Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Vavřinec Jelínek

O některých úlohách z arithmografie. [II.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 24 (1895), No. 2, 132--136

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/120880

Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1895

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://project.dml.cz

$$\frac{\log (n!)}{n \log n} = 1 + \delta_n, \tag{3}$$

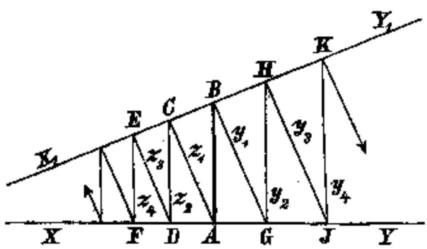
kde δ_n jest veličina pro veliká n velmi malá, a sice tak, že součin $\delta_n \cdot \log n$ zůstává konečným.

O některých úlohách z arithmografie.

Pojednává
Vavř. Jelínek,
prof. v Novém Městě u Vídně.

(Dokončení.)

II. K důležitým úlohám grafického počítání náleží též znázorňování mocnin a odmocnin. I tu chceme upozorniti na některé výhodné obraty.



Obr. 3.

1. Mocniny $(z_1)^{\pm m}$ zlomku z_1 jednotky dané úsečkou sestrojíme, znamená-li m číslo celistvé, dle obr. 3., kde jest

$$AB = 1,\quad XY \perp AB,\quad z_1 = AC,\quad X_1Y_1 \perp AC, \text{ pak}$$
$$z_2 = CD \perp XY,\ z_3 = DE \perp X_1Y_1,\ z_4 = EF \perp XY, \text{ a t. d.},$$
$$y_1 = BG \perp X_1Y_1,\ y_2 = GH \perp XY,\ y_3 = HI \perp X_1Y_1, \text{ a t. d.}$$

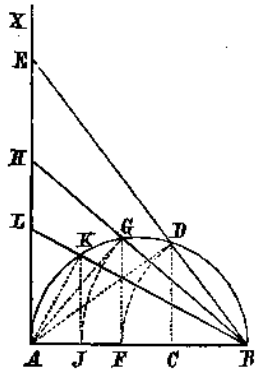
Najdemeť z podobných trojúhelníků úměry:

$$z_2 : z_1 = z_1 : 1, \text{ tedy } z_2 = (z_1)^2;$$
$$z_3 : z_2 = z_2 : z_1, \text{ tedy } z_3 = \frac{z_2^2}{z_1} = (z_1)^3;$$
$$z_4 : z_3 = z_3 : z_2, \text{ tedy } z_4 = \frac{z_3^2}{z_2} = (z_1)^4. \quad \text{a t. d.}$$

Dále vychází z podobných trojúhelníků na druhé straně přímky AB, že

$$y_1 : 1 = 1 : z_1, \text{ tedy } y_1 = \frac{1}{z_1} = (z_1)^{-1},$$
$$y_2 : y_1 = y_1 : 1, \;\; " \;\; y_2 = y_1^2 = (z_1)^{-2},$$
$$y_3 : y_2 = y_2 : y_1, \;\; " \;\; y_3 = \frac{y_2^2}{y_1} = (z_1)^{-3} \text{ a t. d.}$$

2. *Odmocniny* $\sqrt[\pm m]{z}$ *zlomku* z, *jehož jednotka jest dána úsečkou,* znázorníme, pokud jest $m = 2^r$, takto: Nad jednotkou AB = 1 (obr. 4.) jakožto průměrem sestrojíme kružnici, nane-



Obr. 4.

seme BC = z na AB a vztýčíme CD ⊥ AB. Pak jest v trojúhelníku ABD

$$\overline{BD}^2 = z \,.\, 1, \text{ tedy } BD = \sqrt{z}.$$

Prodloužíme-li ještě BD až protne AX ⊥ AB v bodě E, bude v trojúhelníku ABE

$$\overline{AB}^2 = BD \,.\, BE, \text{ tedy } BE = \frac{1}{BD} = \frac{1}{\sqrt{z}}\,.$$

Abychom znázornili vyšší odmocniny, přeneseme BD = BF na AB a vztýčíme zase FG ⊥ AB. Nabudeme takto, prodloužíce BG až ku průsečíku H s AX, z trojúhelníku ABG

$$\overline{BG}^2 = BF\,.\,AB = BD = \sqrt{z}, \text{ tedy } BG = \sqrt[4]{z},$$

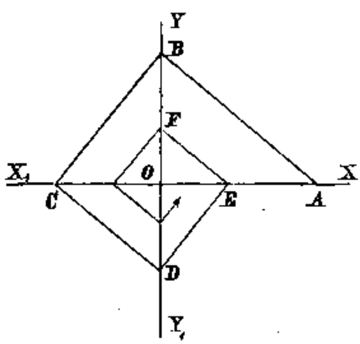
a z trojúhelníku ABH

$$\overline{AB}^2 = BG\,.\,BH = BH\,.\sqrt[4]{z}, \text{ tedy } BH = \frac{1}{\sqrt[4]{z}}\,.$$

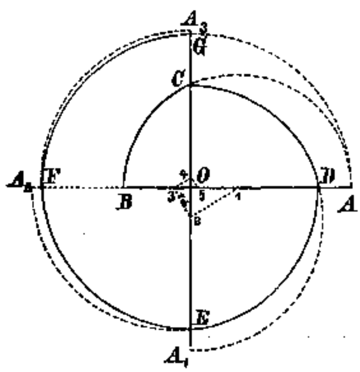
Pokračujíce takto, obdržíme dále

$$BK = \sqrt[8]{z} \quad \text{a} \quad BL = \frac{1}{\sqrt[8]{z}} \quad \text{a t. d.}$$

3. Mocniny z^m o celistvém, pouze kladném mocniteli m, najdeme také dle obr. 5. a odmocniny $\sqrt[+m]{z}$ pro $m = 2^{+r}$ také dle obr. 6.



Obr. 5.



Obr. 6.

Je-li v obr. 5. $XX_1 \perp YY_1$ a $OA = 1$, $OB = z$, sestrojíme ještě $BC \perp AB$, $CD \perp BC$, a t. d., a najdeme z povstalých pravoúhlých trojúhelníkův

$$OC = z^2,\ OD = z^3,\ OE = z^4 \text{ a t. d.}$$

V obr. 6. budiž $AA_2 \perp A_1A_3$, pak

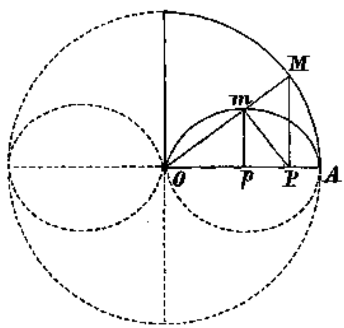
$$OA = OA_1 = OA_2 = OA_3 = 1;$$

naneseme-li ještě $OB = z$ a sestrojíme-li nad průměrem AB kružnici, která OA_3 protíná v C, pak kružnici nad CA_1, která protne OA v D, taktéž nad DA_2, a t. d., bude zřejmo, že

$$OC = \sqrt{z},\ OD = \sqrt[4]{z},\ OE = \sqrt[8]{z},\ \text{a t. d.}$$

Mocniny z^m o jakémkoli mocniteli znázorniti lze toliko logarithmickou spirálou.

4. Pro znázornění pouze třetí odmocniny zlomků dané úsečky $AO = 1$ sestrojíme křivku (obr. 7.) takto: V kvadrantu o poloměru $AO = r$ promítneme každý poloměr na AO a průmět



Obr. 7.

tuto (OP) promítneme zase na promítnutý poloměr. Patu každé druhé průmětnice poznamenejme písmenem m. Spojujíce tyto po sobě jdoucí paty, obdržíme hledanou křivku.

Poznamenáme-li, majíce zřetel k soustavě pravoúhlých souřadnic, $OP = x$, $MP = y$, $Op = \xi$, $mp = \eta$ a $Om = \varrho$, najdeme z trojúhelníků OMP, OmP, Omp rovnice

$$x^2 = \varrho r,\ \varrho^2 = x\xi,\ \varrho^2 = \xi^2 + \eta^2.$$

Dosadíme-li hodnotu pro ϱ z první rovnice do rovnice druhé i z druhé rovnice do rovnice třetí, nabudeme dvou výrazů pro x, a to

$$x = \sqrt[3]{r^2\xi}\,{}^{*)} \quad \text{a} \qquad x = \frac{\xi^2 + \eta^2}{\xi}.$$

*) Srovnej: „Poznámku o zdvojnásobení krychle“ od dr. *V. Lásky*, roč. XXIII. str. 154. tohoto časopisu.

Rovnice této křivky zní tedy

$$\xi^2 + \eta^2 = \xi \sqrt[3]{r^2 \xi},$$

čili v soustavě polární $\varrho = r \cos^2\varphi$.

Sestrojivše kvadrant kružnice o poloměru $OA = r = 1$ a příslušný oblouk OmA této křivky, naneseme daný zlomek ξ jednotky $OA = 1$ jakožto úsečku $Op = \xi$ a vedeme příslušným bodem m křivky poloměr OM. Úsečka $x = OP$ bodu M znázorňuje pak třetí odmocninu úsečky ξ, ježto dle horní rovnice jest

$$x = \sqrt[3]{1^2 \, . \, \xi} = \sqrt[3]{\xi} \, .*)$$

O zvláštní soustavě trojúhelníků kružnici vepsaných.

Podává

Alois Strnad,

professor na c. k. české realce Pražské.

Chceme na tomto místě pojednati spůsobem prostým o zvláštní soustavě trojúhelníků, jejíž vlastnosti budou snad zajímati mladé čtenáře těchto listů. Shledajíť tu úzkou souvislost úvah geometrických s algebraickými, a seznámí se s upotřebením důležitého pojmu limity.

1. Do kružnice K vepsán jest trojúhelník abc; oblouky bc, ca, ab rozpůlíme v bodech a_1, b_1, c_1, oblouky b_1c_1, c_1a_1, a_1b_1 v bodech a_2, b_2, c_2, atd. Tím stanovena jest soustava trojúhelníků $a_1b_1c_1$, $a_2b_2c_2$, ... $a_nb_nc_n$. Vyšetřujme nejprve úhly těchto trojúhelníků. Úhly trojúhelníka původního abc označme α, β, γ; trojúhelník $a_nb_nc_n$ mějž úhly α_n, β_n, γ_n. Značí-li tato písmena zároveň počet stupňů příslušných úhlů, jest dle známých vlastností úhlů obvodových

---

*) Na str. 68. v řádce 4. zdola má býti „na přímce" místo „na přímky".
Na str. 73. v řádce 3. shora vynech zlomek poslední a v řádce 4. zdola (d) místo (α).
Na str. 74. vynech v poslední řádce $\alpha\beta$).