Zdeněk Horák

K teorii minimálních ploch

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 56 (1927), No. 4, 252--267

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/120827`

K teorii minimálních ploch.

Napsal Dr. *Zdeněk Horák*.

Přináším zde několik poznámek k teorii minimálních ploch. Především chci poukázati na obecné parametrické vyjádření těchto ploch pomocí minimálních křivek, jež obsahuje známé vzorce Weierstrassovy, Ribaucourovy a j. jako speciální případy. Při řešení konkrétních úloh je ovšem nutno užíti některých speciálních vzorců, ale v teoretických úvahách jeví se výhodným vycházeti ze zmíněného obecného tvaru. Pro tyto obecné vzorce platí zcela podobné vztahy jako pro vzorce Weierstrassovy, mimo to plynou z nich snadno vzorce Schwarzovy pro plochu sdruženou i řešení problému Björlingova. Konečně lze jich užíti i k vyjádření obecné křivky minimální. Jako aplikaci stanovil jsem Weierstrassovy funkce minimálních ploch, které protínají pod stálým úhlem libovolný válec podél jeho geodetické čáry. V dodatku uvádím některé vztahy mezi minimálními křivkami a minimálními plochami, vytvořenými jejich translací.

V následujícím užívám důsledně obvyklých označení a vylučuji vůbec plochy rozvinutelné (do roviny), což nebudu již zvláště vytýkati.

1. Obecné vzorce. Vyjádříme-li minimální plochu pomocí parametrů minimálních křivek u, v, obdržíme ze známého výrazu pro střední křivost:[1])

$$H = \frac{2M}{F}$$

vzhledem k tomu, že $F \neq 0$, jako diferenciální rovnici minimální plochy prostě

$$M = 0 \tag{1}$$

a rovnice Codazziho:

$$L_v - M_u = -\frac{F_u}{F} M, \quad N_u - M_v = -\frac{F_v}{F} M$$

nabývají tedy tvaru

$$L_v = 0, \qquad N_u = 0. \tag{2}$$

Pro derivace směrových kosinů normály plochy platí vyjádření:[1])

$$X_u = -\frac{1}{F}(M x_u + L x_v), \quad X_v = -\frac{1}{F}(N x_u + M x_v),$$

[1]) J. Sobotka: Differenciální geometrie, III., 1914, § 54.

takže vzhledem k (1)

$$X_u = -\frac{L}{F}x_v, \quad X_v = -\frac{N}{F}x_u, \tag{3}$$

a protože $E = G = 0$, jest

$$S X_u^2 = e = 0, \quad S X_u X_v = f = \frac{LN}{F}, \quad S X_v^2 = g = 0. \tag{4}$$

Dosadíme-li odtud za F do (3), obdržíme

$$x_u = -\frac{X_v}{f}L, \quad x_v = -\frac{X_u}{f}N. \tag{5}$$

Třetí fundamentální relace, rovnice Gaussova

$$\frac{LN - M^2}{F} = \frac{\partial^2 \log F}{\partial u\, \partial v}$$

přejde pak vzhledem k (1), (2), (4) ve vztah

$$-f = \frac{\partial^2 \log f}{\partial u\, \partial v},$$

který vyjadřuje známý fakt, že f vyhovuje diferenciální rovnici Liouvilleově, a je tedy splněn pro libovolné parametry minimálních křivek. Jsou-li tedy splněny Codazziho rovnice (2), je splněna i Gaussova. Druhé derivace souřadnic podle parametrů [1])

$$x_{uv} = MX, \quad y_{uv} = MY, \quad z_{uv} = MZ \tag{6}$$

jsou vzhledem k (1) rovny nule, takže poměry

$$-\frac{X_v}{f} = P_1(u), \quad -\frac{Y_v}{f} = P_2(u), \quad -\frac{Z_v}{f} = P_3(u) \tag{7}$$

jsou funkce pouze u a

$$-\frac{X_u}{f} = Q_1(v), \quad -\frac{Y_u}{f} = Q_2(v), \quad -\frac{Z_u}{f} = Q_3(v) \tag{8}$$

pouze v. Integrací rovnic (5) pak dostaneme pro souřadnice bodů plochy minimální, vynecháme-li aditivní konstanty, což má význam pouhé translace v prostoru, rovnice

$$\begin{aligned} x &= -\int \frac{X_v}{f} L(u)\, du - \int \frac{X_u}{f} N(v)\, dv \\ y &= -\int \frac{Y_v}{f} L(u)\, du - \int \frac{Y_u}{f} N(v)\, dv \\ z &= -\int \frac{Z_v}{f} L(u)\, du - \int \frac{Z_u}{f} N(v)\, dv \end{aligned} \tag{9}$$

čili

$$
\begin{aligned}
x &= \int P_1 L\,du + \int Q_1 N\,dv \\
y &= \int P_2 L\,du + \int Q_2 N\,dv \\
z &= \int P_3 L\,du + \int Q_3 N\,dv,
\end{aligned} \tag{9'}
$$

při čemž podle (4) $\Sigma P_i^2 = \Sigma Q_i^2 = 0$. V tomto tvaru lze tedy vyjádřiti každou minimální plochu s omezením na počátku uvedeným.

Rovnice (9') mají tvar translačních vzorců Mongeových a jsou stejně obecné jako tyto, neboť platí pro libovolné parametry minimálních křivek. Zároveň však mají výhody speciálních vzorců, neboť funkce P_i, Q_i jsou stanoveny volbou parametrů (rovnicemi (7), (8)), takže souřadnice bodů plochy jsou vyjádřeny pomocí dvou funkcí L, N, které nemusí splňovati již žádných dalších podmínek. Mimo to může býti užito okolnosti, že tyto dvě funkce jsou základními veličinami plochy.

Uvedenými rovnicemi lze vyjádřiti každou minimální plochu s omezením na počátku uvedeným. Naopak, zvolíme-li některé vyjádření koule pomocí isotropických přímek, je $SX_u^2 = SX_v^2 = 0$ a plocha stanovená rovnicemi (9) má tedy $E = G = 0$, neboť poměry $\frac{X_v}{f}, \ldots, \frac{X_u}{f}$ jsou pro všechny parametry minimálních přímek funkcemi pouze u resp. v. Jsou tedy u, v také na ploše (9) parametry minimálních křivek a mimo to $x_{uv} = y_{uv} = z_{uv} = 0$, takže podle (6) jest $M = 0$, tedy střední křivost plochy nulou. Tím docházíme k větě: *Každému vyjádření jednotkové koule pomocí isotropických přímek přísluší vzorce* (9), *stanovící minimální plochu kvadraturami,* která je v úplné shodě s obecně platnou větou:[2]) »Jsou-li dány diferenciální formy

$$
\begin{aligned}
&L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2, \\
&e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2,
\end{aligned}
$$

z nichž druhá je definitní a má kladnou křivost rovnu jedné, pak k existenci plochy, mající je za druhou resp. třetí základní formu, jest nutno a stačí, aby byly splněny rovnice Codazziho. Příslušná plocha je stanovena jednoznačně kvadraturami.« Aplikujeme-li příslušné vzorce (l. c.) na náš případ, dojdeme skutečně k výsledku (9).

Z předcházejících úvah je zřejmo, že dvě libovolné funkce komplexní proměnné dosazeny za L a N do našich vzorců (9') stanoví minimální plochu, která je určena jednoznačně (až na rovnoběžné posunutí) při daném vyjádření sférického obrazu, t. j. při

[2]) Bianchi-Lukat: Vorlesungen über Differentialgeometrie 1910, § 64.

daných funkcích P_i, Q_i. Přísluší tedy dvojici funkcí komplexní proměnné jediná minimální plocha, která ovšem obecně se změní, zaměníme-li funkce L, N, ježto nemusí $P_i = Q_i$.

Máme-li naproti tomu určitou plochu, jsou při zvolených funkcích P_i, Q_i, jednoznačně stanoveny funkce L, N při daném smyslu normály. Orientujeme-li však normálu plochy opačně, přejde sférický obraz každého bodu plochy v bod koule diametrálně protilehlý. Tento přechod z bodu (u, v) k protilehlému (u_0, v_0) jest vzhledem k známým rovnicím pro parametry isotropických přímek na jednotkové kouli:

$$\frac{X+iY}{1-Z} = \frac{1+Z}{X-iY} = U(u), \quad \frac{X-iY}{1-Z} = \frac{1+Z}{X+iY} = V(v) \qquad (10)$$

dán relacemi

$$U(u) = -\frac{1}{V(v_0)}, \quad V(v) = -\frac{1}{U(u_0)} \qquad (11)$$

čili

$$u = \Phi(v_0), \quad v = \Psi(u_0). \qquad (11')$$

Při tom jest

$$P_1(u) = -\frac{X_v}{S X_u X_v} = -\Phi'(v_0) \frac{\overline{X}_{u_0}}{S \overline{X}_{u_0} \overline{X}_{v_0}},$$

značí-li

$$\overline{X}(u_0, v_0) = X(\Phi, \Psi).$$

Avšak podle suposice

$$X(u_0, v_0) = -\overline{X}(u_0, v_0)$$

a tedy

$$P_1(u) = -\Phi'(v_0) \frac{-X_{u_0}}{S X_{u_0} X_{v_0}} = -Q_1(v_0)\, \Phi'(v_0)$$

a stejně pro ostatní P_i, Q_i. Dále:

$$P_1(u)\, L(u)\, du = -Q_1(v_0)\, L(\Phi)\, \Phi'^2(v_0)\, dv_0, \text{ atd.}$$

Obdržíme tedy tutéž plochu při změněném smyslu normály, nahradíme-li funkce L, N funkcemi

$$L^0 = -N(\Psi)\, \Psi'^2, \qquad N^0 = -L(\Phi)\, \Phi'^2. \qquad (12)$$

Z toho vidíme, že m ů ž e m e v y j á d ř i t i k a ž d o u m i n i m. p l o c h u p o m o c í d v o u d v o j i c f u n k c í L, N p ř i d a n é m t v a r u P_i, Q_i.

Kdybychom měnili funkce L, N, nechávajíce P_i, Q_i beze změny, měnila by se také plocha daná rov. (9'). Tato transformace plochy představuje pohyb v prostoru, transformujeme-li funkce L, N rovnicemi:

$$\overline{L}(u) = L(\varphi)\, \varphi'^2, \quad \overline{N}(v) = N(\psi)\, \psi'^2, \qquad (13)$$

při čemž substituce

$$u = \varphi(\bar{u}),\ v = \psi(\bar{v}) \quad \text{či} \quad \bar{u} = \bar{\varphi}(u),\ \bar{v} = \bar{\psi}(v) \tag{14}$$

stanoví příslušný pohyb sférického obrazu v sobě samém. Změníme-li totiž polohu plochy (9′) tak, že normála $X(u, v)$ přejde v $X(\bar{\varphi}, \bar{\psi})$, změní se funkce P_i, Q_i v

$$\bar{P}_i = \frac{P_i(\bar{\varphi})}{\bar{\varphi}'}, \qquad \bar{Q}_i = \frac{Q_i(\bar{\psi})}{\bar{\psi}'},$$

jak plyne z jejich definice, kdežto funkce L, N, jakožto základní veličiny plochy, jsou při pohybu invariantní, takže plocha v nové poloze je na základě sférického obrazu stanovena rovnicemi:

$$\bar{x} = \int \frac{P_1(\bar{\varphi})}{\bar{\varphi}'} L(u)\, du + \int \frac{Q_1(\bar{\psi})}{\bar{\psi}'} N(v)\, dv, \ldots, \ldots$$

Zavedeme-li nyní parametry $\bar{u}, \bar{v}$ podle (14), obdržíme

$$\bar{x} = \int P_1(\bar{u})\, L(\varphi)\, \varphi'^2\, d\bar{u} + \int Q_1(\bar{v})\, L(\psi)\, \psi'^2\, d\bar{v}$$

a stejně pro ostatní souřadnice. Tím důkaz proveden.

Podobně bychom mohli sledovati i jiné obecné věty o našich vzorcích, jichž specialisací plynou známé výsledky na př. pro *Weierstrassovy vzorce,* které obdržíme vhodnou volbou parametrů. Klademe-li totiž do rovnic (10)

$$U = u, \qquad V = v, \tag{15}$$

dostaneme z (9) snadným počtem při změněném označení

$$v = u_1, \quad -L(u) = F(u), \quad -N(v) = F_1(u_1) \tag{16}$$

vzorce

$$x = \int \frac{1}{2}(1 - u^2) F(u)\, du + \int \frac{1}{2}(1 - u_1^2) F_1(u_1)\, du_1 \tag{17}$$

$$y = \int \frac{i}{2}(1 + u^2) F(u)\, du - \int \frac{i}{2}(1 + u^2) F_1(u_1)\, du_1$$

$$z = \int u F(u)\, du + \int u_1 F_1(u_1)\, du_1,$$

které odvodil Weierstrass. F, F_1 jsou t. zv. Weierstrassovy funkce (nezaměňovati se základní veličinou prvního řádu, kterou jsme výše označili také F, ale která v dalších úvahách již nevystupuje). Z rovnic (11) a (12) vzhledem k (15) a (16) vidíme, že můžeme tutéž plochu vyjádřiti také pomocí funkcí

$$F^0(u) = -\frac{1}{u^4} F_1\left(-\frac{1}{u}\right), \quad F_1^0(u_1) = -\frac{1}{u_1^4} F\left(-\frac{1}{u_1}\right). \tag{18}$$

což je známý výsledek. Podobně aplikací rovnic (13) došli bychom ke vzorcům stanovícím změnu funkcí F, F_1 při pohybu, které odvodil Darboux[4]) pomocí rovinových souřadnic. Pro rotaci kolem osy Z o úhel Θ jest specielně[5])

$$u = \bar{u} e^{-i\theta}, \qquad u_1 = \bar{u}_1 e^{i\theta}, \tag{19}$$

takže

$$\bar{F}(\bar{u}) = F(\bar{u} e^{-i\theta}) e^{-2i\theta}, \qquad \bar{F}_1(\bar{u}_1) = F_1(\bar{u}_1 e^{i\theta}) e^{2i\theta}.$$

Zvolíme-li v rovnicích (10)

$$U(\varrho) = e^{-i\varrho}, \quad V(\varrho_1) = e^{i\varrho_1}$$

a označíme-li

$$L(\varrho) = R(\varrho), \quad N(\varrho_1) = R_1(\varrho_1),$$

dojdeme k vzorcům Ribaucourovým[6])

$$x = \int \sin \varrho R(\varrho) d\varrho + \int \sin \varrho_1 R_1(\varrho_1) d\varrho_1$$

$$y = \int \cos \varrho R(\varrho) d\varrho + \int \cos \varrho_1 R_1(\varrho_1) d\varrho_1$$

$$z = -i \int R(\varrho) d\varrho + i \int R_1(\varrho_1) d\varrho_1.$$

Tyto vzorce stejně jako (17) jsou výhodné pro reálné plochy, které obdržíme, volíme-li veličiny s indexem 1 sdružené k těm, jež jsou označeny touže literou. Tuto vlastnost mají všechny vzorce, které odvodíme, zvolíme-li v (10) funkce U, V sdružené.

Někdy[7]) mohou býti výhodné vzorce symetrické. Klademe-li na př.

$$U = u, \qquad V = -\frac{1}{v}, \qquad -L = G, \qquad N = H, \tag{20}$$

dostaneme z (9) rovnice, které v jiném tvaru odvodil již Björling,[8])

$$x = \int \frac{1}{2}(1 - u^2) G(u) du + \int \frac{1}{2}(1 - v^2) H(v) dv \tag{21}$$

$$y = \int \frac{i}{2}(1 + u^2) G(u) du + \int \frac{i}{2}(1 + v^2) H(v) dv$$

$$z = \int u G(u) du \qquad + \int v H(v) dv.$$

Tyto rovnice liší se od (17) jediným znaménkem a podle (16) a (20) platí mezi oběma vztahy

4) Leçons sur la théorie générale des surfaces, I, 1887, p. 305.

5) l. c., p. 306.

6) A. Ribaucour: Étude des élassoïdes ou surfaces à courbure moyenne nulle. Mém. couronné par l'Académie royale de Belgique, Bruxelles 1881.

7) Na př. k studiu ploch dvojných.

8) Srov. Darboux, l. c., p. 356.

$$G(u) = F(u), \qquad H(v) = -\frac{1}{v^4} F_1\left(-\frac{1}{v}\right). \tag{21'}$$

Podobně pro

$$U(\varrho) = e^{-i\varrho}, \quad V(\sigma) = -e^{i\sigma}, \quad L = R, \quad -N = S \tag{22}$$

obdržíme vzorce:

$$\begin{aligned} x &= \int \sin\varrho\, R(\varrho)\, d\varrho + \int \sin\sigma\, S(\sigma)\, d\sigma \\ y &= \int \cos\varrho\, R(\varrho)\, d\varrho + \int \cos\sigma\, S(\sigma)\, d\sigma \\ z &= -i \int R(\varrho)\, d\varrho - i \int S(\sigma)\, d\sigma, \end{aligned} \tag{23}$$

při čemž podle (16) a (22):

$$R(\varrho) = F(e^{-i\varrho})\, e^{-2i\varrho}, \qquad S(\sigma) = -F(-e^{i\sigma})\, e^{2i\sigma}. \tag{23'}$$

Poslední rovnice jsou ve stejném vztahu k Ribaucourovým, jako (21) k (17). Pro tyto symetrické vzorce je přechod k protilehlému bodu sférického obrazu dán pouhou záměnou parametrů, takže podle (12), (20) a (22) se tím pouze vymění obě funkce G, H a R, S. Je zde tedy možno j e d i n é vyjádření při daném sférickém obraze a dvojnou plochu obdržíme, volíme-li obě funkce stejné. Podmínky reálnosti bychom dostali pomocí (21'), (23') ze známé podmínky pro Weierstrassovy funkce. Naopak z těchto rovnic plyne vztah, který musí splniti F, F_1, aby plocha (17) byla dvojnou.

Vidíme tedy, že z tvaru (9) můžeme snadno odvozovati jednotlivé vzorce speciálních vlastností. Všechny takové rovnice bychom ovšem obdrželi transformací z jediných vzorců na př. (17), obecné vyjádření však nám umožnilo, odvoditi současně vlastnosti společné všem speciálním tvarům, takže můžeme ihned kterýkoliv z nich aplikovati. Další význam oněch vzorců shledávám v tom, že pro některé obecné úvahy jsou samy zcela vhodné. Na doklad toho odvodím z nich Schwarzovy rovnice pro sdruženou plochu a novou, pokud vím, metodu řešení problému Björlingova.

2. *Formule Schwarzovy.* K dosažení prvého stačí definovati plochu sdruženou k (9) rovnicemi:

$$x_0 = -i \int \frac{X_v}{f} L\, du + i \int \frac{X_u}{f} N\, dv, \quad y_0 = \ldots, \quad z_0 = \ldots \tag{24}$$

a řešiti evidentní rovnice

$$\mathbf{S} X_u X_u = 0, \qquad \mathbf{S} X_v X_u = f, \qquad \mathbf{S} X X_u = 0$$

podle X_u, Y_u, Z_u. Determinant soustavy

$$|X_u\, Y_v\, Z| = if,$$

takže

$$X_u = i(ZY_u - YZ_u), \ldots$$

Analogicky obdržíme

$$X_v = -i(ZY_v - YZ_v), \dots$$

a dosazením do diferencovaných rovnice (24)

$$dx_0 = Z\left(-\frac{Y_v}{f} L\,du - \frac{Y_u}{f} N\,dv\right) - Y\left(-\frac{Z_v}{f} L\,du - \frac{Z_u}{f} N\,dv\right), \dots$$

takže vzhledem k (9)

$$\begin{aligned} dx_0 &= Z\,dy - Y\,dz, \\ dy_0 &= X\,dz - Z\,dx, \\ dz_0 &= Y\,dx - X\,dy, \end{aligned}$$

což jsou hledané vzorce.

3. *Björlingův problém.* Tímto názvem označuje se úloha: *Stanoviti minimální plochu procházející danou křivkou a mající podél ní předepsané roviny tečné,* jinými slovy *sestrojiti minimální plochu, je-li dán nekonečně úzký proužek této plochy.*

Ukáži, jak lze stanoviti základní veličiny L, N hledané plochy při libovolných parametrech u, v za obvyklého předpokladu, že křivka není minimální a proužek je analytický, t. j. že souřadnice bodů dané křivky:

$$\xi = \xi(\tau), \quad \eta = \eta(\tau), \quad \zeta = \zeta(\tau) \tag{25}$$

a směrové kosiny normály plochy podél této křivky:

$$X = \Xi(\tau), \qquad Y = H(\tau), \qquad Z = Z(\tau) \tag{26}$$

jsou analytickými funkcemi parametru křivky τ. Aby úloha byla řešitelna, musí ovšem tyto funkce splňovati podmínky:

$$S\,\Xi^2 = 1, \qquad S\,\Xi\,d\xi = 0. \tag{27}$$

Podél dané křivky platí mimo (26) ještě vztahy

$$x = \xi, \quad y = \eta, \quad z = \zeta, \tag{28}$$

takže máme celkem čtyři nezávislé rovnice, které jsou v platnosti ve všech bodech dané křivky (25). Z těchto rovnic stanovíme základní veličiny plochy $L(u)$, $N(v)$ jako funkce u resp. v. Diferencujme rovnice (28) a za dx, dy, dz dosaďme ze vzorců (9). Tím získáme rovnice

$$\begin{aligned} X_v L(u)\,du + X_u N(v)\,dv &= -f(u, v)\,\xi'(\tau)\,d\tau \\ Y_v L(u)\,du + Y_u N(v)\,dv &= -f(u, v)\,\eta'(\tau)\,d\tau \\ Z_v L(u)\,du + Z_u N(v)\,dv &= -f(u, v)\,\zeta'(\tau)\,d\tau. \end{aligned}$$

Pak vypočtěme z libovolných dvou relací z (26) u, v jako funkce τ. Dosadíme-li do hořejších rovnic, vidíme, že nemohou být nezávislé, mají-li stanoviti L, N. Skutečně z druhé podmínky (27) plyne vzhledem k (26), že determinant

$$\begin{vmatrix} X_v & X_u & \xi' \\ Y_v & Y_u & \eta' \\ Z_v & Z_u & \zeta' \end{vmatrix} = 0,$$

neboť X, Y, Z jsou úměrny minorum prvků posledního sloupce. Lze tedy vypočísti L, N z hořejších rovnic. Ostatně řešení můžeme provésti velmi snadno, násobíme-li je po řadě X_u, Y_u, Z_u a sečteme

$$L(u)\,du = -\mathbf{S}\,X_u\,\xi'(\tau)\,d\tau.$$

Stejně pro N, takže celkem

$$L(u) = -\mathbf{S}\,X_u\,\xi'(\tau)\frac{d\tau}{du}, \quad N(v) = -\mathbf{S}\,X_v\,\xi'(\tau)\frac{d\tau}{dv} \tag{29}$$

nebo, zavedeme-li P_i, Q_i podle (7), (8),

$$\left.\begin{aligned} L(u) &= f(u, v)\,[Q_1(v)\,\xi'(\tau) + Q_2(v)\,\eta'(\tau) + Q_3(v)\,\zeta'(\tau)]\,\frac{d\tau}{du}, \\ N(v) &= f(u, v)\,[P_1(u)\,\xi'(\tau) + P_2(u)\,\eta'(\tau) + P_3(u)\,\zeta'(\tau)]\,\frac{d\tau}{dv}. \end{aligned}\right\} \tag{29'}$$

Vyjádříme-li nyní v první rovnici v a τ pomocí u a v druhé u a τ pomocí v, jsou hledané funkce stanoveny podél dané křivky. Vzhledem k učiněným předpokladům jsou tyto funkce analytické, takže vzorce (29) či (29') platí v celém oboru komplexní proměnné u resp. v, v němž jsou L, N analytické. Odvozené vzorce podávají tedy úplné řešení dané úlohy.

Zbývá dodati, že funkce L, N a tedy i plocha hledaná je stanovena j e d n o z n a č n ě, jsou-li jednoznačné funkce Ξ, H, Z. V rovnicích (10) vystupující funkce U, V musí býti totiž jednoznačné i s funkcemi inversními, má-li přiřadění bodů na kouli a parametrů u, v býti oboustranně jednoznačné.[10]) Pak pro body na kontuře jest

$$u = \mathfrak{U}(\tau), \qquad v = \mathfrak{V}(\tau), \tag{30}$$

kde $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$ jsou funkce jednoznačné. Neplatí to ovšem obecně o funkcích inversních

$$\overline{\mathfrak{U}}(u) = \tau, \qquad \overline{\mathfrak{V}}(v) = \tau, \tag{30'}$$

takže také odtud odvozené vztahy mezi u a v

$$v = \mathfrak{V}(\overline{\mathfrak{U}}(u)) \quad \text{a} \quad u = \mathfrak{U}(\overline{\mathfrak{V}}(v))$$

budou obecně mnohoznačné. Sférický obraz dané kontury je však jednoznačně stanoven, tedy obě poslední rovnice musí vyjadřovati tutéž závislost, takže

$$v = \mathfrak{V}\{\overline{\mathfrak{U}}\,[\mathfrak{U}\,(\overline{\mathfrak{V}}(v))]\} \quad \text{čili} \quad \overline{\mathfrak{U}}\,[\mathfrak{U}\,(\overline{\mathfrak{V}}(v))] = \overline{\mathfrak{V}}(v).$$

Stejně plyne

$$\overline{\mathfrak{V}}\,[\mathfrak{V}\,(\overline{\mathfrak{U}}(u))] = \overline{\mathfrak{U}}(u).$$

---

[10]) Na taková vyjádření jednotkové koule omezíme své úvahy.

Tedy do rovnic (30′) stanovících τ jako funkci u či v je nutno klásti za $\overline{\mathfrak{U}}$, $\overline{\mathfrak{V}}$ takové funkce inversní — označme je $\mathfrak{U}^*$, $\mathfrak{V}^*$ — které vyhovují hořejším podmínkám, definované tedy — a to jednoznačně — rovnicemi

$$\mathfrak{U}^*(\mathfrak{U}(t)) = t, \qquad \mathfrak{V}^*(\mathfrak{V}(t)) = t. \tag{31}$$

Učiníme-li tak, jsou zřejmě také funkce L, N jednoznačně stanoveny rovnicemi (29) či (29′).

Specielně pro vzorce (17) přejdou zmíněné rovnice v následující vzorce, stanovící Weierstrassovy funkce plochy minimální, která prochází danou křivkou a podél ní má předepsané roviny tečné:

$$\begin{aligned} F(u) &= \frac{1}{(1+u\,u_1)^2}\left[(1-u_1^2)\,\xi' - i(1+u_1^2)\,\eta' + 2u_1\,\zeta'\right]\frac{d\tau}{du} \\ F_1(u_1) &= \frac{1}{(1+u\,u_1)^2}\left[(1-u^2)\,\xi' + i(1+u^2)\,\eta' + 2u\,\zeta'\right]\frac{d\tau}{du_1}. \end{aligned} \tag{32}$$

Jakožto aplikaci uvedené metody odvodím vzorce pro plochy, které protínají libovolný válec podél šroubovice pod stálým úhlem. Volíme-li za τ oblouk s kolmého řezu válce, na němž leží šroubovice, můžeme její rovnice psáti ve tvaru:

$$\xi = \xi(s), \qquad \eta = \eta(s), \qquad \zeta = qs.$$

Tečny její svírají pevný úhel $\varepsilon = \operatorname{arctg} q$ s rovinou (xy) a podle (27) jsou splněny podmínky

$$Z = \gamma = \text{const.}, \quad \Xi\xi' + H\eta' + \gamma q = 0, \quad \Xi^2 + H^2 + \gamma^2 = 1,$$

odkud

$$\Xi^2 + 2\gamma q\xi'\,\Xi + \gamma^2 q^2 + (\gamma^2 - 1)\,\eta'^2 = 0,$$

takže

$$\Xi = -\gamma q\xi' + \beta\eta', \qquad H = -\beta\xi' - \gamma q\eta', \tag{33}$$

při čemž

$$\beta = \pm\sqrt{1 - \gamma^2(1+q^2)}. \tag{33'}$$

Tato konstanta je reálná, neboť

$$\gamma^2(1+q^2) = \frac{\gamma^2}{\cos^2\varepsilon} \leqq 1;$$

úhel, který svírá normála plochy s osou z, nemůže totiž býti menší než ε, má-li tečná rovina plochy procházeti tangentou šroubovice.

Nyní aplikujme naši metodu. Z rovnic (10) plyne

$$u = \frac{\beta - \gamma q i}{1-\gamma}(\eta' - i\xi'), \qquad u_1 = \frac{\beta + \gamma q i}{1-\gamma}(\eta' + i\xi').$$

Označíme-li tedy

$$c = \frac{\beta + \gamma q i}{1+\gamma} = \frac{1-\gamma}{\beta - \gamma q i} \tag{34}$$

a c_1 hodnotu sdruženou, bude

$$cu = \eta' - i\xi', \quad c_1 u_1 = \eta' + i\xi', \quad c c_1 u u_1 = 1. \tag{35}$$

Ze vzorců (32) obdržíme tedy

$$F(u) = \frac{(1-\gamma)^2}{4}[\xi' - i\eta' - u_1^2(\xi' + i\eta') + 2u_1 q]\frac{ds}{du}$$
$$= \frac{(1-\gamma)^2}{4i}[c_1 u_1 + c u u_1^2 + 2qi u_1]\frac{ds}{du} = \frac{1-\gamma^2}{4iu}\left(c_1 + \frac{1}{c_1} + 2qi\right)\frac{ds}{du},$$

takže podle (34)

$$F(u) = \frac{q - \beta i}{2u}\frac{ds}{du}, \qquad F_1(u_1) = \frac{q + \beta i}{2u_1}\frac{ds}{du}. \tag{36}$$

Vypočteme-li pak s z rovnic (35) s ohledem na podmínky (31), jest

$$\begin{aligned} F(u) &= c\frac{q-\beta i}{2u}[\eta' - i\xi']^{*'}(cu), \\ F_1(u_1) &= c_1\frac{q+\beta i}{2u_1}[\eta' + i\xi']^{*'}(c_1 u_1). \end{aligned} \tag{37}$$

Kdyby se nám nejednalo o tyto funkce, kdybychom chtěli získati přímo rovnice plochy, vyšli bychom od tvaru (36) a stanovili bychom

$$(1-u^2)F(u)\,du = \frac{q-\beta i}{2}\left\{\left(c - \frac{1}{c}\right)d\eta + i\left(c + \frac{1}{c}\right)d\xi\right\}$$
$$= (1 + q\beta i)\,d\xi + i\gamma(1+q^2)\,d\eta$$

a stejně další dva výrazy vystupující ve vzorcích (17), čímž bychom obdrželi

$$\begin{aligned} 2x &= \Re\,[(1 + q\beta i)\,\xi + i\gamma(1+q^2)\,\eta] \\ 2y &= \Re\,[(1 + q\beta i)\,\eta - i\gamma(1+q^2)\,\xi] \\ 2z &= \Re\,(q - \beta i)\,s, \end{aligned} \tag{38}$$

kteréžto rovnice plynou ovšem rychleji přímo z formulí Schwarzových.

Aplikujme ještě vzorce (37) na případ, kdy kolmý řez válce je logaritmická spirála. Tím uvažovaná šroubovice přejde ve spirálu:

$$\xi = pe^{a\tau}\cos\tau, \qquad \eta = pe^{a\tau}\sin\tau, \qquad \zeta = me^{a\tau}$$

$$\tau = \frac{1}{a}\log(\mu s), \qquad \mu = \frac{a}{p\sqrt{1+a^2}},$$

$$\xi(s) = \frac{p\mu}{2}s\left[(\mu s)^{\frac{i}{a}} + (\mu s)^{-\frac{i}{a}}\right], \quad \eta(s) = \frac{p\mu}{2i}s\left[(\mu s)^{\frac{i}{a}} - (\mu s)^{-\frac{i}{a}}\right],$$

$$\eta' - i\xi' = n(\mu s)^{\frac{i}{a}}, \qquad n = \sqrt{\frac{1-ia}{1+ia}},$$

$$[\eta' - i\xi']^* (t) = \frac{1}{\mu} \left(\frac{n}{t}\right)^{ia}.$$

Derivací a dosazením do (37) konečně

$$F(u) = -\frac{p\sqrt{1+a^2}}{2} \left(\frac{n}{c}\right)^{ia} \cdot \frac{\beta + qi}{u^{2+ia}},$$

$$F_1(u_1) = -\frac{p\sqrt{1+a^2}}{2} (nc_1)^{ia} \cdot \frac{\beta - qi}{u_1^{2-ia}},$$

takže můžeme psáti

$$F(u) = C u^{-2-ia}, \qquad F_1(u_1) = C_1 u_1^{-2+ia}, \tag{39}$$

klademe-li

$$C = -\frac{p}{2} (\beta + qi) \sqrt{1+a^2}\, c^{-ia} e^{a \operatorname{arc\,tg} a} \tag{39'}$$

a značí-li C_1 komplexní hodnotu sdruženou. Tím jsme stanovili Weierstrassovy funkce uvažovaných ploch,[11]) které, jak známo,[12]) přísluší plochám spirálním, takže můžeme vysloviti větu:

Minimální plochy, jež protínají spirální válec podél libovolné šroubovice pod stálým úhlem, jsou spirální, jejíž platnost ovšem je předem zřejma[11]) ze základní vlastnosti spirálních ploch. Větu obrácenou můžeme však na základě právě získaných výsledků zúžiti dvojím způsobem. Volíme-li nejprve $\gamma = 0$, je podle (33′), (34) $\beta = c = \pm 1$ a C přejde v C' stanovené rovnicí:

$$C' = -\frac{p}{2} \sqrt{1+a^2} (\pm 1)^{-ia} e^{a \operatorname{arc\,tg} a} (qi \pm 1).$$

Klademe-li zase $q = 0$ a píšeme-li $\delta = \arccos \gamma$, bude C rovno

$$\overline{C} = \mp \frac{p}{2} \sin \delta \sqrt{1+a^2} (\pm 1)^{-ia} e^{a\left(\operatorname{arc\,tg} a - i \log \operatorname{tg} \frac{\delta}{2}\right)}. \tag{40}$$

Je patrno, že můžeme vhodnou volbou p, a, q, resp. p, a, δ dáti C' i $\overline{C}$ libovolnou komplexní hodnotu. Avšak každé minimální ploše spirální odpovídají funkce tvaru (39), takže máme tyto dvě věty:

Každá reálná minimální plocha spirální má za geodetickou čáru cylindricky-konickou šroubovici, jinými slovy válec opsaný takové ploše rovnoběžně s její osou má za kolmý řez logaritmickou spirálu a dotýká se plochy podél (obecně) prostorové spirály.

Každá reálná minimální plocha spirální má logaritmickou spirálu za křivku křivosti.

---

11) S. Lie udává bez odvození pro tyto plochy funkce poněkud obecnější

$$F(u) = (C_1 + C_2 t)\, u^{m_1 + m_2 i},$$

které však zahrnují všechny plochy rozvinutelné na spirální. (Math. Ann. XV. 504.)

12) Darboux, l. c., p. 308.

Z rovnice (40) konečně plyne pro dvě plochy, jež se liší jenom hodnotou δ, že vhodnou změnou velikosti jedné z nich lze ji ztotožniti s jednou plochou asociovanou k ploše druhé. Ježto pak změna velikosti je u ploch spirálních vlastně deformací, můžeme říci: *Minimální plochy, jež mají tutéž logaritmickou spirálu za křivoznačnou čáru, jsou navzájem rozvinutelny.*

K jiné větě dojdeme ze vzorců (36) pro $\gamma = 0$

$$F(u) = \frac{q \mp i}{2u} \frac{ds}{du}, \qquad F_1(u_1) = \frac{q \pm i}{2u_1} \frac{ds}{du_1}. \tag{41}$$

Zavedeme-li úhel ε a délku oblouku šroubovice $\sigma = s \sec \varepsilon$, jest

$$F(u) = \frac{e^{\pm i\varepsilon}}{2iu} \frac{d\sigma}{du}, \qquad F_1(u_1) = \frac{ie^{\mp i\varepsilon}}{2u_1} \frac{d\sigma}{du_1}. \tag{41'}$$

Z rovnic (41) jest sice zřejmá platnost věty, kterou odvodil Lie:[13]) »Minimální plocha, která se dotýká válce podél nerovinné geodetické čáry, přechází deformací spojenou s homotetickou transformací v minimální plochu, jež má kolmý řez válce za čáru geodetickou,« na základě rovnic (41′) můžeme však vysloviti tento podrobnější výsledek:

Zvětšíme-li jednu ze dvou minimálních ploch, dotýkajících se téhož válce podél dvou šroubovic, tak, aby oblouky těchto křivek mezi týmiž dvěma plošnými přímkami se sobě rovnaly, jsou obě plochy navzájem rozvinutelny a sobě příslušné elementy svírají spolu stálý úhel rovný úhlu, pod nímž se na válci protínají obě šroubovice.

Po zmíněném zvětšení jest totiž σ v rovnici (41′) pro obě plochy t o u ž funkcí u i u_1 (před tím byly oblouky šroubovice jen úměrné), takže obě plochy jsou navzájem asociovány, při čemž poměr Weierstrassových funkcí F resp. F_1 jest

$$e^{\pm i(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)} \quad \text{resp.} \quad e^{\mp i(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)},$$

má-li jedna šroubovice $q = \operatorname{tg} \varepsilon_1$, druhá $q = \operatorname{tg} \varepsilon_2$. Odtud ze známé vlastnosti ploch asociovaných[14]) plyne hořejší výrok.

4. Dodatek. Klademe-li do rovnic (9′) $dv = 0$ a vynecháme-li integrační konstanty, obdržíme rovnice

$$\xi_1 = \int P_1(u) L(u)\, du, \qquad \eta_1 = \int P_2(u) L(u)\, du,$$
$$\zeta_1 = \int P_3(u) L(u)\, du, \tag{42}$$

které představují m i n i m á l n í k ř i v k u při libovolném vyjádření koule jednotkové. Že naopak každou minimální křivku — vyjma

[13]) S. Lie: Beiträge zur Theorie der Minimalflächen II., Math. Ann. XV. S. 477.

[14]) Na př. Bianchi-Lukat: Vorlesungen über Differentialgeometrie, 1910, konec § 200, s. 373.

přímky — lze v tomto tvaru psáti, plyne ze známého faktu, že translací libovolné minimální křivky podél jiné vytvoří se minimální plocha a vzorce (9′) platí pro každou nerozvinutelnou plochu minimální. Mezi všemi minimálními plochami, které možno vésti určitou minimální křivkou, jest vždy jediná plocha dvojná, jež je onou křivkou stanovena (až na rovnoběžné posunutí). Přiřadíme-li bodům (u) křivky (42) body $(u, \varkappa)$, při čemž $\varkappa$ je konstanta, na jednotkové kouli, vyplní tyto body isotropickou přímku, na ní ležící. Toto sférické zobrazení jest patrně totožné s Gaussovým zobrazením křivky (42), jakožto křivky na minimální ploše, na př. dvojné, jí stanovené, a je tedy analogické se sférickým obrazem binormál křivky, jež obdržíme Gaussovým zobrazením pomocí tečnové plochy, stanovené křivkou.

V rovnicích (42) je funkce L libovolná; měníme-li ji při stálém tvaru funkcí P_i, mění se křivka rovnicemi těmi vyjádřená. Snadno zjistíme, jak se mění L při pohybu křivky v prostoru. Uvažujme příslušnou plochu dvojnou a užijme pro ni k vůli zjednodušení úvah vzorců symetrických, takže její rovnice můžeme psáti ve tvaru

$$\begin{aligned} x &= \int P_1(u) L(u)\, du + \int P_1(v) L(v)\, dv \\ y &= \int P_2(u) L(u)\, du + \int P_2(v) L(v)\, dv \\ z &= \int P_3(u) L(u)\, du + \int P_3(v) L(v)\, dv. \end{aligned} \tag{43}$$

Při paralelním posuvu se L nemění ani v těchto rovnicích, ani v (42). Křivkou je však plocha (43) jednoznačně stanovena až na toto posunutí, funkce L musí tedy míti pro všechny polohy v obou rovnicích týž tvar, takže se při pohybu křivky transformuje zcela stejně, jako při pohybu plochy, t. j. první rovnicí (13), je-li pohyb dán transformací (14). (Srov. E. Goursat, Acta Math. *11*, p. 141.)

Vyjádření minimální plochy dvojné rovnicemi (43) je při zvolených funkcích P_i jednoznačné, neboť vzorce ty jsou symetrické a obě funkce rovny L. Z toho plyne ihned j e d n o z n a č n o s t vyjádření minimální křivky (42).

Na základě toho můžeme také vyložiti d v o j z n a č n o s t obecných vzorců (9′). Pokládáme-li s Lieem minimální plochu za translační plochu minimálních křivek, jest jedna z nich dána rovnicemi (42) a druhá rovnicemi

$$\xi_2 = \int Q_1(v) N(v)\, dv, \quad \eta_2 = \int Q_2(v) N(v)\, dv,$$
$$\zeta_2 = \int Q_3(v) N(v)\, dv.$$

Ježto obecně $P_i \neq Q_i$, jsou obě křivky vyjádřeny různým způsobem. Zaměníme-li oba způsoby, změní se funkce L, N. Můžeme tedy také plochu (9′) vyjádřiti dvěma a jen dvěma způsoby, jež jsou ovšem totožné s těmi, o nichž jsme na počátku mluvili.

Pomocí zmíněného vyjádření minimálních křivek lze odvoditi různé poznatky o křivkách, jichž translací vznikají minimální plochy určitých vlastností. Uvedu některé z nich bez odvození:

Plocha adjungovaná k ploše dvojné jest translační plochou dvou středově souměrných křivek minimálních.

Translační křivky reálných minimálních ploch rozvinutelných na plochy spirální, jsou minimální prostorové spirály o sdružených komplexních exponentech. (Prostorovou spirálou (reálnou či imaginární) rozumím křivku, která se otočením kolem reálné osy o reálný úhel Θ zvětší v poměru $e^{a\Theta}$, při čemž konstantu a (obecně komplexní) nazývám jejím exponentem.) Jsou-li exponenty ryze imaginární, jsou příslušné plochy rozvinutelné na plochy rotační; pro reálné exponenty obdržíme minimální plochy spirální.

Spirála, jejíž exponent je roven nule, přechází otočením (a posunutím) v sebe samu, lze ji tedy bez ohledu na reálnost nazvati kruhovou šroubovicí. Pak můžeme vysloviti větu:

Šroubové plochy minimální jsou translačními plochami homotetických minimálních šroubovic kruhových. Specielně: katenoid vzniká translací dvou středově souměrných minimálních šroubovic, jež leží na válci opsaném katenoidu podél hrdelní kružnice; ortogonální plocha šroubová je geometrickým místem středů tetiv minimální šroubovice, která je shodná s křivkou sdruženou.

Konečně budiž podotknuto, že větu platnou pro katenoid lze zobecniti také tímto způsobem:

Minimální plocha s rovinnou geodetickou čarou je geometrickým místem středů úseček spojujících body dvou minimálních šroubovic, které leží na válci opsaném ploše podél oné čáry a na ní se protínají.

*

Remarques sur la théorie des surfaces minima.

(Extrait de l'article précédent.)

En partant de la représentation sphérique, l'auteur donne les formules générales (9) pour les coordonnées rectangulaires des points d'une surface minima. Les u, v désignent les paramètres des lignes de longueur nulle de la surface, X, Y, Z les cosinus directeurs de la normale, X_u, X_v leurs dérivées partielles. f est déterminé par l'équation

$$d\sigma^2 = 2f du dv,$$

$d\sigma$ étant l'élément linéaire de la représentation sphérique. L, N désignent deux fonctions arbitraires. On démontre aisément, pour ces formules, quelques résultats généraux, analogues aux résultats valables, p. ex., pour celles de Weierstrass. D'ailleurs, les équations (9) contiennent, comme cas particuliers, les formules de Weierstrass, de Ribacour etc. Il paraît avantageux, dans des recherches d'ordre théorique, de se baser sur la forme générale (9).

Ainsi, l'auteur établit, d'une manière fort simple, les formules de Schwarz donnant la surface adjointe. Ces équations offrent, de même, une solution du problème de Björling, en déterminant par des expressions pas trop compliquées (29) les fonctions arbitraires L, N de la surface minima passant par un contour donné (25) et admettant, en chaque point de ce contour, une normale déterminée par ses cosinus directeurs (26). Pour obtenir, respectivement, les fonctions $L(u)$, $N(v)$, il suffit d'exprimer dans (29) v, τ en fonction de u, ou u, τ en fonction de v, en faisant usage de (26). Pour déterminer les fonctions respectives de Weierstrass, on a les équations (32).

Comme application, sont déterminées ces fonctions pour une surface minima coupant un cylindre donné suivant une ligne géodésique et sous un angle constant. On peut conclure, de la forme de ces fonctions, pour le cas particulier d'un cylindre spiral, p. ex. ceci: Chaque surface minima spirale (réelle) admet une géodésique spirale, gauche en général, et une spirale logarithmique comme ligne de courbure. En outre: les surfaces minima admettant la même spirale logarithmique come ligne de courbure sont applicables l'une sur l'autre. L'auteur complète un théorème de S. Lie (Math. Ann. XV, 477) de la manière suivante: Si l'on fait accroître une des deux surfaces minima, touchant le même cylindre suivant deux lignes géodésiques, de sorte que les arcs de ces courbes, pris entre les mêmes génératrices rectilignes, soient égaux, les deux surfaces sont applicables l'une sur l'autre et les éléments correspondants font un angle constant, égal à celui sous lequel se coupent les deux géodésiques en question.

Enfin, l'auteur donne plusieurs théorèmes sur la relation entre les courbes minima et les surfaces minima engendrées par une translation de ces courbes.