Příspěvek k nauce o rovnicích převratných.

Napsal

professor Dr. F. J. Studnička.

I.

Má-li rovnice stupně n-tého

$$f(x) \equiv \sum_{i=0}^{n} A_i x^{n-i} \equiv \sum_{i=0}^{n} A_{n-i} x^i = 0 \tag{1}$$

býti *převratnou* neboli *reciprokou,* nutno, aby se tu vyhovělo všeobecné podmínce

$$f(x) \equiv \lambda x^n f\left(\frac{k}{x}\right), \tag{2}$$

kdež λ i k značí veličiny stálé; neb z této podmínky především patrno, že vedlé každého kořene jejího x_i vyskytuje se i kořen $\frac{k}{x_i}$, odkudž základní vlastnosť a i pojmenování rovnic těchto plyne. Zároveň se z toho i poznává, že počet všech kořenů, tedy i stupeň rovnice (1) vyjadřuje se v takovém případě číslem *sudým,* takže zde možná psáti

$$n = 2s.$$

Abychom pak poznali hodnotu stálé λ, zaveďme do stejniny (2)

$$x = \sqrt{k},$$

načež z ní obdržíme zvláštní relaci

$$f(\sqrt{k}) = \lambda k^s f(\sqrt{k}).$$

A tu možná pak souditi takto:

1. Není-li veličina $\sqrt{k}$ kořenem rovnice (1), jestli tedy

$$f(\sqrt{k}) \gtrless 0,$$

smíme si krácením z poslední relace zjednati

$$1 = \lambda k^s,$$

z čehož pak plyne přímo

$$\lambda = \frac{1}{k^s}.$$

2. Jestli však $\sqrt{k}$ kořenem rovnice (1), musí se kořen tento nejméně aspoň ještě jednou, a to s opačným označením vyskytovati, takže tu jest

$$x^2 - k \quad \text{a vůbec} \quad (x^2 - k)^m$$

činitelem polynomu $f(x)$; jestiť tedy všeobecně v tomto druhém případě

$$f(x) \equiv (x^2 - k)^m \varphi(x),$$

kdež pak představuje $\varphi(x) = 0$ rovnici převratnou stupně $2(s - m)$-tého, v níž kořen $\sqrt{k}$ více se nevyskytuje, což se shoduje s případem prvým.

Místo všeobecného tvaru (2) můžeme tedy klásti

$$f(x) \equiv \frac{x^{2s}}{k^s} f\left(\frac{k}{x}\right), \tag{3}$$

čímž jest zřejmě složení takovýchto rovnic vyznačeno.

Ve zvláštním, a to skoro výhradně uvažovaném případě, kde

$$k = 1,$$

obdrží se z relace (3) nová, jednodušší, a sice

$$f(x) \equiv x^{2s} f\left(\frac{1}{x}\right), \tag{4}$$

z níž pouze ryzí poměr převratnosti kořenů jde na jevo.

V rovnicích převratných vyhovují i součinitelové A_i zvláštním podmínkám, vyplývajícím taktéž z relace (3).

Zavedeme-li tam polynomy z rovnice (1) na jevo jdoucí, obdržíme

$$\sum A_{2s-i}x^i \equiv \frac{x^{2s}}{k^s}\sum A_i \frac{k^{2s-i}}{x^{2s-i}} \equiv \sum A_i k^{s-i} x^i,$$

z čehož poznáváme, že všeobecně platí

$$A_{2s-i} = A_i k^{s-i}, \tag{5}$$

a tedy ve zvláštním případě pro $k = 1$ jest

$$A_{2s-i} = A_i, \tag{6}$$

což znamená, že *součinitelové členů, jichž mocnitelové doplňují se na číslo 2s, sobě se rovnají,* a to buď přímo, jakož vyznačeno vzorcem (6), anebo nepřímo, a sice pomocí příslušné mocniny libovolné veličiny k, jakož vyjádřeno vzorcem (5), kde poměr obou součinitelů ustanovuje příslušná mocnina stálé veličiny k, takže možná i psáti, že platí

$$\text{buď } \frac{A_{2s-i}}{A_i} = k^{s-i} \quad \text{nebo } \frac{A_{2s-i}}{A_i} = 1.$$

Podlé toho jsou na př. rovnice *kvadratické*

$$x^2 + a_1 x + k = 0$$

vesměs převratnými, jelikož tu o kořenech jejich x_1, x_2 platí, jakož známo,

$$x_1 . x_2 = k,$$

takže tu přímo se poznává, že

$$x_1 = \frac{k}{x_2} \quad \text{nebo } x_2 = \frac{k}{x_1}.$$

II.

Poněvadž u rovnic převratných jednu polovici kořenů možná vyjádřiti pomocí převratných hodnot kořenů druhé polovice, musí řešení takové rovnice stupně $2s$-tého býti nahraditelno řešením rovnice stupně o polovici nižšího, tedy s-tého. A jak se úkol tento *všeobecně* pomocí vzorců *independentních* provádí, vyložil jsem letos poprvé ve svých přednáškách a doufám, že i na tomto místě poskytne poučení nejednomu čtenáři, a to tím spíše, jelikož o rovnicích převratných nebývá ve spisech příslušných, aspoň pokud vím, s dostatečnou důkladností jednáno.

Všeobecný tvar převratných rovnic jest tedy podlé odstavce I.

$$A_0x^{2s}+A_1x^{2s-1}+\ldots+A_sx^s+A_{s-1}kx^{s-1}+\ldots \\ +A_1k^{s-1}x+A_0k^s=0, \qquad (!)$$

takže dělením mocninou x^s se převede na tvar

$$A_0\left(x^s+\frac{k^s}{x^s}\right)+A_1\left(x^{s-1}+\frac{k^{s-1}}{x^{s-1}}\right)+\ldots+A_{s-1}\left(x+\frac{k}{x}\right)+A_s=0.$$

Položíme-li tu pak

$$x+\frac{k}{x}=y, \qquad (7)$$

$$x^m+\frac{k^m}{x^m}=V_m, \qquad (8)$$

z čehož přímo plyne

$$V_0=2, \quad V_1=y, \qquad (9)$$

promění se rovnice poslední v

$$A_0V_s+A_1V_{s-1}+\ldots+A_{s-1}V_1+A_s=0, \qquad (10)$$

v níž jednotlivé výrazy V_k nutno vyjádřiti pomocí mocnin veličiny y, aby se konečně obdržela rovnice tvaru

$$B_0y^s+B_1y^{s-1}+\ldots+B_{s-1}y+B_s=0; \qquad (11)$$

řešením této rovnice stupně s-tého zjednáme si s kořenových hodnot, zvaných na př.

$$y_1, y_2, y_3, \ldots, y_s,$$

načež z rovnice (7) plyne nová rovnice stupně druhého

$$x^2-y_ix+k=0, \quad (i=1, 2, 3, \ldots, s), \qquad (12)$$

z níž obyčejným řešením zjednáme si snadno dvojici kořenů x_i a x'_i, o níž platí

$$x_i x'_i = k,$$

čímž převratnosť hodnot příslušných všeobecně vyznačena, jakož bylo dříve již poznamenáno.

Nezbývá tedy nyní zde nic jiného, nežli určiti přechod od rovnice (10) k rovnici (11) anebo vyjádřiti součinitele B_k pomocí součinitelů A_k.

K tomu cíli nutno především znáti souvislosť výrazu V_k s mocninami nové neznámé y. A tu ze vzorců (7) a (8) snadno se složí *rekurrentní* vzorec

$$kV_{n-2} - yV_{n-1} + V_n = 0, \tag{13}$$

kterýž ve spojení se vzorci (9) řeší úkol, jak se která koli hodnota výrazu V_k vyjádří řadou, postupující podlé mocnin veličiny y, takže jestli

$$\begin{aligned} V_n &\equiv y^n - a_2 ky^{n-2} + a_4 k^2 y^{n-4} - a_6 k^3 y^{n-6} + \ldots, \\ V_{n+1} &\equiv y^{n+1} - a_1 ky^{n-1} + a_3 k^2 y^{n-3} - a_5 k^3 y^{n-5} + \ldots, \end{aligned} \tag{14}$$

bude podle toho patrně

$$V_{n+2} \equiv y^{n+2} - b_0 ky^n + b_2 k^2 y^{n-2} - b_4 k^3 y^{n-4} + \ldots,$$

a podlé rekurrentního vzorce (13) snadno se složí

$$b_{2i} = a_{2i} + a_{2i+1}, \tag{15}$$

čímž rekurrentní stanovení součinitelů řady pro V_i platící valně jest zjednodušeno.

Abychom independentně určili V_i co funkci veličiny y, sestavme si ze vzorce (9) a (13) relace

$$\begin{aligned} &y - V_1 = 0, \\ &2k - yV_1 + V_2 = 0, \\ &\qquad kV_1 - yV_2 + V_3 = 0, \\ &\qquad\qquad kV_2 - yV_3 + V_4 = 0, \\ &\qquad\qquad \cdots\cdots\cdots \\ &V_n + \qquad\qquad\qquad + kV_{n-2} - yV_{n-1} = 0; \end{aligned}$$

v této soustavě, čítající n relací, považujeme V_n za známou,

$$V_1, \; V_2, \; V_3, \ldots, \; V_{n-1}$$

za neznámé, jichž vyloučení z celé soustavy poskytne relaci

$$\begin{vmatrix} y, & -1, & 0, & \ldots, & 0, & 0 \\ 2k, & -y, & +1, & \ldots, & 0, & 0 \\ 0, & k, & -y, & \ldots, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & k, & \ldots, & 0, & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0, & 0, & 0, & \ldots, & -y, & 1 \\ V_n, & 0, & 0, & \ldots, & k, & -y \end{vmatrix} = 0.$$

V tomto determinantu, jehož hodnota jest 0, změniti možná znamení u všech prvků

sloupce 2., 4., 6., . . . ,
a řádku 3., 5., 7., . . . ,

načež se řešením podle V_n obdrží

$$V_n = \begin{vmatrix} y, & 1, & 0, & 0, & \ldots, & 0, & 0 \\ 2k, & y, & 1, & 0, & \ldots, & 0, & 0 \\ 0, & k, & y, & 1, & \ldots, & 0, & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0, & 0, & 0, & 0, & \ldots, & y, & 1 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & \ldots, & k, & y \end{vmatrix}. \qquad (16)$$

Řetězcový determinant (16) poskytuje takto independentní vyjádření veličiny V_n pomocí y a k, ukazuje tedy, jakého složení jsou koëfficienty řady (14), jmenované tam a_i.

Jak koli však řešení toto s hlediska formálního jest zcela dokonalé, neposkytuje v praxi mnoho předností před řešením rekurrentním, značí-li n číslo poněkud jen větší, jelikož vyčíslení determinantů stupeň 4. přesahujících jest značně robotné. Hledáme-li tedy všeobecný výraz pro hodnotu determinantu (16), obdržíme, jakož jsem taktéž poprvé vyšetřil,*)

*) Podrobné odvození tohoto vzorce přenechávám vtipným algebristům našim, aby ukázali zároveň význam koëfficientů v něm se vyskytujících.

$$V_n = y^n - \frac{n}{1}ky^{n-2} + \frac{n}{2}(n-3)_1 k^2 y^{n-4} - \frac{n}{3}(n-4)_2 k^3 y^{n-6} + \ldots$$

anebo ve formě jednodušší, složení součinitelů zřejměji objasňující,

$$V_n = y^n + \sum_{i=1} (-1)^i \frac{n}{i} (n-i-1)_{i-1} k^i y^{n-2i}, \quad (17)$$

kterýžto součet jde pro *sudé* n do $i = \frac{n}{2}$,

„ *liché* n „ $i = \frac{n-1}{2}$.

Znajíce vzorec (17), snadno pak zjednáme si porovnáním polynomů (10) a (11) i konečný vzorec

$$\begin{aligned} B_i = A_i &- \frac{n+2-i}{1} kA_{i-2} + \frac{n+4-i}{2}(n+1-i)_1 k^2 A_{i-4} \\ &- \frac{n+6-i}{3}(n+2-i)_2 k^3 A_{i-6} + \frac{n+8-i}{4}(n+3-i)_3 k^4 A_{i-8} \\ &- \frac{n+10-i}{5}(n+4-i)_4 k^5 A_{i-10} + \frac{n+12-i}{6}(n+5-i)_5 k^6 A_{i-12} \\ &- \ldots \end{aligned}$$

anebo ve kratší formě symbolické

$$B_i = A_i + \sum_{h=1} (-1)^h \frac{n+2h-i}{h} (n-i+h-1)_{h-1} k^h A_{i-2h}. \quad (18)$$

I platí zde na př.

$$\begin{aligned} B_0 &= A_0, \\ B_1 &= A_1, \\ B_2 &= A_2 - nkA_0, \\ B_3 &= A_3 - (n-1)kA_1, \\ B_4 &= A_4 - (n-2)kA_2 + \frac{n}{2}(n-3)_1 k^2 A_0, \\ B_5 &= A_5 - (n-3)kA_3 + \frac{n-1}{2}(n-4)_1 k^2 A_1, \\ B_6 &= A_6 - (n-4)kA_4 + \frac{n-2}{2}(n-5)_1 k_2 A_2 - \frac{n}{3}(n-4)_2 k^2 A_0, \\ B_2 &= A_7 - (n-5)kA_5 + \frac{n-3}{2}(n-6)_1 k^2 A_3 - \frac{n-1}{3}(n-5)_2 k^2 A_1, \\ &\ldots \end{aligned}$$

Zajímavý jest tu případ, kde

$$k = -1,$$

takže rovnice převratná stupně $2s$-tého jest tvaru

$$A_0 x^{2s} + A_1 x^{2s-1} + \ldots + A_s x^s - A_{s-1} x^{s-1} + A_{s-2} x^{s-2} - \ldots + (-1)^s A_0 = 0.$$

V tomto případě převede se známými obraty na rovnici stupně s-tého

$$C_0 y^s + C_1 y^{s-1} + \ldots + C_{s-1} y + C_s = 0,$$

kdež podlé vzorce (18) platí

$$C_i = A_i + \sum_{h=1} \frac{n + 2h - i}{h} (n - i + h - 1)_{h-1} A_{i-2h}. \quad (19)$$

Jest-li konečně v nejjednodušším případě

$$k = 1, \quad A_m = 1, \quad (m = 0, 1, 2 \ldots),$$

takže převratná rovnice tu má tvar

$$x^{2s} + x^{2s-1} + \ldots + x + 1 = 0, \quad (20)$$

převede se na rovnici stupně o polovic nižšího

$$y^s + D_1 y^{s-1} + \ldots + D_{s-1} y + D_s = 0,$$

kdež podlé vzorce (18) platí

$$D_i = 1 + \sum_{h=1} (-1)^h \frac{n + 2h - i}{h} (n - i + h - 1)_{h-1}. \quad (21)$$

Aniž bychom dále stopovali souvislosť rovnice této poslední s binomickými rovnicemi stupně lichého

$$x^{2s+1} - 1 \equiv (x - 1)(x^{2s} + x^{2s-1} + \ldots + x + 1) = 0,$$

z níž plyne pro rovnici (20) přímé řešení

$$\left.\begin{aligned} x_{2k} &= \cos \frac{2k\pi}{2s+1} + i \sin \frac{2k\pi}{2s+1}, \\ x_{2k+1} &= \cos \frac{2k\pi}{2s+1} - i \sin \frac{2k\pi}{2s+1}, \end{aligned}\right\} \quad (k = 1, 2, 3, \ldots, s),$$

uvádíme tuto na konci za příklad řešení rovnice

$$x^8-10x^7+43x^6-110x^5+188x^4-220x^3+172x^2-80x+16=0,$$

o jejíchž součinitelích platí

$$a_0k^4=1\,.\,2^4,\quad a_1k^3=10\,.\,2^3,\quad a_2k^2=43\,.\,2^2,\quad a_3k=110\,.\,2,$$

takže jest převratnou v širším toho slova smyslu.

Řešení její tedy poskytnou kořeny rovnice kvadratické

$$x^2-y_kx+2=0,$$

kdež dosaditi sluší za y_k ($k=1$, 2, 3, 4) kořeny rovnice stupně čtvrtého

$$y^4-10y^3+35y^2-50y+24=0,$$

kteráž se obdrží podlé vzorce (11), ustanovíme-li součinitele podlé vzorce (18), jelikož tu vyjde

$$\begin{aligned}
&B_0=1,\\
&B_1=-10,\\
&B_2=43-4\,.\,2\,.\,1=35,\\
&B_3=-110+3\,.\,2\,.\,10=-50,\\
&B_4=188-2\,.\,2\,.\,43+2\,.\,2^2=24.
\end{aligned}$$

Kořeny této rovnice stupně čtvrtého jsou pak

$$y_1=1,\quad y_2=2,\quad y_3=3,\quad y_4=4,$$

takže pomocí jich zjednáme si čtvero kvadratických rovnic

$$\begin{aligned}
x^2-\ \ x+2&=0,\\
x^2-2x+2&=0,\\
x^2-3x+2&=0,\\
x^2-4x+2&=0,
\end{aligned}$$

poskytujících osmero kořenů předložené rovnice převratné, z nichž jsou *soujemné* čtyři, a sice

$$x_1=\frac{1}{2}(1+i\sqrt{7}),\quad x_2=\frac{1}{2}(1-i\sqrt{7}),\quad x_3=1+i,\quad x_4=1-i,$$

čtyři pak *realné*, a sice

$$x_5=1,\quad x_6=2,\quad x_7=2+\sqrt{2},\quad x_8=2-\sqrt{2}.$$

Součet všech jest 10 a součin 16, jakož nutno.

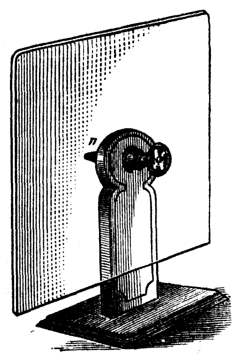
Několik pokusů s pružnými deskami.

Popisuje

Václav Pošusta,
professor v Č. Budějovicích.

Aby se pružných desk v akustice hojněji užíti mohlo, jest třeba dáti podstavci takovou podobu, by se desky i v poloze vodorovné i svislé rozzvučeti mohly.

Obr. 1. znázorňuje vhodný podstavec z litiny, na jehož čtyrhranném cípku skleněná deska, u prostřed malým otvorem opatřená, mosazným knoflíkem upevněna jest.



Obr. 1.

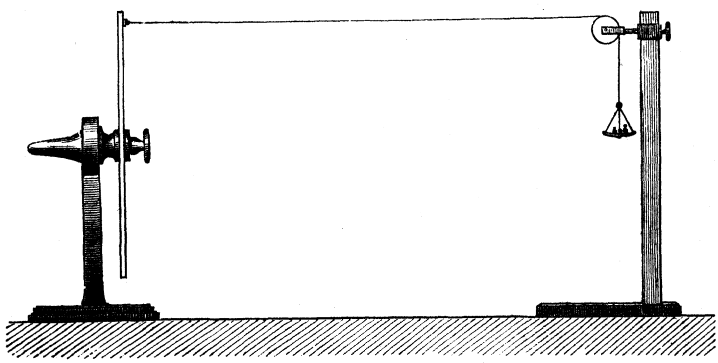
1. Mají-li se vytvořiti buď obrazce Chladného, neb práškové obrazce Savartovy, převrátí se podstavec na zadní delší nožku *n*, čímž sloupek a s ním deska přijdou do polohy vodorovné. Nejlépe jest posypati desku suchým pískem i plavuní zároveň, aby se i klidně i místa největších rozchvějů současně objevily. Tato poslední se na spodní straně desky k dalším pokusům vhodně poznačí.

Jest toho třeba v těch dvou případech, tře-li se deska na hraně poblíž rohu a u prostřed hrany, při čemž se jí nikde prstem nedotýkáme.

V prvém případě dává deska ton nejhlubší, v druhém, je-li na všech místech stejně tlustá, jeho quintu.

2. V poloze svislé lze užíti takové desky jako přístroje Meldova k znázornění chvění strun. K tomu účelu přitmelí se

pečetním voskem poblíž horního rohu desky ve výchvějišti malý knoflíček s ouškem, v němž se drátěným háčkem bílá nit zavěsí. Druhý konec její vede se přes kladku, opatří se rovněž háčkem, obtěžká přiměřeným závažím a posunováním stojánku s kladkou určí se délka nitě tak, aby ton její s tonem desky souhlasil. Obr. 2. — Nechci se o známých pokusech Meldových rozepisovati, jen tolik podotknu, že je všecky pomocí této laciné desky provésti lze, a kromě toho ještě jiné, ježto deska rozmanitých tonů schopna jest.*)



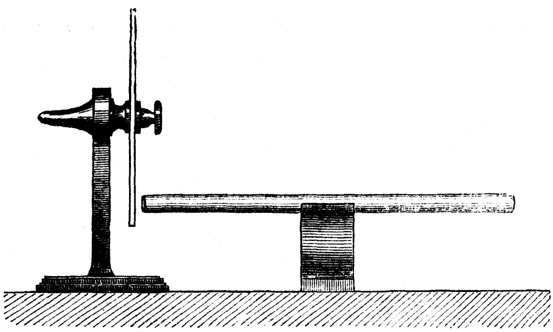
Obr. 2.

3. Zvláště pěkně lze znázorniti chvění vzduchu v píšťalách otevřených i zavřených.

Na čtyrech stojanech v řadě postavených, z nichž jeden představuje obr. 3., upevní se desky naladěné na harmonické tony: a^1 a^2 a^3 cis^4.**)

*) K těmto pokusům dostačí deska 24 *cm* dlouhá a rovněž tak široká ze skla 3 *mm* tlustého, jehož sklenáři k přikrývání světlíků na střechách užívají. Takovou desku připravíme si dosti rychle sami. Na točícím bruse učiníme napřed na všech hranách facetty, držíce desku rovnoběžně s hřídelem brusu, a pak obrousíme teprv hrany, při čemž rovina desky na hřídeli kolmo se drží. Kulatý otvor u prostřed desky provrtá se za čtvrt hodiny starým, trojhranným pilníčkem, který se dříve na bruse zaostří a zašpičatí a pak v terpentinovém oleji smáčí, načež se čtyrhranným pilníčkem rovněž naolejovaným tak vypiluje, aby se deska na čípek podstavce navléci mohla.

**) Desky dají se uříznouti poněkud větší než jest potřebí a obrousí se na jedné hraně, by neřezaly žíně smyčce. Pak se sevře každá do



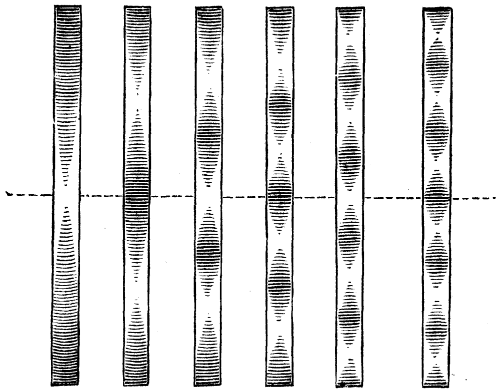
Obr. 3.

Z desk těchto lze vylouditi prvních 6 harmonických tonů s a^1; neboť deska druhá, tře-li se u prostřed hrany, dává e^3 a deska třetí právě tak e^4. Naproti těmto deskám položí se na sloupky přiměřené výšky vodorovně 6 trubic skleněných naladěných na ton a^1. Délka jejich jest 37 *cm* a průměr světlosti 16 *mm*. Každá deska má před výchvějištěm v rohu jednu trubici a deska druhá a třetí také před výchvějištěm u prostřed strany. Před pokusem prosypou se všecky trubky v nakloněné poloze korkovým práškem (lépe než plavuní), při čemž se stále otáčejí, aby se něco prášku na stěnách jejich zachytilo. Jsou-li trubice v úplném souhlase s nejhlubším tonem desky prvé, a trou-li se desky smyčcem jedna po druhé poblíž rohu a druhá a třetí také u prostřed hrany, rozvíří se resonancí prášek v tru-

obyčejného svěráku pro desky Chladného a určí se některým hudebním nástrojem její základní ton. Je-li intervall mezi tonem, na který se deska naladiti má, a tímto tonem základním $\frac{m}{n}$, a je-li strana desky nynější s_{mm} a strana desky, jak býti má, x_{mm}, musí dle známého zákona $\frac{s^2}{x^2} = \frac{m}{n}$, a tedy: $x = s\sqrt{\frac{n}{m}}$. Známo-li nyní x, narýsuje se na desce tuší čtverec o straně x, deska se ořízne, na hranách obrousí a konečně provrtá. Naše desky mají tyto rozměry:

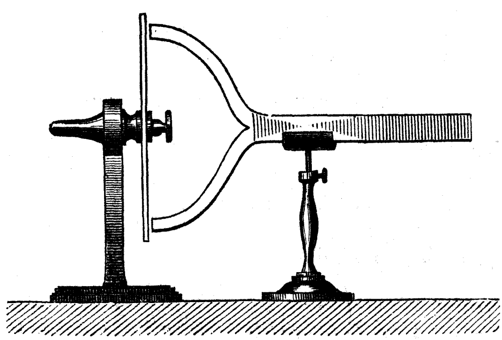
a^1	strana	170·4 *mm*	tloušťka	3·57 *mm*
a^2	„	163·0 „	„	6·77 „
a^3	„	120·0 „	„	7·36 „
cis^4	„	115·5 „	„	8·55 „

bicích a utvoří se posloupně jedna, dvě, tři, čtyři, pět a šest Kundtových vln stojatých, jak obr. 4. ukazuje.



Obr. 4.

Má-li se viditelným učiniti chvění vzduchu v píšťalách krytých, vezmou se k pokusu právě popsanému trubice dvakrát kratší a pokryjí se na koncích od desk odvrácených malými mosaznými víčky. Rozzvučí-li se pak desky právě tak jako dříve, shledá se, že jen při tonech a^1 e^3 cis^4 prášek v příslušných trubicích se rozvíří, a že zůstane naprosto v klidu při tonech a^2 a^3 e^4, což jest důkazem, že píšťaly kryté nemají sudých harmonických shorků. Značí-li na obr. 4. příčná čára víčka trubic poloviční délky, jest zřejmo, že jen v trubici 1.,



Obr. 5.

3. a 5. klideň k víčku připadá, a že tedy jen tyto trubice resonancí rozzvučeti se mohou, ne však trubice druhá, čtvrtá a šestá.

4. Hopkinsův pokus interferenční lze provésti tak, jak obr. 5. znázorňuje. Roura interferenční jest skleněná, a délka její zvolí se tak, aby dávala, když se přes okraj její fouká, šeptem ton souhlasný s tonem desky při úhlopříčném obrazci Chladného.

Prosype-li se roura korkovým práškem jako při pokusech předešlých a položí se na stojánek tak, aby obě ramena byla naproti výchvějištím čtvrtí protilehlých, rozvíří se prudce prášek v rouře, kdykoliv se deska u prostřed hrany smyčcem tře; prášek zůstane však v rovnováze, jsou-li obě ramena roury interferenční naproti výchvějištím čtvrtí sousedních.

Několik příspěvků k analytické geometrii kuželoseček.

Žákům středních škol podává Č. Jarolímek, professor v Praze.

I. O ploše úseku parabolického.

Na parabole $y^2 = 2px$, jejíž vrchol jest v, buďtež dány body $m_1(x_1, y_1)$, $m_2(x_2, y_2)$, $x_1 > x_2$, paty pořadnic n_1, n_2. Tetiva $\overline{m_1 m_2}$ utíná z paraboly plochu

$$P = vm_2m_1n_1v - vm_2n_2v - m_1m_2n_2n_1m_1\,,$$

tudíž $$P = \frac{2}{3}x_1y_1 - \frac{2}{3}x_2y_2 - \frac{1}{2}(y_1 + y_2)(x_1 - x_2)$$

anebo $$P = \frac{1}{6}(x_1y_1 - x_2y_2 - 3x_1y_2 + 3x_2y_1)\,.$$

Substitucemi

$$x_1 = \frac{y_1^2}{2p}\,,\quad x_2 = \frac{y_2^2}{2p}\,,$$

obdržíme z rovnice poslední

$$P = \frac{1}{12p}\left(y_1^3 - y_2^3 - 3y_1^2y_2 + 3y_1y_2^2\right)$$