Čeněk Jarolímek

Několik příspěvků k analytické geometrii kuželoseček. [I.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 19 (1890), No. 1, 14--20

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/120852`

3. a 5. klideň k víčku připadá, a že tedy jen tyto trubice resonancí rozzvučeti se mohou, ne však trubice druhá, čtvrtá a šestá.

4. Hopkinsův pokus interferenční lze provésti tak, jak obr. 5. znázorňuje. Roura interferenční jest skleněná, a délka její zvolí se tak, aby dávala, když se přes okraj její fouká, šeptem ton souhlasný s tonem desky při úhlopříčném obrazci Chladného.

Prosype-li se roura korkovým práškem jako při pokusech předešlých a položí se na stojánek tak, aby obě ramena byla naproti výchvějištím čtvrtí protilehlých, rozvíří se prudce prášek v rouře, kdykoliv se deska u prostřed hrany smyčcem tře; prášek zůstane však v rovnováze, jsou-li obě ramena roury interferenční naproti výchvějištím čtvrtí sousedních.

Několik příspěvků k analytické geometrii kuželoseček.

Žákům středních škol podává **Č. Jarolímek**, professor v Praze.

I. O ploše úseku parabolického.

Na parabole $y^2 = 2px$, jejíž vrchol jest v, buďtež dány body $m_1(x_1, y_1)$, $m_2(x_2, y_2)$, $x_1 > x_2$, paty pořadnic n_1, n_2. Tetiva $\overline{m_1 m_2}$ utíná z paraboly plochu

$$P = vm_2m_1n_1v - vm_2n_2v - m_1m_2n_2n_1m_1 ,$$

tudíž $$P = \frac{2}{3} x_1y_1 - \frac{2}{3} x_2y_2 - \frac{1}{2} (y_1 + y_2)(x_1 - x_2)$$

anebo $$P = \frac{1}{6} (x_1y_1 - x_2y_2 - 3x_1y_2 + 3x_2y_1) .$$

Substitucemi

$$x_1 = \frac{y_1^2}{2p}, \quad x_2 = \frac{y_2^2}{2p},$$

obdržíme z rovnice poslední

$$P = \frac{1}{12p} \left(y_1^3 - y_2^3 - 3y_1^2 y_2 + 3y_1 y_2^2\right)$$

čili
$$P = \frac{(y_1 - y_2)^3}{12p},$$
t. j. *ploský obsah parabolického úseku rovná se trojmoci rozdílu pořadnic krajních bodů tetivy, dělené šestinásobným parametrem.*

Patrně platí pravidlo i tehdy, když úsek parabolický osou je přetnut; algebraický rozdíl pořadnic dá tu ovšem součet absolutních jich délek.

Z pravidla toho jde: Protneme-li parabolu řadou přímek rovnoběžných s osou, v rovných od sebe vzdálenostech, a spojíme-li průsečíky po řadě tetivami, vzniknou parabolické úseky *rovnoploché.* Dle toho krátce rozřešíme úlohu: daným bodem na parabole vésti paprsek, který by utínal z paraboly rovněž tak velkou plochu, jako kterákoli daná sečna.

II. O ploše úseku elliptického.

Na ellipse

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \tag{1}$$

buďtež dány body $m_1(x_1, y_1)$, $m_2(x_2, y_2)$, $x_1 > x_2$.

Jest vypočítati plochu P, již z ellipsy utíná tetiva $\overline{m_1m_2}$.

K tomu konci na kružnici

$$x^2 + y^2 = a^2, \tag{2}$$

která s ellipsou je afinní vzhledem k ose X dle poměru $a : b$, sestrojme stejnolehlou tetivu $\overline{m'm''}$.

Souřadnice bodu m' jsou

$$x' = x_1, \quad y' = \frac{a}{b} \cdot y_1, \tag{3}$$

bodu m'' pak

$$x'' = x_2, \quad y'' = \frac{a}{b} \cdot y_2, \tag{4}$$

a plocha afinního úseku kruhového

$$P' = \frac{a}{b} P. \tag{5}$$

Jest pak

$$P' = \pi a^2 . \frac{\omega}{360^0} - \frac{1}{2} a^2 . \sin \omega, \tag{6}$$

kdež
$$\sphericalangle \omega = \sphericalangle m''om'.$$

Jsou-li α', α'' odchylky paprsků om', om'' od osy X, jest

$$\sin \omega = \sin (\alpha'' - \alpha') = \sin \alpha'' . \cos \alpha' - \cos \alpha'' . \sin \alpha' ;$$
avšak dle rov. (3)

$$\sin \alpha' = \frac{y'}{a} = \frac{y_1}{b}$$

a dle rov. (4)

$$\sin \alpha'' = \frac{y''}{a} = \frac{y_2}{b},$$

dále $$\cos \alpha' = \frac{x_1}{a}, \quad \cos \alpha'' = \frac{x_2}{a},$$

tedy

$$\sin \omega = \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{ab} . \tag{7}$$

Z rovnic (5), (6) a (7) plyne

$$P = \pi ab . \frac{\omega}{360^0} - \frac{1}{2} (x_1 y_2 - x_2 y_1) ;$$

ježto pak ploský obsah ellipsy $E = \pi ab$, jest konečně

$$P = E . \frac{\omega}{360^0} - \frac{1}{2} (x_1 y_2 - x_2 y_1) , \tag{8}$$

kdež $\sphericalangle \omega$ jest určen rovnicí (7).

III. O pólu a poláře kružnice.

Kterékoli tři body n, n_1, n_2, na ose úseček X, jichž úsečky buďtež x, x_1, x_2, tvoří s počátkem souřadnic o čtveřinu bodovou (onn_1n_2), jejíž dvojpoměr, sdružíme-li body on, n_1n_2, jest

$$\frac{on_1}{nn_1} : \frac{on_2}{nn_2} = \frac{x_1}{x_1 - x} : \frac{x_2}{x_2 - x} . \tag{1}$$

Je-li čtveřina harmonická, tedy dvojpoměr její $(onn_1n_2) = -1$, vyjde z rovnice (1) podmínka

$$x = \frac{2x_1x_2}{x_1 + x_2} \tag{2}$$

nebo také

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}\right) . \tag{3}$$

Veďme bodem o sečnu S ke kružnici K, sestrojme na přímce S k průsečíkům n_1 n_2 a k bodu o čtvrtý bod harmonický n, a otáčejme S okolo bodu o. Geometrické místo bodu n

jest *přímka* (M), která slove *polárou* kružnice K vzhledem k *pólu* o.

Důkaz. Budiž o počátek souřadnic, p, q souřadnice středu kružnice K, tedy

(4) $$K \equiv x^2 + y^2 - 2px - 2qy + \Pi = 0,$$

(5) $$S \equiv y - Ax = 0.$$

Vyloučením y nabýváme rovnice

$$x^2 - 2\frac{p + Aq}{1 + A^2} \cdot x + \frac{\Pi}{1 + A^2} = 0,$$

jíž vyhovují úsečky průsečíků n_1, n_2; patrně jest

(6) $$x_1 + x_2 = \frac{2(p + Aq)}{1 + A^2},$$

(7) $$x_1 \cdot x_2 = \frac{\Pi}{1 + A^2}.$$

Poměr délek na přímce S pravoúhlým promítnutím do osy X se nezmění, platí tudíž pro úsečky x, x_1, x_2 bodů n, n_1, n_2, podmínka (2).

Jest tedy úsečka čtvrtého bodu harmonického a dle rovnic (2), (6) a (7)

(8) $$x = \frac{2x_1x_2}{x_1 + x_2} = \frac{\Pi}{p + Aq}.$$

Vyloučíme-li posléze proměnnou A z rovnic (5) a (8), vyjde rovnice žádané poláry

(9) $$M \equiv px + qy - \Pi = 0,$$

čímž dokázáno, že M jest přímka.

Přeložíme-li počátek souřadnic do středu kružnice podržíce směry os, budou souřadnice pólu (jmenujme jej nyní m), $\xi = -p$, $\eta = -q$, i bude položiti $(x - \xi)$ za x, $(y - \eta)$ za y; jest tedy rovnice poláry

$$-\xi(x - \xi) - \eta(y - \eta) = \Pi = p^2 + q^2 - r^2 = \xi^2 + \eta^2 - r^2$$

čili

(10) $$M \equiv \xi x + \eta y - r^2 = 0$$

pro kružnici $$K \equiv x^2 + y^2 - r^2 = 0.$$

Dle rovnice (10) jest polára totožna s tetivou tečných, sestrojených ke kružnici pólem, a totožna s tečnou, je-li pól v bodě dotyčném.

Je-li tento vnitř kruhu, jsou tečny pomyslny, ale spojnice jejich M dle rovnice (10) vždy realna.

Posouvá-li se pól po přímce M, *otáčí se polára kružnice kol pevného bodu m,* jenž jest pólem poláry M.

Důkaz. Vzhledem k první části věty stačí dokázati, že poláry kterýchkoli tří bodů m_1, m_2, m_3, na přímce M vytčených, protínají se v bodě společném. Položme počátek souřadnic do středu kružnice a označme souřadnice bodů $m_1(\xi_1, \eta_1)$, $m_2(\xi_2, \eta_2)$, $m_3(\xi_3, \eta_3)$; ježto $\overline{m_1 m_2 m_3} \equiv \mathrm{M}$, jest

$$\begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & 1 \\ \xi_2 & \eta_2 & 1 \\ \xi_3 & \eta_3 & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{11}$$

Rovnice polár, příslušných k pólům m_1, m_2, m_3, jsou pak

$$\begin{aligned} \mathrm{M}_1 &\equiv \xi_1 x + \eta_1 y - r^2 = 0, \\ \mathrm{M}_2 &\equiv \xi_2 x + \eta_2 y - r^2 = 0, \\ \mathrm{M}_3 &\equiv \xi_3 x + \eta_3 y - r^2 = 0. \end{aligned} \tag{12}$$

Protínají-li se tyto tři přímky v bodě společném m, musí resultant Δ soustavy rovnic (12) rovnati se nulle; vskutku jest

$$\Delta = \begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & -r^2 \\ \xi_2 & \eta_2 & -r^2 \\ \xi_3 & \eta_3 & -r^2 \end{vmatrix} = -r^2 \begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & 1 \\ \xi_2 & \eta_2 & 1 \\ \xi_3 & \eta_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

dle rovnice (11).

Poláry bodů, v nichž přímka M kružnici seče, jsou totožny s příslušnými tečnami. Tyto tedy tolikéž procházejí bodem m, a přímka M, jevíc se jako tetiva tečných sestrojených ke kružnici z bodu m, jest polárou příslušnou ku m; čímž i druhá část věty jest dokázána.*)

IV. O pólu a poláře ellipsy.

Sestrojme k ellipse E sečnu S bodem o, k průsečíkům pak a k bodu o čtvrtý bod harmonický n; otáčí-li se sečna S kol o, vytvořuje bod n *přímku* (M), která slove *polárou* ellipsy E vzhledem k pólu o.

Důkaz. Budiž o počátek souřadnic, osy X, Y rovnoběžny s hlavní ($= 2a$) a vedlejší ($= 2b$) osou ellipsy E, u, v souřadnice středu křivky s, tudíž

*) *O pólu a poláře kružnice* viz též článek *Zahradníkův*: Geometrie kruhu. Čas. math. roč. V str. 67. *Red.*

$$(1)\qquad E \equiv b^2(x-u)^2 + a^2(y-v)^2 - a^2b^2 = 0,$$
$$(2)\qquad S \equiv y - Ax = 0.$$

Vyloučením y plyne rovnice

$$x^2 - \frac{2(b^2u + a^2Av)}{b^2 + a^2A^2}\,x + \frac{b^2u^2 + a^2v^2 - a^2b^2}{b^2 + a^2A^2} = 0,$$

jíž vyhovují úsečky průsečíků n_1, n_2 čar E, S; patrně jest

$$(3)\qquad x_1 + x_2 = \frac{2(b^2u + a^2Av)}{b^2 + a^2A^2},$$

$$(4)\qquad x_1 \,.\, x_2 = \frac{b^2u^2 + a^2v^2 - a^2b^2}{b^2 + a^2A^2}.$$

Úsečka čtvrtého bodu harmonického ku o, n_1, n_2 na paprsku S bude tedy

$$(5)\qquad x = \frac{2x_1x_2}{x_1 + x_2} = \frac{b^2u^2 + a^2v^2 - a^2b^2}{b^2u + a^2Av}.$$

Vyloučíme-li proměnnou A z rovnic (2) a (5), vyjde rovnice žádané poláry

$$(6)\qquad M \equiv b^2ux + a^2vy - (b^2u^2 + a^2v^2 - a^2b^2) = 0,$$

z níž jde, že polára ta jest přímkou.

Přeložíme-li počátek souřadnic do středu ellipsy podržíce směry os, budou souřadnice pólu (jmenujme jej nyní m),

$$\xi = -u, \quad \eta = -v,$$

i bude položiti $(x-\xi)$ za x, $(y-\eta)$ za y, $u = -\xi$, $v = -\eta$ do rov. (6). Potom jest rovnice poláry

$$-b^2\xi(x-\xi) - a^2\eta(y-\eta) = b^2\xi^2 + a^2\eta^2 - a^2b^2$$

čili

$$(7)\qquad M \equiv b^2\xi x + a^2\eta y - a^2b^2 = 0$$

pro ellipsu

$$E \equiv b^2\xi^2 + a^2\eta^2 - a^2b^2 = 0.$$

Dle rovnice (7) jest polára totožna s tetivou tečných, sestrojených k ellipse pólem, a totožna s tečnou, je-li pól v bodě dotyčném.

Posouvá li se pól po přímce M, otáčí se polára ellipsy kol pevného bodu m, jenž jest pólem poláry M.

Důkaz. Učiníme-li osy ellipsy osami souřadnic, a vytkneme-li na M tři body $m_1(\xi_1, \eta_1)$, $m_2(\xi_2, \eta_2)$, $m_3(\xi_3, \eta_3)$, bude

$$(8)\qquad \begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & 1 \\ \xi_2 & \eta_2 & 1 \\ \xi_3 & \eta_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Rovnice polár příslušných k pólům m_1, m_2, m_3 jsou

$$
\begin{aligned}
&M_1 \equiv b^2\xi_1 x + a^2\eta_1 y - r^2 = 0,\\
(9)\qquad &M_2 \equiv b^2\xi_2 x + a^2\eta_2 y - r^2 = 0,\\
&M_3 \equiv b^2\xi_3 x + a^2\eta_3 y - r^2 = 0.
\end{aligned}
$$

Resultant této soustavy rovnic

$$
\Delta = \begin{vmatrix} b^2\xi_1, & a^2\eta_1, & -r^2 \\ b^2\xi_2, & a^2\eta_2, & -r^2 \\ b^2\xi_3, & a^2\eta_3, & -r^2 \end{vmatrix} = -a^2b^2r^2 . \begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & 1 \\ \xi_2 & \eta_2 & 1 \\ \xi_3 & \eta_3 & 1 \end{vmatrix} ;
$$

ježto pak determinant tento dle rov. (8) rovná se nulle, jest i $\Delta = 0$, pročež poláry M_1, M_2, M_3 protínají se v bodě společném m. Že bod tento jest pólem poláry M, vysvítá jako při kružnici.

Tytéž věty mají platnosť pro hyperbolu i parabolu, a důkaz vede se zcela analogicky.

(Dokončení.)

O racionalních poměrech obsahů některých těles soustavy krychlové.

Napsal

Josef Fürst,

professor v Opavě.

Tři tvary soustavy krychlové, totiž krychle, čtyrstěn (tetraëder) a osmistěn (oktaëder) jsou jakožto mnohostěny pravidelné z geometrie známy, a proto v krátkosti promluvíme zde o poměrech obsahů jejich, jsou li sobě navzájem vepsány.

Jak známo, mají jmenovaná tělesa po třech rovných, na sobě kolmo stojících osách, které v krychli spojují středy protilehlých stěn, ve čtyrstěnu středy protilehlých hran, v osmistěnu protilehlé vrcholy. Vpíšeme-li do krychle čtyrstěn a zároveň osmistěn, jsou osy krychle všem společny.

Čtyrstěn vpíšeme do krychle vedouce v každém čtverci, krychli omezujícím, po jedné úhlopříčně tak, že každá s následující ve vrchole krychle se sbíhá. Tím vznikne 6 hran čtyrstěnu, které zavírají celkem 4 rovnostranné trojúhelníky čtyrstěn omezující.

Vrcholy osmistěnu jsou ve středech stěn krychlových.