Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Matyáš Lerch

Příspěvek k elementarné theorii elliptických integrálů. [I.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 17 (1888), No. 2, 49--55

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/120895

Příspěvky k elementarné theorii elliptických integrálů.

Píše

Matyáš Lerch,

docent české vysoké školy technické v Praze.

1. Buď

$$R(x) = a_0 x^4 + 4a_1 x^3 + 6a_2 x^2 + 4a_3 x + a_4$$
$$= a_0 (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3)(x - \alpha_4)$$

celistvá funkce stupně čtvrtého, jejíž kořeny jsou vesměs různy Zavedeme-li novou proměnnou y rovnicí

$$x = \alpha_4 + \frac{b}{y}, \tag{1}$$

obdržíme $\quad R(x) = \frac{a_0 b}{y^4} \prod_{\varkappa=1}^{3} [(\alpha_4 - \alpha_\varkappa) y + b]$

čili

$$R(x) = \frac{b\,R'(\alpha_4)}{y^4} (y - c_1)(y - c_2)(y - c_3), \tag{2}$$

kde jsme znamenali

$$c_\varkappa = \frac{b}{\alpha_\varkappa - \alpha_4}, \; (\varkappa = 1, 2, 3),$$

a užili známého vzorce:

$$R'(\alpha_4) = a_0(\alpha_4 - \alpha_1)(\alpha_4 - \alpha_2)(\alpha_4 - \alpha_3).$$

Rovnicí (1) je definována proměnná x jakožto linearná funkce y, která hoví rovnici differencialné

$$dx = -\frac{b\,dy}{y^2};$$

dělímeli obě strany této odmocninou příslušné strany rovnice (2), máme

$$\frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = -\sqrt{\frac{b}{R'(\alpha_4)}} \cdot \frac{dy}{\sqrt{(y - c_1)(y - c_2)(y - c_3)}}.$$

V rovnici (1) může b značiti kteroukoli konečnou veličinu od nully různou; volme je tak, aby

$$\sqrt{\frac{b}{R'(\alpha_4)}}=\frac{1}{2},$$

t. j. kladme

$$b=\frac{1}{4}R'(\alpha_4),$$

čímž máme rovnici (1) ve tvaru

$$(1^a)\qquad x-\alpha_4=\frac{1}{4}\cdot\frac{R'(\alpha_4)}{y},$$

z níž pak odvozena rovnice differencialná

$$(3)\qquad \frac{dx}{\sqrt{R(x)}}=\frac{dy}{-2\sqrt{(y-c_1)(y-c_2)(y-c_3)}},$$

kde $c_\varkappa$ značí výraz $\frac{1}{4}\cdot\frac{R'(\alpha_4)}{\alpha_\varkappa-\alpha_4}$.

Položme nyní $y=c_0+z$, kde c_0 volme tak, aby součet všech tří rozdílů $e_k=c_k-c_0$ byl nulla, t. j. položme

$$3c_0=c_1+c_2+c_3.$$

Tím obdrží funkce pod odmocnitkem tvar

$$(z-e_1)(z-e_2)(z-e_3),$$

a kořeny $e_\varkappa$ budou hověti podmínce

$$e_1+e_2+e_3=0,$$

takže pak máme místo (3) rovnici:

$$(3^*)\qquad \frac{dx}{\sqrt{R(x)}}=\frac{dz}{-2\sqrt{(z-e_1)(z-e_2)(z-e_3)}}$$
$$=\frac{dz}{-\sqrt{4z^3-g_2z-g_3}},$$

kde jsme kladli s *Weierstrassem*

$$g_2=-4(e_1e_2+e_2e_3+e_3e_1),\quad g_3=4e_1e_2e_3.$$

Abychom vyjádřili veličiny $e_\varkappa$ a součinitele substituce veličinami danými, uvažme, že tu

$$c_\varkappa=\frac{1}{4}\frac{R'(\alpha_4)}{\alpha_\varkappa-\alpha_4},$$

a tedy

$$3c_0=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{3}\frac{R'(\alpha_4)}{\alpha_\varkappa-\alpha_4}.$$

Veličiny $\alpha_\varkappa$ ($\varkappa = 1, 2, 3$) jsou kořeny rovnice $\frac{R(x)}{x - \alpha_4} = 0$; abychom vyšetřili jich souměrné funkce v našich výrazech pro c_0 a g_2, g_3 se vyskytující, položme $x = \alpha_4 + \beta$, $\beta_\varkappa = \alpha_\varkappa - \alpha_4$. Podlé věty Taylorovy pak máme:

$$R(x) = R(\alpha_4 + \beta) = R'(\alpha_4)\beta + \frac{1}{2}R''(\alpha_4)\beta^2 + \frac{1}{6}R'''(\alpha_4)\beta^3 + a_0\beta^4$$

a proto jsou veličiny $\beta_\varkappa$ kořeny rovnice kubické:

$$R'(\alpha_4) + \frac{1}{2}R''(\alpha_4)\beta + \frac{1}{6}R'''(\alpha_4)\beta^2 + a_0\beta^3 = 0,$$

z níž plyne dle známých vlastností kořenů rovnic:

$$\sum \frac{1}{\beta_\varkappa} = \sum \frac{1}{\alpha_\varkappa - \alpha_4} = -\frac{1}{2}\frac{R''(\alpha_4)}{R'(\alpha_4)}$$

a odtud

$$12c_0 = R'(\alpha_4)\sum \frac{1}{\alpha_\varkappa - \alpha_4} = -\frac{1}{2}R''(\alpha_4),$$

čili

$$c_0 = -\frac{1}{24}R''(\alpha_4).$$

Substituce, která nás vedla ke vztahu (3*), zní tedy

$$x - \alpha_4 = \frac{1}{4} \cdot \frac{R'(\alpha_4)}{z - \frac{1}{24}R''(\alpha_4)}, \tag{1*}$$

a veličiny $e_1\, e_2\, e_3$ jsou dány rovnicí $e_\varkappa = c_\varkappa - c_0$, t. j.

$$e_\varkappa = \frac{1}{4} \cdot \frac{R'(\alpha_4)}{\alpha_\varkappa - \alpha_4} + \frac{1}{24}R''(\alpha_4). \tag{4}$$

Differencováním máme z rovnice

$$R(x) = a_0 \prod_{\lambda=1}^{4} (x - \alpha_\lambda)$$

následující:

$$R'(x) = a_0 \sum_{\lambda<\mu<\nu} (x - \alpha_\lambda)(x - \alpha_\mu)(x - \alpha_\nu)$$

$$R''(x) = 2a_0 \sum_{\lambda<\mu} (x - \alpha_\lambda)(x - \alpha_\mu)$$

a zvlášť tedy pro $x = \alpha_4$:

$$R''(\alpha_4) = 2a_0 \{(\alpha_4 - \alpha_1)(\alpha_4 - \alpha_2) + (\alpha_4 - \alpha_2)(\alpha_4 - \alpha_3) + (\alpha_4 - \alpha_3)(\alpha_4 - \alpha_1)\},$$

aneb

$$\begin{aligned} R''(\alpha_4) &= 2a_0\,\{3\alpha_4^2 - 2\alpha_4(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3) + \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3\} \\ &= 2a_0\,\{3\alpha_4^2 - 2\alpha_4(\mathfrak{f}_1 - \alpha_4) + \mathfrak{f}_2 - (\mathfrak{f}_1 - \alpha_4)\,\alpha_4\} \\ &= 2a_0\,(\mathfrak{f}_2 - 3\alpha_4\mathfrak{f}_1\, 6\alpha_4^2). \end{aligned}$$

Dále jest pro $\varkappa = 1$:

$$\begin{aligned} \frac{R'(\alpha_4)}{\alpha_1 - \alpha_4} &= -\,a_0(\alpha_4 - \alpha_2)(\alpha_4 - \alpha_3) \\ &= \{-\alpha_4^2 + \alpha_4(\alpha_2 + \alpha_3) - \alpha_2\alpha_3\}\,a_0 \\ &= \{-\alpha_4^2 + \alpha_4(\mathfrak{f}_1 - \alpha_1 - \alpha_4) - \frac{\mathfrak{f}_4}{\alpha_1\alpha_4}\}\,a_0 \\ &= \{-2\alpha_4^2 + \alpha_4\mathfrak{f}_1 - \alpha_1\alpha_4 - \frac{\mathfrak{f}_4}{\alpha_1\alpha_4}\}\,a_0, \end{aligned}$$

kde značí $\mathfrak{f}_1$, $\mathfrak{f}_2$, $\mathfrak{f}_3$, $\mathfrak{f}_4$ základní souměrné úkony prvků $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$ definované totožností:

$$x^4 - \mathfrak{f}_1x^3 + \mathfrak{f}_2x^2 - \mathfrak{f}_3x + \mathfrak{f}_4 = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)(x-\alpha_4),$$

takže zároveň

$$\mathfrak{f}_1 = -\frac{4a_1}{a_0},\quad \mathfrak{f}_2 = +\frac{6a_2}{a_0},\quad \mathfrak{f}_3 = -\frac{4a_3}{a_0},\quad \mathfrak{f}_4 = \frac{a_4}{a_0}.$$

Z rovnice (4) máme tedy pro $\varkappa = 1$:

$$\begin{aligned} \frac{12e_1}{a_0} &= \frac{3R'(\alpha_4)}{\alpha_1 - \alpha_4} + \frac{1}{2}R''(\alpha_4) \\ &= -\,3(\alpha_1\alpha_4 + \frac{\mathfrak{f}_4}{\alpha_1\alpha_4}) + \mathfrak{f}_2, \end{aligned}$$

tedy

$$(5)\qquad -\frac{4e_1}{a_0} = \alpha_1\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3 - \frac{1}{3}\mathfrak{f}_2.$$

Z toho odvodíme permutací liter:

$$(5^a)\qquad -\frac{4e_2}{a_0} = \alpha_2\alpha_4 + \alpha_1\alpha_3 - \frac{1}{3}\mathfrak{f}_2$$

$$(5^b)\qquad -\frac{4e_3}{a_0} = \alpha_3\alpha_4 + \alpha_1\alpha_2 - \frac{1}{3}\mathfrak{f}_2.$$

Permutujemeli v kterémkoli z těchto výrazů v pravo u rovnic (5) — (5^b) litery α na všechny možné způsoby, neobdržíme žádných nových výrazů mimo udané právě tři. Kdybychom tedy zvolili za základ substituce (1*) místo α_4 kterýkoli z ostatních tří kořenů, měl by transformovaný differenciál (3*) tytéž kořeny e, a také tytéž výrazy g_2 a g_3. Ano je totiž $\frac{e_1}{a_0}$ souměrno vzhledem k α_1, α_4, objeví se e_1 též jakožto kořen při substituci, v níž vzato α_1 za základ, atd.

Ukážeme nyní, že lze koefficienty g_2 a g_3 vyjádřiti jakožto celistvé funkce součinitelů funkce $\mathrm{R}(x)$.

Znamenámeli

$$\varphi_1 = \alpha_1\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3 = \alpha_1\alpha_4 + \frac{\mathfrak{f}_4}{\alpha_1\alpha_4},$$

$$\varphi_2 = \alpha_2\alpha_4 + \alpha_1\alpha_3 = \alpha_2\alpha_4 + \frac{\mathfrak{f}_4}{\alpha_2\alpha_4},$$

$$\varphi_3 = \alpha_3\alpha_4 + \alpha_1\alpha_2 = \alpha_3\alpha_4 + \frac{\mathfrak{f}_4}{\alpha_3\alpha_4},$$

budou souměrné funkce veličin φ_1, φ_2, φ_3 zároveň souměrnými funkcemi veličin α_1, α_2, α_3, α_4.

Skutečně jest

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = \mathfrak{f}_2,$$

$$\sum_{\kappa<\lambda} \varphi_\kappa\varphi_\lambda = \sum_{\kappa<\lambda} \frac{(\alpha_\kappa^2\alpha_4^2 + \mathfrak{f}_4)(\alpha_\lambda^2\alpha_4^2 + \mathfrak{f}_4)}{\alpha_\kappa\alpha_\lambda\alpha_4^2}$$

$$= \sum_{\kappa<\lambda} \frac{\alpha_\kappa^2\alpha_\lambda^2\alpha_4^4 + \mathfrak{f}_4\alpha_4^2(\alpha_\kappa^2 + \alpha_\lambda^2) + \mathfrak{f}_4^2}{\alpha_\kappa\alpha_\lambda\alpha_4^2}$$

$$= \sum_{\kappa<\lambda<4} \alpha_\kappa\alpha_\lambda\alpha_4^2 + \sum_{\kappa<\lambda<4} (\alpha_\nu\alpha_4\alpha_\kappa^2 + \alpha_\nu\alpha_4\alpha_\lambda^2 + \alpha_\kappa\alpha_\lambda\alpha_\nu^2),$$

kde κ, λ, ν jsou zcela určitá čísla z řady 1, 2, 3 vespolek různá.

Tento výraz je však patrně roven souměrné funkci

$$\sum \alpha_k\alpha_l\alpha_m^2 = \mathfrak{f}_1\mathfrak{f}_3 - 4\mathfrak{f}_4,$$

takž máme

$$\varphi_1\varphi_2 + \varphi_2\varphi_2 + \varphi_3\varphi_1 = \mathfrak{f}_1\mathfrak{f}_3 - 4\mathfrak{f}_4.$$

Dále bude patrně

$$\varphi_1\varphi_2\varphi_3 = \frac{(\alpha_1^2\alpha_4^2 + \mathfrak{f}_4)(\alpha_2^2\alpha_4^2 + \mathfrak{f}_4)(\alpha_3^2\alpha_4^2 + \mathfrak{f}_4)}{\mathfrak{f}_4\alpha_4^2}$$

$$= \frac{1}{\mathfrak{f}_4\alpha_4^2}\left[\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3^2\alpha_4^6 + \mathfrak{f}_4\alpha_4^4\sum_{\mu<\nu<4}\alpha_\mu^2\alpha_\nu^2 + \mathfrak{f}_4^2\alpha_4^2\sum_{\mu<4}\alpha_\mu^2 + \mathfrak{f}_4^3\right]$$

$$= \mathfrak{f}_4\alpha_4^2 + \alpha_4^2\sum_{\mu<\nu<4}\alpha_\mu^2\alpha_\nu^2 + \mathfrak{f}_4\sum_{\mu<\nu}\alpha_\mu^2 + \alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3^2.$$

Tu zavedeme základní souměrné úkony $\mathfrak{h}_1\mathfrak{h}_2\mathfrak{h}_3\mathfrak{h}_4$ veličin α_1^2, α_2^2, α_3^2, α_4^2, takže $\mathfrak{h}_1 = \sum_{m=1}^{4} \alpha_m^2$, atd.

Pak bude

$$\sum_{\mu<4} \alpha_\mu^2 = \mathfrak{h}_1 - \alpha_4^2, \quad \sum_{\mu<\nu<4} \alpha_\mu^2\alpha_\nu^2 = \mathfrak{h}_2 - (\mathfrak{h}_1 - \alpha_4^2)\alpha_4^2,$$

$$\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3^2 = \mathfrak{h}_3 - (\alpha_1^2\alpha_2^2 + \alpha_2^2\alpha_3^2 + \alpha_3^2\alpha_1^2)\alpha_4^2$$
$$= \mathfrak{h}_3 - \{\mathfrak{h}_2 - (\mathfrak{h}_1 - \alpha_4^2)\alpha_4^2\}\alpha_4^2 = \mathfrak{h}_3 - \alpha_4^2\mathfrak{h}_2 + \alpha_4^4\mathfrak{h}_1 - \alpha_4^6$$

a obdržíme

$$\varphi_1\varphi_2\varphi_3 = \mathfrak{f}_4\mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_3.$$

Tu pak snadno shledáme*), že tu platí

$$\mathfrak{h}_1 = \mathfrak{f}_1^2 - 2\mathfrak{f}_2, \quad \mathfrak{h}_3 = \mathfrak{f}_3^2 - 2\mathfrak{f}_2\mathfrak{f}_4,$$

tedy

$$\varphi_1\varphi_2\varphi_3 = \mathfrak{f}_1^2\mathfrak{f}_4 - 4\mathfrak{f}_2\mathfrak{f}_4 + \mathfrak{f}_3^2.$$

Nyní je patrno, že φ_1, φ_2, φ_3 jsou kořeny rovnice

$$F(\varphi) = (\varphi - \varphi_1)(\varphi - \varphi_2)(\varphi - \varphi_3)$$
$$= \varphi^3 - \mathfrak{f}_2\varphi^2 + (\mathfrak{f}_1\mathfrak{f}_3 - 4\mathfrak{f}_4)\varphi - (\mathfrak{f}_1^2\mathfrak{f}_4 - 4\mathfrak{f}_2\mathfrak{f}_4 + \mathfrak{f}_3^2) = 0,$$

jejíž součinitelé jsou celistvé funkce veličin $\mathfrak{f}$.

Znamenáme-li nyní

$$\psi_\varkappa = -\frac{4e_\varkappa}{a_0},$$

jsou ψ_1, ψ_2, ψ_3 kořeny rovnice

$$F\left(\psi + \frac{1}{3}\mathfrak{f}_2\right) = 0,$$

v níž třeba pouze stanoviti absolutní člen $F\left(\frac{1}{3}\mathfrak{f}_2\right)$, aby se nalezl součin $\psi_1\psi_2\psi_3 = \dfrac{4^3e_1e_2e_3}{a_0^3} = \dfrac{16\,g_3}{a_0^3}$.

Bude tedy:

$$\frac{16\,g_3}{a_0^3} = \frac{1}{27}\mathfrak{f}_2^3 - \frac{1}{9}\mathfrak{f}_2^3 + \frac{1}{3}\mathfrak{f}_1\mathfrak{f}_2\mathfrak{f}_3 - \frac{4}{3}\mathfrak{f}_2\mathfrak{f}_4$$
$$- \mathfrak{f}_1^2\mathfrak{f}_4 + 4\mathfrak{f}_2\mathfrak{f}_4 - \mathfrak{f}_3^2,$$

*) Veličiny $\alpha_\varkappa^2$ ($\varkappa = 1, 2, 3, 4$) jsou kořeny rovnice $\mathfrak{F}(\sqrt{x})\,(\mathfrak{F}(-\sqrt{x}) = 0$, kde $\mathfrak{F}(z) = z^4 - \mathfrak{f}_1z^3 + \mathfrak{f}_2z^2 - \mathfrak{f}_3z + \mathfrak{f}_4$, takže máme

$$\Pi_\varkappa(x - \alpha_\varkappa^2) = \mathfrak{F}(\sqrt{x})\,\mathfrak{F}(-\sqrt{x}) = (z^2 + \mathfrak{f}_2z + \mathfrak{f}_4)^2 - (\mathfrak{f}_1z + \mathfrak{f}_3)^2z,$$

kde pak součinitel při z^λ rovná se $(-1)^\lambda\mathfrak{h}_\lambda$.

tedy

$$16\, g_3 = -16\, a_2^3 + 32\, a_1 a_2 a_3 + 16\, a_0 a_2 a_4 - 16\, a_1^2 a_4 - 16\, a_0\, a_3^2$$

t. j. $$g_3 = a_0 a_2 a_4 + 2a_1 a_2 a_3 - a_0 a_3^2 - a_4 a_1^2 - a_2^3,$$

což se přehledněji vyjádří determinantem:

$$g_3 = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix}.$$

Součinitel při ψ ve funkci $F\,(\psi + \frac{1}{3}\,\mathfrak{f}_1)$ rovná se patrně veličině $F'\,(\frac{1}{3}\,\mathfrak{f}_2)$; a poněvadž

$$F'(\varphi) = 3\varphi^2 - 2\mathfrak{f}_2\varphi + \mathfrak{f}_1\,\mathfrak{f}_3 - 4\mathfrak{f}_4,$$

bude

$$F'\left(\frac{1}{3}\,\mathfrak{f}_2\right) = \sum_{\mu<\nu} \psi_\mu \psi_\nu = \frac{3}{9}\,\mathfrak{f}_2^2 - \frac{2}{3}\,\mathfrak{f}_2^2 + \mathfrak{f}_1\,\mathfrak{f}_3 - 4\mathfrak{f}_4,$$

t. j. $$-\frac{4g_2}{a_0^2} = -\frac{1}{3}\,\mathfrak{f}_2^2 + \mathfrak{f}_1\,\mathfrak{f}_4 - 4\mathfrak{f}_4,$$

a tedy posléz:

$$g_2 = a_0 a_4 - 4a_1 a_3 + 3a_2^2.$$

„Značíli

$$R\,(x) = a_0 x^4 + 4a_1 x^3 + 6a_2 x^2 + 4a_3 x + a_4$$

celistvou funkci o jednoduchých kořenech α_1, α_2, α_3, α_4, bude rovnice differencialná

$$\frac{dx}{\sqrt{R\,(x)}} = \frac{dz}{-\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}},$$

v níž $$g_2 = a_0 a_4 - 4a_1 a_3 + 3a_2^2$$

$$g_3 = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix},$$

splněna každou z čtyř linearných funkcí:

$$x - \alpha_\varkappa = \frac{1}{4} \cdot \frac{R'\,(\alpha_\varkappa)}{z - \frac{1}{24} R''(\alpha_\varkappa)}, \quad (\varkappa = 1,\ 2,\ 3,\ 4),$$

jejíž součinitelé jsou irracionalné funkce algebraické proměnných součinitelů funkce $R\,(x)$.“

(Dokončení.)