prosté zobrazení množiny $A \times B$ na $A * B$.

2·4. *Má-li* $S = \sum_{z \in C} A_z$ *disjunktní sčítance a je-li* $A_z \sim A$ *pro* $z \in C$, *pak* $S \sim C * A$.

Důkaz. Podle **2·3** stačí dokázat $S \sim C \times A$. Stačí předpokládat $S \neq \emptyset$. Pro $z \in C$ budiž f_z prosté zobrazení množiny A_z na A. Pro $x \in S$ budiž $x \in A_{z_x}$. Položím-li $f(x) = (z_x, f_{z_x}(x))$ pro $x \in S$, zřejmě f je prosté zobrazení množiny S na $C \times A$.

2·5. $A \sim A_1$, $B \sim B_1 \Rightarrow B^A \sim B_1^{A_1}$.

Důkaz. Stačí předpokládat $A \neq \emptyset \neq B$. Budiž φ resp. ψ prosté zobrazení množiny A na A_1 resp. B na B_1. Položím-li pro $f \in B^A$ a $x \in A_1$ $f'(x) = \psi(f(\varphi_{-1}(x)))$, zřejmě $f' \in B_1^{A_1}$. Položím-li $F(f) = f'$ pro $f \in B^A$, zřejmě F je prosté zobrazení množiny B^A na $B_1^{A_1}$.

2·6. $AB = \emptyset \Rightarrow C^A * C^B \sim C^{A+B}$.

Důkaz. Podle **2·3** stačí dokázat $C^A \times C^B \sim C^{A+B}$. Stačí předpokládat, že A, B, C jsou neprázdné. Položím-li pro $f = (f_1, f_2) \in$

žiny A na B, t. j. mám každému $a \in A$ přiřadit přesně jeden $f(a) \in B$ tak, že
(†) $a_1 \in A$, $a_2 \in A$, $a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$,
(††) pro $b \in B$ je $f(a) = b$ při vhodném $a \in A$.
(Co mate, je, že prvky množin A, B samy jsou zobrazeními.)

Budiž tedy $a \in A$ (tedy a je takové zobrazení množiny C do $\sum_{z \in C} A_z$, že pro $z \in C$ je $a(z) \in A_z$). Ježto pro $z \in C$ jednak $a(z) \in A_z$, jednak f_z je zobrazení množiny A_z do B_z, je $f_z(a(z)) \in B_z$ pro $z \in C$. Přiřadím-li tedy každému $z \in C$ věc $f_z(a(z))$, je definováno zobrazení množiny C do $\sum_{z \in C} B_z$ takové, že pro $z \in C$ věc přiřazená prvku z je v B_z, t. j. je definován prvek z B. Tento prvek z B přiřadím nyní prvku $a \in A$, od něhož jsem vyšel, označím jej $f(a)$ a tvrdím, že takto sestrojené zobrazení f množiny A do B má vlastnosti (†) a (††).

Budiž tedy *předně* $a_1 \in A$, $a_2 \in A$, $a_1 \neq a_2$. Tedy při vhodném $z \in C$ je $a_1(z) \neq a_2(z)$, tedy, ježto f_z je *prosté*, je $f_z(a_1(z)) \neq f_z(a_2(z))$, tedy je $f(a_1) \neq f(a_2)$. Tedy platí (†).

Budiž *za druhé* $b \in B$. Pro $z \in C$ je f_z zobrazení množiny A_z *na* B_z, takže podle $b(z) \in B_z$ při vhodném (dokonce, ježto f_z je také prosté, při přesně jednom — ale na tom tu nezáleží —) $a(z) \in A_z$ je $f_z(a(z)) = b(z)$. Zvolím-li tedy pro $z \in C$ takový vhodný prvek $a(z) \in A_z$, je definován prvek $a \in A$. A tohoto prvku obrazem při zobrazení f je vskutku prvek $b \in B$, od něhož jsem vyšel. Tedy platí (††).

$\epsilon\, C^A \times C^B$ při $x \in A$ $f'(x) = f_1(x)$ a při $y \in B$ $f'(y) = f_2(y)$, zřejmě $f' \in C^{A+B}$. Položím-li $F(f) = f'$ pro $f \in C^A \times C^B$, zřejmě F je prosté zobrazení množiny $C^A \times C^B$ na C^{A+B}.

2·7. $(A^B)^C \sim A^{B*C}$.

Důkaz. Podle **2·3** a **2·5** stačí dokázat $(A^B)^C \sim A^{B\times C}$. Stačí předpokládat, že A, B, C jsou neprázdné. Pro $f \in (A^B)^C$ a $z \in C$ položím $f_z = f(z)$. Položím-li pak $f'((y, z)) = f_z(y)$ pro $f \in (A^B)^C$ a $(y, z) \in B \times C$, zřejmě $f' \in A^{B\times C}$. Položím-li $F(f) = f'$ pro $f \in (A^B)^C$, zřejmě F je prosté zobrazení množiny $(A^B)^C$ na $A^{B\times C}$.

2·8. *Má-li* $\sum_{z\in C} B_z$ *disjunktní sčítance a je-li* $A_z \sim B_z$ *pro* $z \in C$, *pak při vhodné* M *je* $\sum_{z\in C} A_z \sim M \subset \sum_{z\in C} B_z$.

Důkaz. Položím-li $A = \sum_{z\in C} A_z$, stačí předpokládat $A \neq \emptyset$. Pro $z \in C$ budiž f_z prosté zobrazení množiny A_z na B_z. Pro $x \in A$ je $x \in A_{z_x}$ při vhodném $z_x \in C$. Položím-li $f(x) = f_{z_x}(x)$ pro $x \in A$, zřejmě f je prostým zobrazením množiny A do $\sum_{z\in C} B_z$. Tedy stačí volit $M = f(A)$.

2·9. *Je-li* $\mathfrak{A}$ *systém všech částí množiny* A, *pak platí*:

1. $\{0, 1\}^A \sim \mathfrak{A}$;
2. *při vhodném* $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$ *je* $A \sim \mathfrak{B}$;
3. *není* $A \sim \mathfrak{A}$.

Důkaz. Stačí předpokládat $A \neq \emptyset$.

1. Položím-li pro $f \in \{0, 1\}^A$ $F(f) = \mathop{\mathrm{E}}_x [x \in A, f(x) = 1]$, zřejmě F je prosté zobrazení množiny $\{0, 1\}^A$ na $\mathfrak{A}$.

2. Stačí za $\mathfrak{B}$ zvolit systém všech $\{x\}$, kde $x \in A$.

3. Nechť existuje prosté zobrazení f množiny A na $\mathfrak{A}$. Budiž $B = A - \sum_{x\in A} \{x\}\, f(x)$ a $x_0 = f_{-1}(B)$. Pak není ani $x_0 \in B$, neboť

$$x_0 \in B \Rightarrow x_0 \text{ non} \in \{x_0\}\, f(x_0) = \{x_0\}\, B = \{x_0\},$$

ani x_0 non $\in B$, neboť

$$x_0 \text{ non} \in B \Rightarrow x_0 \in \sum_{x\in A} \{x\}\, f(x) \Rightarrow x_0 \in \{x_0\}\, f(x_0) = \{x_0\}\, B \subset B;$$

to je spor.

2·10. *Je-li* $\mathfrak{A}$ *systém všech konečných částí množiny* A, *sestávajících z* n *prvků, pak při vhodné* M *je* $\mathfrak{A} \sim M \subset A^{W(n)}$.

Důkaz. Stačí předpokládat $\mathfrak{A} \neq \emptyset$. Pro $X \in \mathfrak{A}$ podle $W(n) \sim X$ budiž $F(X)$ prosté zobrazení množiny $W(n)$ na X. Tvrdím, že F je prosté zobrazení množiny $\mathfrak{A}$ do $A^{W(n)}$. Budiž totiž $X' \in \mathfrak{A}$, $X'' \in \mathfrak{A}$, $F(X') = F(X'')$. Nechť $X' \neq X''$. Stačí předpokládat, že při vhodném $x_0 \in A$ je $x_0 \in X'' - X'$. Položím-li $F(X') = f'$, $F(X'') = f''$,

$f''_{-1}(x_0) = p$, je $p < n$ a tedy $f'(p) \in X'$. Ale $f'(p) = f''(p) = x_0$ non $\in$ $\in X'$. Stačí tedy volit $M = F(\mathfrak{A})$.

3. Kardinální čísla. Znak moh A (čti: *mohutnost* množiny A) značí: 1. při konečné A počet prvků množiny A; 2. při nekonečné A takovou věc různou od všech n, že pro nekonečné X, Y je moh $X =$ $=$ moh $Y \Leftrightarrow X \sim Y$.

Korolár. moh $A =$ moh $B \Leftrightarrow A \sim B$.

Věc tvaru moh A se nazývá *kardinální číslo*, a to *konečné* nebo *transfinitní* podle toho, zda A je konečná či nekonečná. Malá švabachová písmena budou značit kardinální čísla.

Budiž $C \neq \emptyset$ a $\mathfrak{a}_z$ kardinální číslo pro $z \in C$. Pak

$$\sum_{z \in C} \mathfrak{a}_z \tag{3}$$

(čti: *součet* kardinálních čísel $\mathfrak{a}_z$) resp.

$$\prod_{z \in C} \mathfrak{a}_z \tag{4}$$

(čti: *součin* kardinálních čísel $\mathfrak{a}_z$) značí mohutnost disjunktního součtu $\sum\limits_{z \in C} A_z$ resp. kartézského součinu $\mathfrak{P}\limits_{z \in C} A_z$, kde moh $A_z = \mathfrak{a}_z$ pro $z \in C$. Oprávnění k definici znaku (3) resp. (4) dává **2·1** resp. **2·2**. Pro $C = N$ místo (3) resp. (4) se píše $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \mathfrak{a}_n$ resp. $\prod\limits_{n=0}^{\infty} \mathfrak{a}_n$. Pro $C =$ $= \{0, 1\}$ místo (3) resp. (4) se píše $\mathfrak{a}_0 + \mathfrak{a}_1$ čili $\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_0$ resp. $\mathfrak{a}_0\mathfrak{a}_1$ čili $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_0$. Znaky $\mathfrak{a}_0 + \mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_0\mathfrak{a}_1$ nejsou ve sporu s aritmetikou v N při konečných $\mathfrak{a}_0$, $\mathfrak{a}_1$.

Koroláry. $\mathfrak{a} + 0 = \mathfrak{a}$; $\mathfrak{a}1 = \mathfrak{a}$; $\mathfrak{a}_z \neq 0$ pro $z \in C \Leftrightarrow \prod\limits_{z \in C} \mathfrak{a}_z \neq 0$.

3·1. $\mathfrak{a}_z = \mathfrak{a}$ *pro* $z \in C \Rightarrow \sum\limits_{z \in C} \mathfrak{a}_z = (\text{moh } C)\, \mathfrak{a}$.

Důkaz. **2·4.**

Korolár. $\mathfrak{a} + \mathfrak{a} = 2\mathfrak{a}$.

$\mathfrak{b}^{\mathfrak{a}}$ (čti: *mocnina* $\mathfrak{a}$ kardinálního čísla $\mathfrak{b}$) značí mohutnost mocniny B^A, kde moh $A = \mathfrak{a}$, moh $B = \mathfrak{b}$. Oprávnění k této definici dává **2·5.** Znak $\mathfrak{b}^{\mathfrak{a}}$ není ve sporu s aritmetikou v N při konečných $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$.

Koroláry. $\mathfrak{b}^0 = 1$; $0^{\mathfrak{a}} = 0 \Leftrightarrow \mathfrak{a} \neq 0$; $1^{\mathfrak{a}} = 1$; $\mathfrak{b}^1 = \mathfrak{b}$; $\mathfrak{a}_z = \mathfrak{a}$ pro $z \in C \Rightarrow \prod\limits_{z \in C} \mathfrak{a}_z = \mathfrak{a}^{\text{moh } C}$.

3·2. $\mathfrak{c}^{\mathfrak{a}}\, \mathfrak{c}^{\mathfrak{b}} = \mathfrak{c}^{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}}$.

Důkaz. **2·6.**

Korolár. $\mathfrak{a}^{n+1} = \mathfrak{a}^n \mathfrak{a}$.

3·3. $(\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}})^{\mathfrak{c}} = \mathfrak{a}^{\mathfrak{b}\mathfrak{c}}$.

Důkaz. **2·7.**

$\mathfrak{a} < \mathfrak{b}$ (čti: $\mathfrak{a}$ *menší než* $\mathfrak{b}$) čili $\mathfrak{b} > \mathfrak{a}$ (čti: $\mathfrak{b}$ *větší než* $\mathfrak{a}$) značí: 1. $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{b}$; 2. při vhodných A, B je moh $A = \mathfrak{a}$, moh $B = \mathfrak{b}$, $A \subset B$.

$\mathfrak{a} \leqq \mathfrak{b}$ čili $\mathfrak{b} \geqq \mathfrak{a}$ značí, že je buď $\mathfrak{a} < \mathfrak{b}$ nebo $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$. Tyto definice nejsou ve sporu s aritmetikou v N při konečných $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$.

Koroláry. $\mathfrak{a} \neq 0 \Leftrightarrow \mathfrak{a} > 0$. $A \subset B \Rightarrow \text{moh}\, A \leqq \text{moh}\, B$. $n \in N \Rightarrow n < \text{moh}\, N$. Je-li $\mathfrak{a} \leqq \mathfrak{b}$, pak při vhodných A, B je $\text{moh}\, A = \mathfrak{a}$, $\text{moh}\, B = \mathfrak{b}$, $A \subset B$. $\mathfrak{a}_z \leqq \mathfrak{b}_z$ pro $z \in C \Rightarrow \sum_{z \in C} \mathfrak{a}_z \leqq \sum_{z \in C} \mathfrak{b}_z$, $\prod_{z \in C} \mathfrak{a}_z \leqq \prod_{z \in C} \mathfrak{b}_z$. $\mathfrak{a} \leqq \mathfrak{b} \Rightarrow \mathfrak{a}^{\mathfrak{c}} \leqq \mathfrak{b}^{\mathfrak{c}}$.

3·4. *Je-li* $\mathfrak{a} \leqq \mathfrak{b} \leqq \mathfrak{c}$, *pak při vhodných* A, B, C *je* $\text{moh}\, A = \mathfrak{a}$, $\text{moh}\, B = \mathfrak{b}$, $\text{moh}\, C = \mathfrak{c}$, $A \subset B \subset C$.

Důkaz. Při vhodných A', B', B, C je $\text{moh}\, A' = \mathfrak{a}$, $\text{moh}\, B' = \text{moh}\, B = \mathfrak{b}$, $\text{moh}\, C = \mathfrak{c}$, $A' \subset B'$, $B \subset C$. Podle $B' \sim B$ existuje prosté zobrazení f množiny B' na B. Položím-li tedy $A = f(A')$, je $A' \sim A \subset B$ a $\text{moh}\, A = \mathfrak{a}$.

Koroláry. $\mathfrak{a} \leqq \mathfrak{b} \leqq \mathfrak{c} \Rightarrow \mathfrak{a} \leqq \mathfrak{c}$. $1 \leqq m < n \leqq \mathfrak{a} \Rightarrow \mathfrak{a} \leqq m + \mathfrak{a} \leqq \mathfrak{a} + \mathfrak{a} \leqq n\mathfrak{a} \leqq \mathfrak{a}\mathfrak{a}$.

3·5. $\text{moh} \sum_{z \in C} A_z \leqq \sum_{z \in C} \text{moh}\, A_z$.

Důkaz. Pro $z \in C$ při vhodné B_z je $A_z \sim B_z$ a součet $\sum_{z \in C} B_z$ je disjunktní. Podle **2·8** je tedy

$$\text{moh} \sum_{z \in C} A_z \leqq \text{moh} \sum_{z \in C} B_z = \sum_{z \in C} \text{moh}\, B_z = \sum_{z \in C} \text{moh}\, A_z.$$

3·6. $\mathfrak{a} < 2^{\mathfrak{a}}$.

Důkaz. Při vhodné A je $\text{moh}\, A = \mathfrak{a}$, tedy podle **2·9** $\mathfrak{a} \leqq 2^{\mathfrak{a}}$, $\mathfrak{a} \neq 2^{\mathfrak{a}}$, tedy $\mathfrak{a} < 2^{\mathfrak{a}}$.

3·7. *Je-li* $\mathfrak{A}$ *systém všech konečných částí množiny* A, *pak* $\text{moh}\, \mathfrak{A} \leqq \sum_{n=0}^{\infty} (\text{moh}\, A)^n$.

Důkaz. Pro $n \in N$ budiž $\mathfrak{A}_n$ systém všech konečných částí množiny A, sestávajících z n prvků. Pak $\mathfrak{A} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{A}_n$, tedy podle **3·5** a **2·10**

$$\text{moh}\, \mathfrak{A} \leqq \sum_{n=0}^{\infty} \text{moh}\, \mathfrak{A}_n \leqq \sum_{n=0}^{\infty} (\text{moh}\, A)^n.$$

4. Pořadová čísla. Jsou-li A, B uspořádány, pak $A \cong B$ bude značit, že jsou podobně uspořádány.

Koroláry. $A \cong A$; $A \cong B \Rightarrow B \cong A$; $A \cong B \cong C$ (t. j. $A \cong B$, $B \cong C$) $\Rightarrow A \cong C$. Je-li A konečná resp. dobře uspořádaná resp. obsahuje poslední prvek a $A \cong B$, pak B je konečná resp. dobře uspořádaná resp. obsahuje poslední prvek.

Pro uspořádanou A znak typ A (čti: *pořadový typ* množiny A) značí: 1. při konečné A počet prvků množiny A; 2. při nekonečné A

takovou věc různou od všech n, že pro nekonečné uspořádané X, Y je $\text{typ}\, X = \text{typ}\, Y \Leftrightarrow X \simeq Y$.

Korolár. Pro uspořádané A, B je $\text{typ}\, A = \text{typ}\, B \Leftrightarrow A \simeq B$.

Věc tvaru $\text{typ}\, A$, kde A je dobře uspořádaná, se nazývá *pořadové číslo*, a to *konečné* nebo *transfinitní* podle toho, zda A je konečná či nekonečná. Malá řecká písmena budou značit pořadová čísla.

Korolár. Každé n je konečné pořadové číslo.

Je-li A uspořádaná a $x \in A$, pak $\underset{x}{A}$ (čti: *úsek* množiny A určený prvkem x) značí množinu všech těch prvků množiny A, které jsou před x.

Koroláry. Je-li $y \in \underset{x}{A}$, pak $\underset{y}{A}$ je úsek množiny $\underset{x}{A}$ určený prvkem y. Je-li $x \in A \simeq B$, pak při vhodném $y \in B$ je $\underset{x}{A} \simeq \underset{y}{B}$.

$\xi < \eta$ (čti: ξ *menší než* η) čili $\eta > \xi$ (čti: η *větší než* ξ) značí: při vhodných A a $x \in A$ je $\text{typ}\, A = \eta$ a $\text{typ}\, \underset{x}{A} = \xi$. $\xi \leqq \eta$ čili $\eta \geqq \xi$ značí, že je buď $\xi < \eta$ nebo $\xi = \eta$. Tyto definice nejsou ve sporu s aritmetikou v N při konečných ξ, η.

Koroláry. $\xi \neq 0 \Leftrightarrow \xi > 0$. Je-li $\xi < \text{typ}\, A$, pak $\xi = \text{typ}\, \underset{x}{A}$ při vhodném $x \in A$. ξ je konečné, když a jen když je menší než pořadový typ přirozeně uspořádané množiny N. $\xi < \eta < \zeta$ (t. j. $\xi < \eta$, $\eta < \zeta$) $\Rightarrow \xi < \zeta$; $\xi \leqq \eta < \zeta \Rightarrow \xi < \zeta$; $\xi < \eta \leqq \zeta \Rightarrow \xi < \zeta$; $\xi \leqq \eta \leqq \zeta \Rightarrow \xi \leqq \zeta$.

4·1. *Z tvrzení $\xi < \eta$, $\xi = \eta$, $\xi > \eta$ platí přesně jedno.*

Důkaz. Při vhodných A, B je $\text{typ}\, A = \xi$, $\text{typ}\, B = \eta$. Platí pak tato základní věta o dobře uspořádaných množinách A, B: Platí přesně jedno z tvrzení: 1. $A \simeq B$; 2. $A \simeq \underset{y}{B}$ při vhodném $y \in B$; 3. $B \simeq \underset{x}{A}$ při vhodném $x \in A$. Z této věty plyne věta **4·1**. Důkaz uvedené základní věty nalezne čtenář na str. 676—679 stati ***Úvod do teorie množství*** od ***V. Jarníka***, která tvoří dodatek spisu ***K. Petr, Počet integrální*** (2. vydání, Praha, 1931, JČMF).

Koroláry. $\xi < \eta \Leftrightarrow$ není: $\eta \leqq \xi$. $\xi \leqq \eta \leqq \xi \Rightarrow \xi = \eta$. Pro transfinitní ξ je pořadový typ přirozeně uspořádané množiny $N \leqq \xi$.

4·2. *K danému ξ existuje přesně jedno η těchto vlastností:* 1. $\xi < \eta$; 2. $\xi < \zeta \Rightarrow \eta \leqq \zeta$.

Důkaz. a) Nechť η_1, η_2 mají vlastnosti 1., 2. Podle vlastnosti 1. čísla η_1 je $\xi < \eta_1$, tedy podle vlastnosti 2. čísla η_2 je $\eta_2 \leqq \eta_1$. Tedy je $\eta_2 \leqq \eta_1 \leqq \eta_2$, $\eta_1 = \eta_2$. Tedy existuje nejvýš jedno pořadové číslo vlastností 1., 2.

b) Při vhodné A je $\text{typ}\, A = \xi$. Budiž a věc, která není v A, a $B = A + \{a\}$. Uspořádám-li B ustanovením, že a je poslední prvek v B, pak B je dobře uspořádaná a pro $x \in B$ je $B_x = A$ nebo $B_x = A_x$ podle toho, zda je či není $x = a$. Položím-li $\eta = \text{typ}\, B$, je tedy $\xi < \eta$ a $\zeta < \eta \Rightarrow \zeta \leqq \xi$; tedy $\xi < \zeta \Rightarrow \eta \leqq \zeta$.

$\xi + 1$ (čti: ξ *plus* 1) značí pořadové číslo η z věty **4·2.** Tento znak není ve sporu s aritmetikou v N při konečném ξ.

η se nazývá *isolované*, když buď $\eta = 0$ nebo $\eta = \xi + 1$ při vhodném ξ. η se nazývá *limitní*, když není isolované.

Koroláry. Každé n je isolované pořadové číslo. $\eta > 0$ je isolované, když a jen když je pořadovým typem dobře uspořádané množiny, ve které existuje poslední prvek. $\xi < \eta + 1 \Rightarrow \xi \leqq \eta$; $\xi < \eta < \zeta + 1 \Rightarrow \xi < \zeta$; $\xi < \eta \Rightarrow \xi + 1 < \eta + 1$.

4·3. *Budiž M množina pořadových čísel a budiž pro $(\xi, \eta) \in M \times M$ ξ před η, když a jen když $\xi < \eta$. Pak M je uspořádána tímto pravidlem.*

Důkaz. **4·1.**

Množina pořadových čísel se nazývá *přirozeně uspořádaná*, je-li uspořádána pravidlem z věty **4·3.** Tato definice není ve sporu s definicí přirozeného uspořádání množiny N. Mluví-li se o uspořádání množiny pořadových čísel bez dalšího dodatku, myslí se přirozené uspořádání.

Klade se $W(\alpha) = \underset{\xi}{\mathrm{E}} [\xi < \alpha]$; tento znak je ve shodě se znakem $W(n)$.

4·4. *$W(\alpha)$ je dobře uspořádána a* typ $W(\alpha) = \alpha$.

Důkaz. Při vhodné A je typ $A = \alpha$. Stačí předpokládat $A \neq \emptyset$. Pro $x \in A$ je typ $A_x < \alpha$. Položím-li tedy $f(x) = \text{typ}\, A_x$ pro $x \in A$, je f zobrazení množiny A do $W(\alpha)$. Zřejmě f je podobné zobrazení množiny A na $W(\alpha)$.

Korolár. $\alpha > 0$ je isolované, když a jen když existuje poslední prvek množiny $W(\alpha)$.

4·5. *V neprázdné množině pořadových čísel existuje první prvek.*

Důkaz. Budiž M neprázdná množina pořadových čísel a $\alpha \in M$. Není-li α prvním prvkem množiny M, pak $\emptyset \neq M\,W(\alpha) \subset W(\alpha)$, tedy podle **4·4** existuje první prvek množiny $M\,W(\alpha)$. Ten je zřejmě prvním v M.

Pro neprázdnou množinu M pořadových čísel značí min M (čti: *minimum* čili *nejmenší číslo* množiny M) první prvek množiny M; tato definice je ve shodě s označením obvyklým v aritmetice v N.

4·6. *Každá množina pořadových čísel je dobře uspořádána.*

Důkaz. **4·5.**

4·7. *Existuje-li zobrazení množiny $W(\xi)$ na A, pak množinu A lze dobře uspořádat.*

Důkaz. Stačí předpokládat $A \neq \emptyset$. Budiž f zobrazení množiny $W(\xi)$ na A. Jestliže pro $x \in A$ zvolím $g(x) \in W(\xi)$ tak, že $f(g(x)) = x$, pak g je prosté zobrazení množiny A do $W(\xi)$. Položím-li tedy $g(A) = M$, pak g je prosté zobrazení množiny A na M. Když pro $(x, y) \in A \times A$ stanovím, že je x před y, když a jen když $g(x) < < g(y)$, pak podle **4·6** A je dobře uspořádána tímto pravidlem.

4·8. *Budiž M taková množina pořadových čísel, že $\eta < \xi \in M \Rightarrow \Rightarrow \eta \in M$. Pak $M = W(\text{typ } M)$.*

Důkaz. Podle **4·6** je typ M pořadové číslo. Položím-li $\alpha = = \text{typ } M$, pak podle **4·4**, ježto $\xi \in M \Rightarrow M_\xi = W(\xi)$, je jednak $\xi \in M \Rightarrow \xi = \text{typ } W(\xi) = \text{typ } M_\xi < \alpha$, jednak $\xi < \alpha \Rightarrow \xi = \text{typ } M_\eta$ při vhodném $\eta \in M$, takže $\xi = \text{typ } W(\eta) = \eta \in M$.

5. Indukce. Teorém Zermelův.

5·1. (*Princip transfinitní indukce.*) *Budiž $\alpha > 0$ a budiž $\mathsf{V}(\zeta)$ výrok, který má smysl pro $\zeta < \alpha$ a který má tuto vlastnost: Je-li $\beta < \alpha$ a je-li $\mathsf{V}(\zeta)$ správný pro $\zeta < \beta$, pak $\mathsf{V}(\beta)$ je správný. Za těchto předpokladů je $\mathsf{V}(\zeta)$ správný pro $\zeta < \alpha$.*

Důkaz. Jinak, položím-li $M = \mathop{E}_{\zeta} [\zeta < \alpha, \mathsf{V}(\zeta) \text{ není správný}]$, je $M \neq \emptyset$. Položím-li tedy $\beta = \min M$, je $\beta < \alpha$, $\mathsf{V}(\beta)$ nesprávný a $\mathsf{V}(\zeta)$ správný pro $\zeta < \beta$. Tedy $\mathsf{V}(\beta)$ je správný. To je spor.

5·2. (*Princip obyčejné indukce.*) *Budiž $\mathsf{V}(p)$ výrok, který má smysl pro $p \in N$ a který má tuto vlastnost: Je-li $m \in N$ a je-li $\mathsf{V}(p)$ správný pro $p < m$, pak $\mathsf{V}(m)$ je správný. Za těchto předpokladů je $\mathsf{V}(p)$ správný pro $p \in N$.*

Důkaz. **5·1** při $\alpha = \text{typ } N$.

5·3.[3]) *Budiž $\gamma > 1$, $a \in P$, pro $0 < \xi < \gamma$ f_ξ zobrazení množiny $P^{W(\xi)}$ do P, $0 < \eta' \leq \eta'' < \gamma + 1$ a $\overset{\eta'}{\mathsf{g}}$ resp. $\overset{\eta''}{\mathsf{g}}$ zobrazení množiny $W(\eta')$ resp. $W(\eta'')$ do P těchto vlastností:* 1. $\overset{\eta'}{\mathsf{g}}(0) = \overset{\eta''}{\mathsf{g}}(0) = a$; 2. *pro $0 < \xi < \eta'$ je*[4])

$$\overset{\eta'}{\mathsf{g}}(\xi) = \mathsf{f}_\xi(\overset{\eta'}{\mathsf{g}}_{W(\xi)}), \quad \overset{\eta''}{\mathsf{g}}(\xi) = \mathsf{f}_\xi(\overset{\eta''}{\mathsf{g}}_{W(\xi)}).$$

Pak pro $\xi < \eta'$ je $\overset{\eta'}{\mathsf{g}}(\xi) = \overset{\eta''}{\mathsf{g}}(\xi)$.

Důkaz. Položím-li $\alpha = \eta'$ a $\mathsf{V}(\zeta) =$ „$\overset{\eta'}{\mathsf{g}}(\zeta) = \overset{\eta''}{\mathsf{g}}(\zeta)$“ pro $\zeta < \alpha$, pak podle **5·1** stačí dokázat: Je-li $\beta < \alpha$ a je-li $\mathsf{V}(\zeta)$ správný pro

---

[3]) Tato věta jė pomocnou větou pro důkaz věty **5·4**. S jejím studiem lze počkat, až se ukáže její potřeba v důkazu věty **5·4**.

[4]) Podle $\xi < \eta' \leq \eta''$ je $W(\xi) \subset W(\eta') \subset W(\eta'')$, takže $\overset{\eta'}{\mathsf{g}}_{W(\xi)}$ resp. $\overset{\eta''}{\mathsf{g}}_{W(\xi)}$ značí parciální zobrazení množiny $W(\xi)$ do P příslušné k zobrazení $\overset{\eta'}{\mathsf{g}}$ resp. $\overset{\eta''}{\mathsf{g}}$.

$\zeta < \beta$, pak $\mathsf{V}(\beta)$ je správný. Podle 1. stačí předpokládat $\beta > 0$. Pak podle 2. je

$$\overset{\eta'}{\mathfrak{g}}(\beta) = \mathfrak{f}_\beta(\overset{\eta'}{\mathfrak{g}}_{W(\beta)}), \quad \overset{\eta''}{\mathfrak{g}}(\beta) = \mathfrak{f}_\beta(\overset{\eta''}{\mathfrak{g}}_{W(\beta)}),$$

tedy je $\mathsf{V}(\beta)$ správný, neboť $\overset{\eta'}{\mathfrak{g}}_{W(\beta)} = \overset{\eta''}{\mathfrak{g}}_{W(\beta)}$.

5·4.[5]) (*Princip definice transfinitní indukcí.*) *Budiž* $\gamma > 1$, $a \in P$ *a pro* $0 < \xi < \gamma$ $\mathfrak{f}_\xi$ *zobrazení množiny* $P^{W(\xi)}$ *do* P. *Pak existuje přesně jedno zobrazení* $\mathfrak{f}$ *množiny* $W(\gamma)$ *do* P *takové, že* $\mathfrak{f}(0) = a$ *a*

$$0 < \xi < \gamma \Rightarrow \mathfrak{f}(\xi) = \mathfrak{f}_\xi(\mathfrak{f}_{W(\xi)}). \tag{5}$$

Důkaz. Protože podle **5·3** při $\eta' = \eta'' = \gamma$ existuje nejvýš jedno žádané zobrazení, zbývá dokázat jeho existenci. Položím-li $\alpha = \gamma + 1$ a pro $\zeta < \alpha$ $\mathsf{V}(\zeta) =$ „buďto $\zeta = 0$ nebo $\zeta > 0$ a existuje zobrazení $\overset{\zeta}{\mathfrak{g}}$ množiny $W(\zeta)$ do P těchto vlastností: 1_ζ. $\overset{\zeta}{\mathfrak{g}}(0) = a$; 2_ζ. pro $0 < \xi < \zeta$ je $\overset{\zeta}{\mathfrak{g}}(\xi) = \mathfrak{f}_\xi(\overset{\zeta}{\mathfrak{g}}_{W(\xi)})$", pak podle **5·1** stačí dokázat: Je-li $\beta < \alpha$ a je-li $\mathsf{V}(\zeta)$ správný pro $\zeta < \beta$, pak $\mathsf{V}(\beta)$ je správný. Zřejmě stačí předpokládat $\beta > 1$.

Budiž *předně* β isolované, tedy $\beta = \beta' + 1$ při vhodném $\beta' > 0$. Položím-li $\overset{\beta}{\mathfrak{g}}(\xi) = \overset{\beta'}{\mathfrak{g}}(\xi)$ pro $\xi < \beta'$ a $\overset{\beta}{\mathfrak{g}}(\beta') = \mathfrak{f}_{\beta'}(\overset{\beta'}{\mathfrak{g}}_{W(\beta')})$, pak $\overset{\beta}{\mathfrak{g}}$ je zobrazení množiny $W(\beta)$ do P s vlastnostmi 1_β., 2_β., neboť pro $0 < \xi \leqq \beta'$ je $\overset{\beta}{\mathfrak{g}}_{W(\xi)} = \overset{\beta'}{\mathfrak{g}}_{W(\xi)}$. Tedy je $\mathsf{V}(\beta)$ správný.

Budiž *za druhé* β limitní. Pak pro $\xi < \beta$ je $\xi < \eta < \beta$ při vhodném η, na př. při $\eta = \xi + 1$. Pro $\xi < \eta' < \eta'' < \beta$ je $\xi < \eta' < \eta'' < \gamma + 1$, tedy podle **5·3** je $\overset{\eta'}{\mathfrak{g}}(\xi) = \overset{\eta''}{\mathfrak{g}}(\xi)$. Pro $\xi < \beta$ budiž tedy $\overset{\beta}{\mathfrak{g}}(\xi) = \overset{\eta}{\mathfrak{g}}(\xi)$, kde $\xi < \eta < \beta$. Pak $\overset{\beta}{\mathfrak{g}}$ je zobrazení množiny $W(\beta)$ do P s vlastnostmi 1_β., 2_β., neboť pro $0 < \xi < \eta < \beta$ je $\overset{\beta}{\mathfrak{g}}_{W(\xi)} = \overset{\eta}{\mathfrak{g}}_{W(\xi)}$. Tedy je $\mathsf{V}(\beta)$ správný.

---

[5]) Tato věta, jež je zobecněním věty **5·5**, se stane „názornou", když se do věty **5·5** zavede obvyklá nomenklatura. Prvky množiny $P^{W(n)}$ při $n > 0$ nejsou nic jiného než n-členné posloupnosti prvků z P. Zobrazení množiny N do P je totéž co nekonečná posloupnost prvků z P. Je-li $\mathfrak{f}$ zobrazení množiny N do P, pak parciální zobrazení $\mathfrak{f}_{W(n)}$ při $n > 0$ je prostě n-členný začátek posloupnosti $\mathfrak{f}$ a $\mathfrak{f}(n)$ je $(n + 1)$-tý člen posloupnosti $\mathfrak{f}$. Lze tedy **5·5** vysloviti takto: Je-li a prvek množiny P a je-li $\mathfrak{f}_n$ pro $n > 0$ předpis, který každé n-členné posloupnosti prvků z P přiřazuje jistý prvek z P, pak existuje přesně jedna nekonečná posloupnost prvků z P taková, že prvý její člen je onen prvek a a každý další její člen, $(n + 1)$-tý $(n > 0)$, je právě tím prvkem z P, který předpis $\mathfrak{f}_n$ přiřazuje jejímu n-člennému začátku.

Takto demaskována se objevuje věta **5·5** jako jádro definice indukcí, jak je čtenář na ni zvyklý z elementů.

5·5. (*Princip definice obyčejnou indukcí.*) *Budiž* $a \in P$ *a pro* $n > 0$ $\mathbf{f}_n$ *zobrazení množiny* $P^{W(n)}$ *do* P. *Pak existuje přesně jedno zobrazení* $\mathbf{f}$ *množiny* N *do* P *takové, že* $\mathbf{f}(0) = a$ *a*

$$n > 0 \Rightarrow \mathbf{f}(n) = \mathbf{f}_n(\mathbf{f}_{W(n)}). \tag{6}$$

Důkaz. **5·4** při $\gamma =$ typ N.

5·6. (*Bernsteinova věta.*) $A_2 \subset A_1 \subset A_0$, $A_0 \sim A_2 \Rightarrow A_0 \sim A_1$.

Důkaz. Budiž f prosté zobrazení množiny A_0 na A_2, takže

$$f(A_0) = A_2, \tag{7}$$

a $\mathfrak{A}$ systém všech částí množiny A_0.[6]) [Pro $n > 0$ definuji zobrazení $\mathbf{f}_n$ množiny $\mathfrak{A}^{W(n)}$ do $\mathfrak{A}$ takto: a) $g \in \mathfrak{A}^{W(1)} \Rightarrow \mathbf{f}_1(g) = A_1$; b) $g \in \mathfrak{A}^{W(2)} \Rightarrow \mathbf{f}_2(g) = A_2$; c) $n > 2$, $g \in \mathfrak{A}^{W(n)} \Rightarrow \mathbf{f}_n(g) = f(g(n-2))$.

Značí-li nyní $\mathbf{f}$ zobrazení z **5·5** při $a = A_0$ a $P = \mathfrak{A}$, pak $\mathbf{f}_{W(1)} \in \mathfrak{A}^{W(1)}$, tedy podle a) a (6) je $\mathbf{f}(1) = \mathbf{f}_1(\mathbf{f}_{W(1)}) = A_1$, dále $\mathbf{f}_{W(2)} \in \mathfrak{A}^{W(2)}$, tedy podle b) a (6) je $\mathbf{f}(2) = \mathbf{f}_2(\mathbf{f}_{W(2)}) = A_2$. Položím-li tedy $\mathbf{f}(n) = A_n$ pro $n > 2$, je pro $n \in N$ $A_n \subset A_0$ a

$$n > 0 \Rightarrow \mathbf{f}(n) = A_n. \tag{8}$$

Je

$$f(A_n) = A_{n+2} \tag{9}$$

pro $n \in N$; vskutku pro $n = 0$ je to (7), kdežto pro $n > 0$ podle $\mathbf{f}_{W(n+2)} \in \mathfrak{A}^{W(n+2)}$ a podle c), (6) a (8) je

$$A_{n+2} = \mathbf{f}(n+2) = \mathbf{f}_{n+2}(\mathbf{f}_{W(n+2)}) = f(\mathbf{f}_{W(n+2)}(n)) = f(\mathbf{f}(n)) = f(A_n).$$

Je:

$$m > n \Rightarrow A_m \subset A_n; \tag{10}$$

položím-li totiž $\mathbf{V}(p) =$ „$p > n \Rightarrow A_p \subset A_n$“, podle **5·2** stačí dokázat: je-li $m \in N$ a je-li $\mathbf{V}(p)$ správný pro $p < m$, pak $\mathbf{V}(m)$ je správný. Zřejmě stačí předpokládat $m > 2$. Pak $A_{m-2} \subset A_{m-3}$, tedy podle (9)

$$A_m = f(A_{m-2}) \subset f(A_{m-3}) = A_{m-1},$$

tedy, ježto $\mathbf{V}(m-1)$ je správný, výrok $\mathbf{V}(m)$ je správný.]

[6]) Následující část důkazu obsažená v závorce [ ] se obvykle podává takto: *Definuji indukcí* množiny $A_3, A_4, \ldots$ předpisem:

(a) $$A_{n+2} = f(A_n) \text{ pro } n > 0.$$

Dokáži indukcí:

(b) $$m > n \Rightarrow A_m \subset A_n.$$

Vskutku platí (b) pro $m = 0, 1, 2$. Budiž tedy $m > 2$ a nechť platí:

(c) je-li $m' < m$, pak platí: $m' > n \Rightarrow A_{m'} \subset A_n$.

Budiž nyní $m > n$. Ježto $m - 2 < m$, podle (c) je $A_{m-2} \subset A_{m-3}$, tedy podle (a) je $A_m = f(A_{m-2}) \subset f(A_{m-3}) = A_{m-1}$. Je-li tedy $n = m - 1$, je $A_m \subset A_n$. Je-li $n < m - 1$, podle (c) je $A_{m-1} \subset A_n$, takže podle $A_m \subset A_{m-1}$ opět je $A_m \subset A_n$. Tedy platí (b).

Ježto f je prosté, podle (9) je

$$f(A_{2n} - A_{2n+1}) = f(A_{2n}) - f(A_{2n+1}) = A_{2n+2} - A_{2n+3},$$

takže

$$A_{2n} - A_{2n+1} \sim A_{2n+2} - A_{2n+3}. \tag{11}$$

Podle (10) součty

$$S_0 = \sum_{n=0}^{\infty} (A_{2n} - A_{2n+1}) \text{ a } S_1 = \sum_{n=0}^{\infty} (A_{2n+2} - A_{2n+3})$$

mají disjunktní sčítance, takže podle (11) a **2·1** je

$$S_0 \sim S_1. \tag{12}$$

Položím-li

$$T = \prod_{n=0}^{\infty} A_n + \sum_{n=0}^{\infty} (A_{2n+1} - A_{2n+2}),$$

podle (10) $TS_0 = \emptyset = TS_1$, takže podle (12) a **2·1** je

$$T + S_0 \sim T + S_1. \tag{13}$$

Podle (10) je

$$T + S_0 \subset A_0,\ T + S_1 \subset A_1. \tag{14}$$

Budiž $x \in A_0$ resp. $x \in A_1$. Při x non $\in \prod_{n=0}^{\infty} A_n$ budiž m nejmenší číslo z N, pro které x non $\in A_m$. Je-li m sudé, podle $m \geqq 2$ při vhodném n je $m = 2n + 2$, takže $x \in A_{2n+1} - A_{2n+2} \subset T$; je-li m liché, podle $m \geqq 1$ resp. $m \geqq 3$ při vhodném n je $m = 2n + 1$ resp. $m = 2n + 3$, takže $x \in A_{2n} - A_{2n+1} \subset S_0$ resp. $x \in A_{2n+2} - A_{2n+3} \subset S_1$. Tedy $A_0 \subset T + S_0$, $A_1 \subset T + S_1$, což podle (14) a (13) dává $A_0 \sim A_1$.

5·7. $\mathfrak{a} \leqq \mathfrak{b} \leqq \mathfrak{a} \Rightarrow \mathfrak{a} = \mathfrak{b}$.

Důkaz. Podle **3·4** při vhodných A_2, A_1, A_0 je moh $A_2 = \mathfrak{a}$, moh $A_1 = \mathfrak{b}$, moh $A_0 = \mathfrak{a}$, $A_2 \subset A_1 \subset A_0$. Ježto $A_0 \sim A_2$, podle **5·6** je $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$.

5·8. *Z tvrzení* $\mathfrak{a} < \mathfrak{b}$, $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$, $\mathfrak{a} > \mathfrak{b}$ *platí nejvýš jedno.*

Důkaz. **5·7.**

Koroláry. $\mathfrak{a} \leqq \mathfrak{b} < \mathfrak{c} \Rightarrow \mathfrak{a} < \mathfrak{c}$; $\mathfrak{a} < \mathfrak{b} \leqq \mathfrak{c} \Rightarrow \mathfrak{a} < \mathfrak{c}$.

5·9. *Budiž* $C \neq \emptyset$ *a* $\mathfrak{a}_z$ *kardinální číslo pro* $z \in C$. *Pak při vhodném* $\mathfrak{b}$ *je* $\mathfrak{b} > \mathfrak{a}_z$ *pro* $z \in C$.

Důkaz. Pro $z \in C$ je moh $A_z = \mathfrak{a}_z$ při vhodné A_z. Položím-li $\mathfrak{a} = \sum_{z \in C} \mathfrak{a}_z$ a $\mathfrak{b} = 2^{\mathfrak{a}}$, pak podle **3·5** a **3·6** je pro $z \in C$

$$\mathfrak{a}_z = \text{moh } A_z \leqq \text{moh} \sum_{z \in C} A_z \leqq \sum_{z \in C} \text{moh } A_z = \sum_{z \in C} \mathfrak{a}_z = \mathfrak{a} < 2^{\mathfrak{a}} = \mathfrak{b}.$$

5·10. *Budiž* $\gamma > 1$, $A \neq \emptyset$ *a pro* $0 < \xi < \gamma$ *a* $g \in A^{W(\xi)}$ *budiž* $A - g(W(\xi)) \neq \emptyset$. *Pak existuje prosté zobrazení množiny* $W(\gamma)$ *do* A.

Důkaz. Pro $\emptyset \neq X \subset A$ zvolím $x(X) \in X$ a pro $0 < \xi < \gamma$ a $g \in A^{W(\xi)}$ položím $\mathfrak{f}_\xi(g) = x(A - g(W(\xi)))$. Pak pro $0 < \xi < \gamma$ je $\mathfrak{f}_\xi$ zobrazení množiny $A^{W(\xi)}$ do A. Značí-li $\mathfrak{f}$ zobrazení z **5·4** při $a = x(A)$ a $P = A$, stačí dokázat, že $\mathfrak{f}$ je prosté. Vskutku pro $0 < \xi < \gamma$ podle (5) a podle $\mathfrak{f}_{W(\xi)} \in A^{W(\xi)}$ je

$$\mathfrak{f}(\xi) = \mathfrak{f}_\xi(\mathfrak{f}_{W(\xi)}) = x(A - \mathfrak{f}_{W(\xi)}(W(\xi))) = x(A - \mathfrak{f}(W(\xi))) \in \\ \in A - \mathfrak{f}(W(\xi)),$$

tedy pro $\eta < \xi < \gamma$ je $\mathfrak{f}(\eta) \in \mathfrak{f}(W(\xi))$ a $\mathfrak{f}(\xi)$ non $\in \mathfrak{f}(W(\xi))$, takže je $\mathfrak{f}(\eta) \neq \mathfrak{f}(\xi)$; tedy $\mathfrak{f}$ je prosté.

5·11. *Je-li A nekonečná, pak při vhodné B je $N \sim B \subset A$.*

Důkaz. Protože pro $n > 0$ a $g \in A^{W(n)}$ je $g(W(n))$ konečná, je $A - g(W(n)) \neq \emptyset$. Podle **5·10** při $\gamma =$ typ N existuje tedy prosté zobrazení f množiny N do A. Stačí tedy volit $B = f(N)$.

5·12. *Pro transfinitní $\mathfrak{a}$ je* moh $N \leq \mathfrak{a}$.

Důkaz. **5·11.**

Koroláry. $\mathfrak{a} <$ moh $N \Rightarrow \mathfrak{a}$ je konečné. Pro $n \in N$ a transfinitní $\mathfrak{a}$ je $n < \mathfrak{a}$. Pro transfinitní $\mathfrak{a}$ je $\mathfrak{a} \leq$ moh $N + \mathfrak{a} \leq \mathfrak{a} + \mathfrak{a} \leq$ $\leq$ (moh N) $\mathfrak{a} \leq \mathfrak{a}\mathfrak{a}$.

5·13. (*Zermelův teorém.*) *Každou množinu lze dobře uspořádat.*

Důkaz. Budiž A daná množina. Nechť ji nelze dobře uspořádat. Pak A není prázdná. Budiž M množina všech typ X, kde X je dobře uspořádaná část množiny A. Ježto $\eta < \xi \in M \Rightarrow \eta \in M$, podle **4·8**, položím-li $\gamma =$ typ M, je $M = W(\gamma)$. Podle $A \neq \emptyset$ je $\gamma > 1$. Pro $0 < \xi < \gamma$ a $g \in A^{W(\xi)}$ je $A - g(W(\xi)) \neq \emptyset$, protože by jinak g bylo zobrazení množiny $W(\xi)$ na A a tedy by podle **4·7** bylo možno množinu A dobře uspořádat. Podle **5·10** existuje tedy prosté zobrazení f množiny $W(\gamma)$ do A. Položím-li tedy $X = f(W(\gamma))$, je $X \subset A$ a f prosté zobrazení množiny $W(\gamma)$ na X. Stanovím-li, že pro $(x, y) \in X \times X$ je x před y, když a jen když je $f_{-1}(x) < f_{-1}(y)$, podle **4·4** je X dobře uspořádána tímto pravidlem a typ $X =$ $=$ typ $W(\gamma) = \gamma$. Tedy je $\gamma \in M$ — proti $M = W(\gamma)$.

6. Důsledky Zermelova teorému. moh ξ (čti: *mohutnost* pořadového čísla ξ) značí mohutnost dobře uspořádané množiny, jejíž pořadový typ je ξ. Tato definice je oprávněná, protože pro dobře uspořádané A, B je: typ $A =$ typ $B \Rightarrow A \simeq B \Rightarrow A \sim B \Rightarrow$ $\Rightarrow$ moh $A =$ moh B.

Koroláry. moh $\xi =$ moh $W(\xi)$; moh $n = n$.

6·1. $\xi < \eta \Rightarrow$ moh $\xi \leq$ moh η.

Důkaz. Při vhodných A a $x \in A$ je typ $A = \eta$, typ $\underset{x}{A} = \xi$, tedy moh $\xi =$ moh $\underset{x}{A} \leq$ moh $A =$ moh η.

6·2. moh $\xi <$ moh $\eta \Rightarrow \xi < \eta$.

Důkaz. Jinak je $\eta \leq \xi$, tedy podle **6·1** moh $\eta \leq$ moh ξ — proti **5·8**.

6.3. *Pro každé* $\mathfrak{a}$ *je* $\mathfrak{a} = \text{moh}\ \xi$ *při vhodném* ξ.

Důkaz. **5.13.**

6.4. *Z tvrzení* $\mathfrak{a} < \mathfrak{b}$, $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$, $\mathfrak{a} > \mathfrak{b}$ *platí přesně jedno.*

Důkaz. **5.8, 6.3, 4.1, 6.1.**

Korolár. $\mathfrak{a} < \mathfrak{b} \Leftrightarrow$ není: $\mathfrak{b} \leqq \mathfrak{a}$.

6.5. *Je-li* A *dobře uspořádána a* $\text{moh}\ \underset{x}{A} < \mathfrak{b}$ *pro* $x \in A$, *pak* $\text{moh}\ A \leqq \mathfrak{b}$.

Důkaz. Jinak je $\mathfrak{b} < \text{moh typ}\ A$, tedy, položím-li podle **6.3** $\mathfrak{b} = \text{moh}\ \eta$, podle **6.2** $\eta < \text{typ}\ A$, tedy při vhodném $x \in A$ je $\eta = \text{typ}\ \underset{x}{A}$, takže $\mathfrak{b} = \text{moh}\ \underset{x}{A}$. To je spor.

6.6. *Budiž* M *množina kardinálních čísel a budiž pro* $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \in M \times M$ $\mathfrak{a}$ *před* $\mathfrak{b}$, *když a jen když* $\mathfrak{a} < \mathfrak{b}$. *Pak* M *je uspořádána tímto pravidlem.*

Důkaz. **6.4.**

Množina kardinálních čísel se nazývá *přirozeně uspořádaná*, je-li uspořádána pravidlem z věty **6.6.** Tato definice není ve sporu s definicí přirozeného uspořádání množiny N. Mluví-li se o uspořádání množiny kardinálních čísel bez dalšího dodatku, myslí se přirozené uspořádání.

6.7. *Každá množina kardinálních čísel je dobře uspořádána.*

Důkaz. Budiž M množina kardinálních čísel. Stačí předpokládat $M \neq \emptyset$. Pro $\mathfrak{x} \in M$ podle **6.3** zvolím pořadové číslo $f(\mathfrak{x})$ tak, že $\mathfrak{x} = \text{moh}\ f(\mathfrak{x})$. Pak podle **6.2** f je podobné zobrazení množiny M na $f(M)$. Podle **4.6** je tedy M dobře uspořádána.

Až do konce malá švabachová písmena značí *transfinitní* kardinální čísla.

ind $\mathfrak{a}$ (čti: *index* kardinálního čísla $\mathfrak{a}$) značí typ $\underset{\mathfrak{x}}{\mathrm{E}}\,[\mathfrak{x} < \mathfrak{a}]$.

Koroláry. ind $\mathfrak{a}$ je pořadové číslo. ind moh $N = 0$.

6.8. $\mathfrak{a} < \mathfrak{b} \Leftrightarrow \text{ind}\ \mathfrak{a} < \text{ind}\ \mathfrak{b}$.

Důkaz. 1. Je-li $\mathfrak{a} < \mathfrak{b}$, pak $\underset{\mathfrak{x}}{\mathrm{E}}\,[\mathfrak{x} < \mathfrak{a}]$ je úsek množiny $\underset{\mathfrak{x}}{\mathrm{E}}\,[\mathfrak{x} < \mathfrak{b}]$ určený prvkem $\mathfrak{a}$, tedy $\text{ind}\ \mathfrak{a} < \text{ind}\ \mathfrak{b}$.

2. Je-li $\text{ind}\ \mathfrak{a} < \text{ind}\ \mathfrak{b}$, pak je $\mathfrak{a} < \mathfrak{b}$ podle 1.

Korolár. $\text{ind}\ \mathfrak{a} = \text{ind}\ \mathfrak{b} \Rightarrow \mathfrak{a} = \mathfrak{b}$.

6.9. *Je-li* ξ *index* (některého kardinálního čísla) *a* $\eta < \xi$, *pak* η *je index.*

Důkaz. Je $\xi = \text{typ}\ \underset{\mathfrak{x}}{\mathrm{E}}\,[\mathfrak{x} < \mathfrak{a}]$ při vhodném $\mathfrak{a}$ a η pořadovým typem úseku množiny $\underset{\mathfrak{x}}{\mathrm{E}}\,[\mathfrak{x} < \mathfrak{a}]$, určeného vhodným $\mathfrak{b}$. Tedy $\eta = \text{ind}\ \mathfrak{b}$.

6.10. *Každé* ξ *je index.*

Důkaz. Budiž dáno ξ. Položím-li $\alpha = \xi + 1$ a $\mathsf{V}(\zeta) =$ „ζ je index" pro $\zeta < \alpha$, pak podle **5.1** stačí dokázat: Je-li $\beta < \alpha$ a je-li

$\mathsf{V}(\zeta)$ správný pro $\zeta < \beta$, pak $\mathsf{V}(\beta)$ je správný. Stačí předpokládat $\beta > 0$. Budiž tedy $\zeta = \operatorname{ind} \mathfrak{a}_\zeta$ pro $\zeta < \beta$. Podle **5·9** při vhodném $\mathfrak{b}$ je $\mathfrak{b} > \mathfrak{a}_\zeta$ pro $\zeta < \beta$ (ježto $\mathfrak{a}_0$ je transfinitní, také $\mathfrak{b}$ je transfinitní). Kdyby bylo $\operatorname{ind} \mathfrak{b} < \beta$, bylo by $\operatorname{ind} \mathfrak{b} = \operatorname{ind} \mathfrak{a}_{\operatorname{ind} \mathfrak{b}}$, tedy $\mathfrak{b} = \mathfrak{a}_{\operatorname{ind} \mathfrak{b}}$, což je spor. Tedy je $\beta \leqq \operatorname{ind} \mathfrak{b}$, tedy podle **6·9** $\mathsf{V}(\beta)$ je správný.

$\aleph_\xi$ (čti: *alef* ξ) značí to $\mathfrak{a}$, pro něž $\operatorname{ind} \mathfrak{a} = \xi$. Tuto definici opravňuje **6·10.**

Koroláry. $\aleph_0 = \operatorname{moh} N$. $\xi < \eta \Leftrightarrow \aleph_\xi < \aleph_\eta$.

$Z(\aleph_\xi)$ (čti: *číselná třída* alefu ξ) značí $\underset{\eta}{\mathrm{E}}\,[\operatorname{moh} \eta = \aleph_\xi]$.

ω_ξ (čti: *počáteční číslo* třídy $Z(\aleph_\xi)$) značí $\min Z(\aleph_\xi)$. Tuto definici opravňuje **6·3.**

Koroláry. $\omega_0 = \operatorname{typ} N$. $\xi < \eta \Leftrightarrow \omega_\xi < \omega_\eta$. $\xi < \omega_\eta \Leftrightarrow \operatorname{moh} \xi < \aleph_\eta$. Pro transfinitní ξ je $\omega_{\operatorname{ind} \operatorname{moh} \xi} \leqq \xi$.

6·11. $\mathfrak{a}\mathfrak{a} = \mathfrak{a}$.

Důkaz. Ježto $\mathfrak{a} \leqq \mathfrak{a}\mathfrak{a}$, podle **5·7** stačí dokázat $\mathfrak{a}\mathfrak{a} \leqq \mathfrak{a}$. Položím-li $\operatorname{ind} \mathfrak{a} = \xi$, je $\mathfrak{a} = \aleph_\xi$. Položím-li tedy $\alpha = \xi + 1$ a $\mathsf{V}(\zeta) =$ „$\aleph_\zeta\aleph_\zeta \leqq \aleph_\zeta$" pro $\zeta < \alpha$, podle **5·1** stačí dokázat: Je-li $\beta < \alpha$ a

$$\aleph_\zeta\aleph_\zeta \leqq \aleph_\zeta \text{ pro } \zeta < \beta, \tag{15}$$

pak

$$\aleph_\beta\aleph_\beta \leqq \aleph_\beta. \tag{16}$$

První pravidlo. Při daném η pro $(\vartheta', \vartheta'') \in W(\eta) \times W(\eta)$ budiž (η, ϑ') před (η, ϑ'') resp. (ϑ', η) před (ϑ'', η), když a jen když $\vartheta' < \vartheta''$. Pak $\{\eta\} \times W(\eta)$ resp. $W(\eta) \times \{\eta\}$ je dobře uspořádána tímto pravidlem.

Druhé pravidlo. Při daném η každé dvě z množin

$$\{\eta\} \times W(\eta), \quad W(\eta) \times \{\eta\}, \quad \{(\eta, \eta)\}$$

jsou disjunktní. Položím

$$A_\eta = \{\eta\} \times W(\eta) + W(\eta) \times \{\eta\} + \{(\eta, \eta)\} \tag{17}$$

a stanovím: 1. první dva sčítance v (17) jsou uspořádány podle prvního pravidla; 2. $x \in \{\eta\} \times W(\eta)$, $y \in W(\eta) \times \{\eta\} \Rightarrow x$ před y, y před (η, η). Pak A_η je dobře uspořádána tímto pravidlem.

Systém všech množin A_η, kde $\eta < \omega_\beta$, zřejmě je disjunktní. Položím

$$A = \sum_{\eta < \omega_\beta} A_\eta \tag{18}$$

a stanovím: 1. každý sčítanec v (18) je uspořádán podle druhého pravidla; 2. $\eta' < \eta'' < \omega_\beta$, $(x', x'') \in A_{\eta'} \times A_{\eta''} \Rightarrow x'$ před x''. Pak A je dobře uspořádána tímto pravidlem.

Protože součet v (18) je disjunktní, pro $x \in A$ je $x \in A_\eta$ při přesně jednom $\eta < \omega_\beta$; označím η_x toto η. Pak

$$A_x \subset \sum_{\eta<\eta_x} A_\eta + A_{\eta_x} \text{ pro } x \in A, \tag{19}$$

kde $\sum_{\eta<\eta_x} A_\eta$ značí $\emptyset$ pro $\eta_x = 0$. Je-li tedy η_x konečné, pak podle (17) A_x je konečná, takže

$$\text{moh } A_x < \aleph_\beta \text{ pro konečné } \eta_x. \tag{20}$$

Ježto podle (17) a (18) je $A = W(\omega_\beta) \times W(\omega_\beta)$, podle **2·3** je moh $A = \aleph_\beta\aleph_\beta$. Protože mám dokázat (16), podle **6·5** a (20) stačí tedy dokázat

$$\text{moh } A_x < \aleph_\beta \text{ pro transfinitní } \eta_x.$$

Podle (19) a **3·5** stačí tedy pro transfinitní η_x dokázat

$$\sum_{\eta<\eta_x} \text{moh } A_\eta + \text{moh } A_{\eta_x} < \aleph_\beta. \tag{21}$$

Ježto η_x je transfinitní, také moh η_x je transfinitní. Ježto $\eta_x < \omega_\beta$, je moh $\eta_x < \aleph_\beta$, tedy podle **6·8** ind moh $\eta_x < \beta$, tedy podle (15) moh η_x moh $\eta_x \leqq$ moh η_x, tedy

$$\text{moh } \eta_x \text{ moh } \eta_x + \text{moh } \eta_x \leqq \text{moh } \eta_x. \tag{22}$$

Podle (17) $A_\eta = (\{\eta\} \times W(\eta) + W(\eta) \times \{\eta\}) + \{(\eta, \eta)\}$, tedy podle **3·5** a **6·1**

$$\eta \leqq \eta_x \Rightarrow \text{moh } A_\eta \leqq 2 \text{ moh } \eta + 1 \leqq 2 \text{ moh } \eta_x + 1 \leqq$$
$$\leqq \text{moh } \eta_x \text{ moh } \eta_x + \text{moh } \eta_x,$$

tedy podle (22) a **3·1**

$$\sum_{\eta<\eta_x} \text{moh } A_\eta + \text{moh } A_{\eta_x} \leqq \sum_{\eta<\eta_x} \text{moh } \eta_x + \text{moh } \eta_x =$$
$$= \text{moh } \eta_x \text{ moh } \eta_x + \text{moh } \eta_x,$$

tedy podle (22) platí (21).

Koroláry. $n \geqq 1 \Rightarrow n + \mathfrak{a} = n\mathfrak{a} = \mathfrak{a}$. $\mathfrak{b} \leqq \mathfrak{a} \Rightarrow \mathfrak{b} + \mathfrak{a} = \mathfrak{b}\mathfrak{a} = \mathfrak{a}$. $\aleph_0 + \mathfrak{a} = \aleph_0\mathfrak{a} = \mathfrak{a}$. Jsou-li k', k'' kardinální čísla a je-li $k' < \mathfrak{a}$, $k'' < \mathfrak{a}$, pak je $k' + k'' < \mathfrak{a}$ a $k'k'' < \mathfrak{a}$.

6·12. *Počáteční číslo je limitní.*

Důkaz. Nechť $\omega_\alpha = \xi + 1$. Pak $W(\omega_\alpha) = W(\xi) + \{\xi\}$, tedy, ježto moh $W(\xi)$ je transfinitní, podle **3·5** je

$$\text{moh } W(\omega_\alpha) \leqq \text{moh } W(\xi) + 1 = \text{moh } W(\xi) \leqq \text{moh } W(\omega_\alpha),$$

tedy moh $\xi = \aleph_\alpha$ — proti $\xi < \omega_\alpha$.

6·13. $\xi < \omega_\alpha \Rightarrow \text{moh } \underset{\zeta}{\mathrm{E}} [\xi \leqq \zeta < \omega_\alpha] = \aleph_\alpha$.

Důkaz. Jinak, položím-li $M = \underset{\zeta}{\mathrm{E}} [\xi \leqq \zeta < \omega_\alpha]$, podle $M \subset W(\omega_\alpha)$ je moh $M < \aleph_\alpha$, tedy, ježto $W(\xi) M = \emptyset$, $W(\omega_\alpha) =$

$= W(\xi) + M$ a moh $W(\xi) < \aleph_\alpha$, je moh $W(\omega_\alpha) =$ moh $W(\xi) +$ $+$ moh $M < \aleph_\alpha$, což je spor.

6·14. $n \geqq 1 \Rightarrow \mathfrak{a}^n = \mathfrak{a}$.

Důkaz. Položím-li pro $p \in N$ $\mathsf{V}(p) =$ „buď je $p = 0$ nebo je $p > 0$ a $\mathfrak{a}^p = \mathfrak{a}$“, podle **5·2** stačí dokázat: Je-li $m \in N$ a je-li $\mathsf{V}(p)$ správný pro $p < m$, pak $\mathsf{V}(m)$ je správný. Stačí předpokládat $m > 1$. Pak $m - 1 > 0$, tedy $\mathfrak{a}^{m-1} = \mathfrak{a}$, tedy podle **6·11** $\mathfrak{a}^m =$ $= \mathfrak{a}^{m-1}\mathfrak{a} = \mathfrak{a}$, tedy $\mathsf{V}(m)$ je správný.

6·15. *Je-li* $\mathfrak{A}$ *systém všech konečných částí nekonečné množiny* A, *pak* moh $\mathfrak{A} =$ moh A.

Důkaz. Předně podle (moh $A)^0 = 1$, podle **6·14** a podle **3·7** je

$$\text{moh } \mathfrak{A} \leqq \sum_{n=0}^{\infty} (\text{moh } A)^n \leqq \sum_{n=0}^{\infty} \text{moh } A = \aleph_0 \text{ moh } A = \text{moh } A,$$

za druhé, značí-li $\mathfrak{B}$ systém všech $\{x\}$, kde $x \in A$, je $A \sim \mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$, tedy moh $A \leqq$ moh $\mathfrak{A}$.

Mohutnost kontinua značí $2^{\aleph_0}$.

6·16. $2^{\aleph_0} > \aleph_0$.

Důkaz. **3·6.**

Korolár. Mohutnost kontinua je transfinitní kardinální číslo. $\mathfrak{c}$ značí až do konce mohutnost kontinua.

6·17. $n \geqq 2 \Rightarrow n^{\aleph_0} = \aleph_0^{\aleph_0} = \mathfrak{c}^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$.

Důkaz. Podle **3·3** je

$$2^{\aleph_0} \leqq n^{\aleph_0} \leqq \aleph_0^{\aleph_0} \leqq \mathfrak{c}^{\aleph_0} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \aleph_0} = 2^{\aleph_0}.$$

6·18. $n \geqq 2 \Rightarrow n^{\mathfrak{c}} = \aleph_0^{\mathfrak{c}} = \mathfrak{c}^{\mathfrak{c}} = 2^{\mathfrak{c}} > \mathfrak{c}$.

Důkaz. Podle **3·6** a **3·3** je

$$\mathfrak{c} < 2^{\mathfrak{c}} \leqq n^{\mathfrak{c}} \leqq \aleph_0^{\mathfrak{c}} \leqq \mathfrak{c}^{\mathfrak{c}} = (2^{\aleph_0})^{\mathfrak{c}} = 2^{\aleph_0 \mathfrak{c}} = 2^{\mathfrak{c}}.$$

7. Konfinalita. Je-li A uspořádaná, pak A konf B (čti: *A konfinální* s B) značí: 1. $B \subset A$; 2. je-li $x \in A$, pak při vhodném $y \in B$ je buď $x = y$ nebo x před y.

Koroláry. A konf A. A konf B konf C (t. j. A konf B, B konf C) $\Rightarrow$ A konf C. Je-li A konf B, pak $A = \emptyset \Leftrightarrow B = \emptyset$. A konf $\{x\} \Leftrightarrow x$ je poslední prvek množiny A. Je-li A konf B, pak A konf $\{x\} \Leftrightarrow B$ konf $\{x\}$. Je-li f podobné zobrazení množiny A na A_1 a je-li A konf B, pak A_1 konf $f(B)$.

Je-li A uspořádaná, pak A konf ξ (čti: A *konfinální* s ξ) značí, že při vhodné B je typ $B = \xi$ a A konf B.

Koroláry. Je-li A konf ξ, pak $A = \emptyset \Leftrightarrow \xi = 0$. A konf $1 \Leftrightarrow$ v A existuje poslední prvek. Je-li A konf B, pak A konf $1 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow B$ konf 1. $A_1 \cong A$ konf $\xi \Rightarrow A_1$ konf ξ.

ξ konf η (čti: ξ *konfinální* s η) značí, že pro typ $A = \xi$ je A konf η.

Koroláry. A konf ξ konf η (t. j. A konf ξ, ξ konf η) $\Rightarrow$ A konf η. ξ konf ξ. ξ konf η konf ζ (t. j. ξ konf η, η konf ζ) $\Rightarrow$ ξ konf ζ. Je-li ξ konf η, pak $\xi = 0 \Leftrightarrow \eta = 0$. Je-li $\xi > 0$, pak platí: ξ konf $1 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ ξ je isolované. Je-li ξ konf η, pak platí: ξ je isolované $\Leftrightarrow \eta$ je isolované.

7·1. *Je-li A nekonečná uspořádaná množina, pak při vhodném η je A konf $\eta \leqq \omega_{\text{ind moh} A}$.*

Důkaz. Položím-li ind moh $A = \alpha$, je moh $W(\omega_\alpha) =$ moh A, takže existuje prosté zobrazení f množiny $W(\omega_\alpha)$ na A. Položím-li $M = W(\omega_\alpha) \mathop{\mathrm{E}}\limits_{\vartheta} [\zeta < \vartheta \Rightarrow f(\zeta)$ před $f(\vartheta)]$, pak pro $\vartheta' < \vartheta'' \in M$ je $f(\vartheta')$ před $f(\vartheta'')$, takže parciální zobrazení f_M množiny M na $f(M)$ je podobné. Položím-li $B = f(M)$, stačí dokázat:

$$A \text{ konf } B, \tag{23}$$
$$\text{typ } B \leqq \omega_\alpha, \tag{24}$$

neboť podle **4·6** B je dobře uspořádána.

Nechť neplatí (23). Pak zřejmě není prázdnou množina M^* všech $\vartheta < \omega_\alpha$ této vlastnosti: $y \in B \Rightarrow y$ před $f(\vartheta)$. Položím-li $\vartheta^* = \min M^*$, je $\vartheta^* < \omega_\alpha$ a platí:

$$y \in B \Rightarrow y \text{ před } f(\vartheta^*), \tag{25}$$
$$\zeta < \vartheta^* \Rightarrow \text{ neplatí: } y \text{ před } f(\zeta) \text{ pro } y \in B. \tag{26}$$

Budiž $\zeta < \vartheta^*$. Kdyby bylo $f(\vartheta^*)$ před $f(\zeta)$, podle (25) by bylo y před $f(\zeta)$ pro $y \in B$ — proti (26). Tedy podle $f(\vartheta^*) \neq f(\zeta)$ je $f(\zeta)$ před $f(\vartheta^*)$ pro $\zeta < \vartheta^*$. Tedy je $\vartheta^* \in M$, $f(\vartheta^*) \in B$ — proti (25). Tedy je (23).

Pro $\xi \in M$ zřejmě $M_\xi = M\, W(\xi)$, tedy podle $\xi < \omega_\alpha$ je moh $M_\xi \leqq$ $\leqq$ moh $\xi < \aleph_\alpha$, tedy typ $M_\xi < \omega_\alpha$. Tedy není typ $M > \omega_\alpha$. Podle $M \simeq B$ platí tedy (24).

7·2. *Pro transfinitní ξ je ξ* konf $\eta \leqq \omega_{\text{ind moh}\,\xi}$ *při vhodném η.*

Důkaz. **7·1.**

ξ se nazývá *regulární*, když není ξ konf η pro žádné $\eta < \xi$.

Korolár. Isolované ξ je regulární, když a jen když $\xi \leqq 1$.

7·3. *Je-li ξ transfinitní a regulární, pak $\xi = \omega_{\text{ind moh}\,\xi}$.*

Důkaz. Pro η z věty **7·2** je $\eta \leqq \omega_{\text{ind moh}\,\xi} \leqq \xi \leqq \eta$.

Pro uspořádanou A značí $\varkappa(A)$ (čti: *konfinál* množiny A) pořadové číslo takto definované: 1. $\varkappa(\emptyset) = 0$; 2. když existuje poslední prvek množiny A, pak $\varkappa(A) = 1$; 3. když $A \neq \emptyset$ a neexistuje poslední prvek množiny A, pak $\varkappa(A)$ je nejmenší číslo množiny všech η z věty **7·1**.

Koroláry. $\varkappa(A)$ je regulární. A konf $\varkappa(A)$.

7·4. *Je-li A uspořádaná, $A \neq \emptyset$ a neexistuje-li poslední prvek množiny A, pak $\varkappa(A)$ je počáteční, a sice $\varkappa(A) = \omega_{\mathrm{ind\,moh}\,\varkappa(A)}$.*

Důkaz. $\varkappa(A) > 1$, tedy $\varkappa(A)$ je transfinitní, tedy podle **7·3** $\varkappa(A) = \omega_{\mathrm{ind\,moh}\,\varkappa(A)}$.

7·5. *Každá uspořádaná množina je konfinální přesně s jedním regulárním pořadovým číslem, a sice se svým konfinálem.*

Důkaz. Budiž A uspořádaná. Budiž A konf ξ a ξ regulární. Mám dokázat $\xi = \varkappa(A)$. Nechť $\xi \neq \varkappa(A)$. Pak $A \neq \emptyset$ a v A neexistuje poslední prvek. Pak podle **7·3** a **7·4** při vhodných B, C, β, γ je

$$A \text{ konf } B,\ A \text{ konf } C, \tag{27}$$

$$\text{typ } B = \beta,\ \text{typ } C = \omega_\gamma, \tag{28}$$

$$\beta < \omega_\gamma, \tag{29}$$

$$\omega_\gamma \text{ je regulární.} \tag{30}$$

Položím $S = B + C$. *Předně* podle **3·5**, (28) a (29) je

$$\text{moh } C \leqq \text{moh } S \leqq \text{moh } B + \text{moh } C =$$
$$= \text{moh } \beta + \text{moh } \omega_\gamma = \text{moh } \omega_\gamma = \text{moh } C,$$

tedy moh $S = \aleph_\gamma$. *Za druhé* podle (28) je S dobře uspořádaná, takže

$$\text{typ } S \geqq \omega_\gamma. \tag{31}$$

Za třetí podle (27) je

$$S \text{ konf } B,\ S \text{ konf } C, \tag{32}$$

takže podle (28), (29), (30) a (31) je typ $S > \omega_\gamma$.

Při vhodném $x \in S$ je tedy

$$\text{typ } \underset{x}{S} = \omega_\gamma. \tag{33}$$

Položím-li $B_1 = \underset{y}{\mathrm{E}}\,[y \in B,$ není y před $x]$ a $C_1 = \underset{z}{\mathrm{E}}\,[z \in C,$ není z před $x]$, pak podle (32) je $B_1 \neq \emptyset \neq C_1$. Nazvu-li y_1 resp. z_1 první prvek množiny B_1 resp. C_1, zřejmě je $\underset{y_1}{B} = \underset{x}{BS}$ a $\underset{z_1}{C} = \underset{x}{CS}$, takže $\underset{x}{S} = \underset{y_1}{B} + \underset{z_1}{C}$; tedy podle **3·5** je

$$\text{moh } \underset{x}{S} \leqq \text{moh } \underset{y_1}{B} + \text{moh } \underset{z_1}{C}. \tag{34}$$

Ale podle (28) a (29) je typ $\underset{y_1}{B} < \omega_\gamma$, typ $\underset{z_1}{C} < \omega_\gamma$, tedy moh $\underset{y_1}{B} < \aleph_\gamma$, moh $\underset{z_1}{C} < \aleph_\gamma$, tedy podle (34) moh $\underset{x}{S} < \aleph_\gamma$, tedy typ $\underset{x}{S} < \omega_\gamma$ — proti (33). Tedy je $\xi = \varkappa(A)$.

$\mathfrak{a}$ se nazývá *regulární*, když $\omega_{\mathrm{ind}\,\mathfrak{a}}$ je regulární.

7·6. *$\mathfrak{a}$ je regulární, když a jen když platí:*

Je-li $0 < \text{moh}\, C < \mathfrak{a}$ *a je-li* k_z *pro* $z \in C$ *kardinální číslo* $< \mathfrak{a}$, *pak* $\sum_{z \in C} k_z < \mathfrak{a}$. (35)

Důkaz. Budiž ind $\mathfrak{a} = \alpha$. Pak $\mathfrak{a} = \aleph_\alpha$.

1. Budiž $\aleph_\alpha$ regulární. Dokážu (35). Podle **6·3** pro $z \in C$ zvolím pořadové číslo $f(z)$ tak, že moh $f(z) = k_z$. Budiž M množina všech $f(z)$, kde $z \in C$. Pro $z \in C$ podle $k_z < \aleph_\alpha$ je $f(z) < \omega_\alpha$, takže $M \subset W(\omega_\alpha)$. Zřejmě moh $M \leq$ moh C, takže podle moh $C < \aleph_\alpha$ je typ $M < < \omega_\alpha$. Ježto ω_α je regulární, není $W(\omega_\alpha)$ konf M. Tedy existuje takové $\xi < \omega_\alpha$, že pro $z \in C$ je $f(z) < \xi$, tedy podle **6·1** $k_z \leq$ moh $\xi < < \aleph_\alpha$. Podle **3·1** je tedy $\sum_{z \in C} k_z \leq$ moh C moh $\xi < \aleph_\alpha$.

2. Budiž tvrzení (35) správné. Nechť $\aleph_\alpha$ není regulární. Pak při vhodné C je

$$W(\omega_\alpha) \text{ konf } C \tag{36}$$

a typ $C < \omega_\alpha$, tedy

$$0 < \text{moh}\, C < \aleph_\alpha. \tag{37}$$

Pro $\xi < \omega_\alpha$ podle **6·12** je $\xi + 1 < \omega_\alpha$, tedy podle (36) je $\xi < f(\xi) \in C$ při vhodném $f(\xi)$. Pak jednak je

$$W(\omega_\alpha) \subset \sum_{\xi < \omega_\alpha} W(f(\xi)) \subset \sum_{\zeta \in C} W(\zeta), \tag{38}$$

jednak, ježto $\zeta \in C \Rightarrow \zeta < \omega_\alpha$, je

$$\text{moh}\, W(\zeta) < \aleph_\alpha \text{ pro } \zeta \in C. \tag{39}$$

Nyní podle (35), (37) a (39) je

$$\sum_{\zeta \in C} \text{moh}\, W(\zeta) < \aleph_\alpha,$$

kdežto podle (38) a **3·5** je

$$\aleph_\alpha = \text{moh}\, W(\omega_\alpha) \leq \sum_{\zeta \in C} \text{moh}\, W(\zeta),$$

což je spor. Tedy $\aleph_\alpha$ je regulární.
