Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Jan Srb

O rozkladu rovinných kolineací v produkt harmonických homologií

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 65 (1936), No. 2, 77--83

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/120843`

O rozkladu rovinných kolineací v produkt harmonických homologií.

Jan Srb, Nový Bohumín.

(Došlo dne 23. listopadu 1934.)

Podle poznámky v „Geometrii projektivní" str. 276, pana prof. J. Vojtěcha dokázal *M. W. Haskell* v Transactions Amer. math. soc. 7 (1906) analyticky, že každou rovinou kolineaci typu [000] je možno vytvořit jako produkt (obecně) tří involučních homologií. V následujícím dokazuji synthęticky: Každou kolineaci dvou soumístných polí lze rozložiti v produkt nejvýše tří harmonických homologií a uvádím konstrukce těchto homologií.

A. Kolineace nehomologické.

1. *Rovinnou kolineaci typu* [(000)] *lze vždy rozložit v produkt dvou harmonických homologií.* V kolineaci dvou soumístných polí ϱ a ϱ' typu [(000)], t. j. s jednou samodružnou přímkou a jedním samodružným bodem na ní, buď X bodem samodružným a jím jdoucí x samodružnou přímkou s indukovanou parabolickou projektivností korespondujících bodů. Dvě libovolné nesamodružné řady bodové na korespondujících přímkách a, a' polí ϱ, ϱ' jdoucích bodem samodružným X mají střed perspektivnosti S (jiný než X) na x. Zvolme tento bod středem a přímku o jdoucí bodem X tak, aby $Dp\,(aa'xo) = -1$, osou harmonické homologie. Touto přejde pole ϱ' v soumístné pole ϱ_1, kolineárné se soumístným polem ϱ. Řada bodová na a' přejde v korespondující řadu na a. Kolineace polí ϱ, ϱ_1 má na přímce a řadu samodružných bodů, jest tedy homologií. Jsou-li $S \equiv O'$ body polí ϱ, ϱ' a S', O korespondující body polí ϱ', ϱ na přímce x, jest podle známé vlastnosti parabolicky projektivních soumístných řad bodových $Dp\,(XSS'O) = -1$. Harmonickou homologií přejde proto bod S' v bod $S_1 \equiv O$. Má tedy homologie polí ϱ, ϱ_1 na samodružné přímce x dvojici bodů $S \equiv O_1$ a $S_1 \equiv O$ obapolně i odpovídajících a jest proto homologií harmonickou.

2. *Rovinnou kolineaci typu* [000] *lze vždy jedinou harmonickou homologií převést v kolineaci typu* [(000)]. V rovinné kolineaci polí

ϱ, ϱ' typu [000] druhu prvého, t. j. s reálným invariantním trojúhelníkem, buďte X, Y, Z reálné samodružné body a A, A' dvojina korespondujících bodů neležících na žádné samodružné přímce. Průsečíky sdružených paprsků svazků indukovaných kolineací v bodech A, A' vytvoří pravou kuželosečku k procházející body A, A', X, Y, Z. Bod P buď pólem přímky AA' ke k. Je-li bod L průsečík této přímky s jednou stranou, ku př. XY, invariantního trojúhelníka a prochází-li spojnice bodu L a protějšího vrcholu Z invariantního trojúhelníka pólem P, zvolme na LP libovolný bod S (jiný než L a Z) středem a tečnu o v bodě Z ke k osou harmonické homologie. Touto přejde pole ϱ' v soumístné pole ϱ_1 kolineárné se soumístným ϱ. Přímka ZA' přejde v přímku ZA. Protože střed S harmonické homologie leží na přímce LZ ne však v bodě L, který je středem perspektivnosti řad bodových indukovaných na přímkách ZA, ZA' kolineací polí ϱ a ϱ', neprochází jím mimo ZS žádná přímka spojující korespondující body obou řad. Má tedy kolineace polí ϱ, ϱ_1 na samodružné přímce ZA jediný samodružný bod Z. Kdyby v této kolineaci existovala ještě jedna přímka samodružná, musela by procházet bodem Z. V obou soumístných svazcích paprskových indukovaných kolineací polí ϱ, ϱ' v samodružném bodě Z není však mimo ZA a ZA' žádných dvou korespondujících paprsků, které by harmonicky oddělovaly střed S a osu o harmonické homologie. Kdyby existovaly takové přímky b, b', protínaly by kuželosečku k v bodech B, C'. Přímka BC' protla by přímku AA' v pólu P' poláry ZP a přímky AC' a BA' by se protínaly v bodě ležícím na této poláře. Tento bod by musel zároveň ležet na přímce XY, která je osou obou soumístných projektivních kvadratických řad na k, perspektivních s oběma soumístnými svazky se středem Z. Tedy obě přímky AC' a BA' by se protínaly v bodě L na AA'. Nemohou proto harmonickou homologií (S, o), mimo přímky AZ a $A'Z$, splynout žádné dvě korespondující přímky kolineárných polí ϱ, ϱ' a kolineace soumístných polí ϱ, ϱ_1 je typu [(000)]. Nechť nyní neprochází žádná přímka, spojující průsečík přímky AA' a strany s protějším vrcholem invariantního trojúhelníku, pólem P. Přímky spojující sdružené body na korespondujících paprscích svazků indukovaných kolineací polí ϱ, ϱ' v bodech A, A' obalí řadu kuželoseček se společnými tečnami AA', XY, YZ, ZX a řadou $[S]$ dotyčných bodů na AA', projektivnou s oběma svazky $A[a]$, $A'[a']$. Probíhá-li totiž bod M kvadratickou řadu na k, je každý trojúhelník MAA' opsán jedné kuželosečce řady a podle limitního případu věty Desargovy promítá se vrchol M a dotyčný bod S příslušné kuželosečky na AA' z bodu Z dvojinou paprskové involuce určené pevnými dvojinami XZ, YZ a $AZ, A'Z$. Jest tedy $[M] \barwedge [S]$, $[M] \barwedge [a']$ proto $[S] \barwedge [a']$. Promítněme řadu $[S]$ z bodu P paprskovým svazkem $[a''] \barwedge [a']$. Společnému paprsku

$A'P$ obou svazků koresponduje ve svazku $[a'']$ paprsek PA, ve svazku $[a']$ paprsek AA'. Oba svazky jsou tedy prostě projektivní a vytvoří jednoduchou kuželosečku h procházející bodem A' na k. PA' je tečnou kuželosečky k v A' a AA' tečnou kuželosečky h v tomtéž bodě. Mají tedy h a k ve společném bodě A' různé tečny a protínají se proto ještě alespoň v jednom reálném bodě M, ne však v některém z bodů A, X, Y, Z, protože paprskům svazku $[a']$, procházejícím bodem samodružným korespondují ve svazku $[a'']$ přímky spojující bod P s průsečíkem AA' a protější strany invariantního trojúhelníka, které podle předpokladu neprochází tímto samodružným bodem a tečna kuželosečky h v bodě P prochází bodem A. Zvolme harmonickou homologii středem $S = (PM, AA_1)$ a osou o tečnou kuželosečky k v bodě M. Touto přejde pole ϱ' v soumístné pole ϱ_1 kolineárné se soumístným polem ϱ. Přímka $a' = A'M$ přejde v $a = AM$ a bod A' v bod A. V rovinné kolineaci polí ϱ, ϱ_1 jsou tedy přímka a a bod A prvky samodružné. Na přímce a však není, mimo bod A, jiného samodružného bodu protože střed harmonické homologie S je dotyčným bodem pravé kuželosečky obalené spojnicemi korespondujících bodů polí ϱ, ϱ' na přímkách a, a', tedy mimo tečnu AA' jím neprochází žádná přímka spojující sdružené body přímek a, a'. Kdyby v kolineaci polí ϱ, ϱ_1 existovala ještě jedna samodružná přímka, procházela by bodem A. Osa o harmonické homologie je tečnou kuželosečky k v bodě M nemá s ní tedy jiného společného bodu, t. j. pouze přímky a, a' odpovídající si ve svazcích $[a]$, $[a']$ se na ní protnou a splynou touto transformací. Jsou tedy bod A a jím jdoucí přímka a jedinými samodružnými prvky kolineace polí ϱ a ϱ_1. Důkaz i konstrukce jsou platné i pro kolineaci typu [000] druhého druhu, t. j. s třemi různými body samodružnými, jedním reálným a dvěma imaginárními sdruženými. V tomto případě jen nikdy neprochází přímka spojující bod P s průsečíkem přímky AA' a přímky samodružné XY, samodružným bodem Z. Je-li Z reálným samodružným bodem na k není tato proťata přímkou XY reálně. Padne proto vždycky přímka spojující pól reálné sečny AA' a průsečík této s přímkou XY do té části roviny, rozdělené tečnami z bodu P ke k vedenými, ve které neleží k. Paprsková involuce pak, kterou se z bodu Z promítají řady $[M]$ a $[S]$ je určena jen jednou družinou reálných paprsků ZA, ZA'. Kvadratická však, kterou vytíná na k je určena středem $L = (XY, AA')$.

3. *Rovinnou kolineaci typu* [(00)0] *je vždy možno buď jedinou harmonickou homologií převést v kolineaci typu* [(000)], *nebo rozložit v produkt dvou harmonických homologií.* V kolineaci dvou soumístných polí ϱ, ϱ' typu [(00)0], t. j. se dvěma různými reálnými přímkami a dvěma různými reálnými body samodružnými, buďte X, Y body, přímka x, procházející bodem X (ne však Y) a $y = XY$

přímkami samodružnými s indukovanými projektivnostmi typu [(00)] a [00]. A, A' buďte dva korespondující body, které neleží na žádné přímce samodružné. Sestrojme opět jednoduchou kuželosečku k vytvořenou průsečíky korespondujících paprsků svazků indukovaných touto kolineací v bodech A a A', která prochází body A, A', Y a v bodě X se dotýká přímky x. Padne-li pól P poláry AA' ke k na samodružnou přímku y (na x padnout nemůže), jest $Dp\,(XA, XA', x, y) = -1$, tedy soumístné svazky paprskové, indukované kolineací v samodružném bodě X, jsou involuční. Zvolme harmonickou homologii osou $o \equiv y$ a libovolným bodem S na x (mimo X) jako středem. Touto přejde pole ϱ' v soumístné pole ϱ_1 kolineárné s ϱ. Kolineace polí ϱ, ϱ_1 je homologie protože všechny sdružené paprsky svazků se společným středem X splynou a tato má svazek samodružných paprsků. Podle odst. 1 přejde projektivnost typu [(00)] na samodružném paprsku x v projektivnost involuční. Homologie polí ϱ, ϱ_1 je tedy harmonická.

Nepadne-li bod P na přímku y provede se konstrukce i důkaz jako u druhé části odstavce 2 (typ [000] prvého druhu), kde je jen třeba psáti místo samodružného bodu Z samodružný bod X, místo samodružných přímek ZX, ZY přímky x, y a upraviti důkaz, že druhým průsečíkem křivek h a k není bod samodružný, následujícím způsobem. Paprsku $A'Y$ svazku $[a']$ koresponduje ve svazku $[a'']$ paprsek PK, kde $K = (AA', x)$. Pak je XP polárou bodu K, AA' polárou bodu P, tedy PK polárou bodu $R = (XP, AA')$. V polárném trojúhelníku PKR protínají strany PR (prochází X) a AA' kuželosečku k reálně, tedy PK ji nikdy reálně neprotíná. Paprsku pak XA' svazku $[a']$ odpovídá ve svazku $[a'']$ paprsek spojující bod P s průsečíkem přímek AA' a y, který nemůže procházet bodem X ležícím také na y, protože podle předpokladu bod P nepadne na y.

B. Homologie.

1. Dokažme nejprve pomocnou větu: *Transformujeme-li jednu ze dvou hyperbolicky projektivních bodových řad na přímce všemi hyperbolickými involučními projektivnostmi s jedním samodružným bodem společným, který není zároveň samodružným bodem obou řad, jsou samodružné body projektivností tvořených řadou stálou a řadami transformovanými, dvojinami téže involuce.* Jednou družinou této involuce je společný bod samodružný všech involucí jako bod řady transformované a v původní projektivnosti korespondující bod řady pevné. Buďte S, O samodružné a A, A' korespondující body soumístných projektivních řad na přímce r. Z bodu na kuželosečce k promítněme tyto řady do kvadratických projektivních řad na k se samodružnými body S_1, O_1 a dvojicí bodů korespondujících A_1, A'_1. Řadu bodovou $[M]$ na tečně t kuželosečky k v bodě A_1, promítněme z bodů S_1 a O_1 do perspektivních řad kvadratických

$[S_2]$ a $[O_2]$ na k a konečně tyto řady z bodu A_1 do řad $[P]$, $[Q]$ na přímky $p = (A'_1S_1)$, $q = (A'_1O_1)$. V projektivních řadách $[P]$, $[Q]$ je společný bod A'_1 obou přímek p, q sám sobě přidružen. Jsou tedy obě řady perspektivní podle středu K. Vedeme-li z bodů řady $[M]$ na t ještě druhé tečny ke k, tvoří jejich dotyčné body kvadratickou řadu $[M_1]$. Jsou-li M, M_1, S_2, O_2, P, Q korespondující body uvedených řad, jest patrně $Dp\,(A'_1M_1O_1O_2) = -1$, $Dp\,(A'_1M_1S_1S_2) = -1$, tedy body S_1 a O_1 přejdou v body S_2 a O_2 involucí se samodružnými body A'_1 a M_1. Bodům S_1, O_1, A_1 v původní projektivnosti korespondující body S_1, O_1, A'_1 přejdou involucemi s jedním samodružným bodem společným A'_1 a druhým M_1 řády $[M_1]$ v body S_2, O_2 řad $[S_2]$, $[O_2]$ a A'_1. Korespondující body $P = (A_1S_2, A'_1S_1)$ a $Q = (A_1O_2, A'_1O_1)$ určují osu PQ projektivních kvadratických řad S_1, O_1, A_1 a S_2, O_2, A'_1 na k. Protože řady $[P]$, $[Q]$ jsou perspektivní, procházejí všechny osy PQ jejich středem perspektivnosti K a průsečíky těchto os s k, t. j. samodružné body řady pevné S_1, O_1, A_1 a projektivních s ní řad transformovaných S_2, O_2, A'_1, tvoří družiny téže involuce na k. Oba soumístné projektivní paprskové svazky jimiž se promítají řady $[S_2]$, $[O_2]$, tedy také $[P]$, $[Q]$, z bodu A_1, mají jediný samodružný paprsek $A_1A'_1$ (paprsku A_1O_1 odpovídá A_1S_1). Leží tedy na něm střed perspektivnosti řad $[P]$, $[Q]$, který je zároveň středem kvadratické involuce dvojic samodružných bodů.

Rovinná homologie (neharmonická) polí ϱ a ϱ' buď dána středem S, osou o a dvěma korespondujícími body A, A'. Přímku o_1 jdoucí bodem A', neprocházející bodem S jinak libovolnou, zvolme společnou osou všech harmonických homologií jichž středy vyplňují přímku $r = AA'$. Přímka r zůstane při všech harmonických homologiích invariantní a podle pomocné věty jsou na ní samodružné body všech rovinných kolineací tvořených polem ϱ a těmi, která vzniknou transformací pole ϱ' těmito harmonickými homologiemi, dvojinami involuce z nichž jednou je A, A'. Bodem S veďme přímku s (jinou než r) a promítněme na ni z bodu $X = (o, o_1)$ body A, A' do bodů B, B' a involuci samodružných bodů do involučních řad $[R]$, $[T]$. Není-li bod S samodružným bodem involuce na r, je vždy možno nalézti alespoň jednu dvojici R, T korespondujících bodů řad $[R]$, $[T]$ takovou, že bod R je samodružným bodem involuce bodové na přímce s určené dvojinami bodů S, T a B, B'. Abychom to dokázali, promítněme z bodu kuželosečky h na tuto body B, B' do B_1, B'_1, bod S do bodu S_3 a řady $[R]$, $[T]$ do kvadratických řad $[R']$, $[T']$. Dále buď bod E pólem přímky $B'B'_1$ k h a bod L na $B_1B'_1$ středem kvadratické involuce na h. Z bodu S_3 na h se obě řady $[R']$ a $[T']$ promítají projektivními soumístnými svazky paprskovými $[r']$ a $[t']$. Protíná-li svazek paprskový $[t']$ přímku $B_1B'_1$ v řadě bodové $[T_1]$, vytvoří poláry bodů této řady svazek

$E[t'']$ s ní a tedy i se svazkem $[r']$ projektivní. Společnému paprsku S_3E obou svazků $[r']$ a $[t'']$ odpovídá ve svazku $[r']$ paprsek S_3L. Protože podle předpokladu S není samodružným bodem involuce na r, nemůže bod L být průsečíkem tečny v bodě S_3 k h s přímkou $B_1B'_1$, ani jeho harmonickým pólem $L' = (S_3E, B_1B'_1)$ na této přímce. Jsou tedy svazky $[r']$ a $[t'']$ prostě projektivní a vytvoří průsečíky korespondujících paprsků pravou kuželosečku l jejíž tečna, v jejím průsečíku S_3 s kuželosečkou h, není tečnou této. Protnou se proto kuželosečky h a l, mimo bod S_3, ještě alespoň v jednom reálném bodě R'. Protože paprskům S_3B_1 a $S_3B'_1$ svazku $[r']$ odpovídají paprsky EB'_1 a EB_1 svazku $[t'']$, není tento průsečík žádným z bodů B_1, B'_1. Koresponduje-li bodu R' v kvadratické involuci na h bod T', protíná se tečna v bodě R' kuželosečky h s přímkou S_3T' na přímce $B_1B'_1$ a tedy průměty bodů T' a R' na přímku s jsou hledanou dvojinou T, R. Promítněme body T, R z bodu X na přímku r do bodů Y, Z a zvolme harmonickou homologii osou o_1 a středem O_1 na r takovým, aby body Y a Z byly samodružnými body řad indukovaných na invariantní přímce r kolineace polí ϱ, ϱ_1 (ϱ_1 je pole, které vzniklo transformací soumístného pole ϱ' touto harmonickou homologií). V kolineaci polí ϱ, ϱ_1 jsou body X, Y, Z, samodružné a body B, B' korespondující, které neleží na žádné samodružné přímce. Zvolme nyní druhou harmonickou homologii středem $O_2 \equiv R$ a osou $o_2 = (YR')$, kde bod R' je druhým samodružným bodem involuce (BB', TS) na s. Touto přejde pole ϱ_1 v soumístné pole ϱ_2 kolineárné se soumístným ϱ. Bod $O_2 = (BB', XZ)$ je středem perspektivnosti řad korespondujících bodů polí ϱ, ϱ_1 na přímkách $b = (YB)$, $b' = (YB')$ a s přímkou o_2 odděluje přímky b, b' harmonicky. Bod O_2 a průsečík osy o_2 se samodružnou přímkou XZ oddělují také harmonicky oba samodružné body X, Z. Přejde tedy druhou harmonickou homologií řada bodová na b' v řadu korespondujících bodů na b, bod X v bod $X_2 \equiv Z$ a bod Z v $Z_2 \equiv X$. Kolineace polí ϱ a ϱ_2 je tedy harmonickou homologií, protože má řadu samodružných bodů na přímce b a na samodružné přímce XZ dva body $X \equiv Z_2$, $Z \equiv X_2$ obapolně si odpovídající. Je-li bod S samodružným bodem involuce na s, zvolíme O_1 v kterémkoliv bodě, mimo S, A, A', přímky r a při konstrukci druhé harmonické homologie zaměníme v konstrukci právě uvedené bod R za S, Y za X, přímku XZ za XY a involuci na s za involuci na r.

2. V kolineaci soumístných polí ϱ, ϱ' typu $[(1, 0)]$, t. j. v homologii s osou o procházející středem S, stačí zvolit střed $S_1 \equiv S$ a libovolnou nesamodružnou přímku o_1 osou harmonické homologie. Svazek samodružných paprsků se středem S je při této harmonické homologii invariantní a na jeho paprsku o vznikne involuční řada korespondujících bodů polí ϱ, ϱ_1 (přešlo-li pole ϱ' harmonickou

homologií v pole ϱ_1). Je tedy kolineace soumístných polí ϱ, ϱ_1 také harmonickou homologií.

*

Sur la décomposition des homographies planes en produit des homologies harmoniques.

(Extrait de l'article précédent.)

L'auteur démontre que chaque homographie de deux champs superposés peut être décomposée en produit de trois homologies harmoniques au plus. Il en donne même la construction.
