Řešení úloh

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 27 (1898), No. 1, 57--80

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121006

Řešení úloh z ročníku XXVI.

(Dokončení.)

Úloha 42.

V kterém úhlu vésti jest rovinu k základně kužele rovnostranného, aby vznikl elliptický řez, jehož osy jsou v poměru 1 : 2?

Prof. *V. Hübner.*

Řešení. (Zaslal p. *Rudolf Jambor,* stud. VIII. tř. g. ve Val. Meziříčí.)

Této podmínce obecně se vyhoví, když

$$\frac{1}{2}\frac{r\sin^2\alpha\cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}=\frac{r\sin\alpha\sin\beta}{\sqrt{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}},$$

při čemž značí r poloměr základny, α odchylku strany kužele a β hledanou odchylku.

Ježto $\alpha=60^0$, jest

$$\frac{1}{4}\sqrt{3}=\frac{\sin(60+\beta)\sin(60-\beta)}{\sqrt{\sin(60+\beta)\sin(60-\beta)}}$$

čili

$$\frac{3}{16}=\sin(60+\beta)\sin(60-\beta)$$

anebo

$$\frac{3}{16}=\frac{3}{4}\cos^2\beta-\frac{1}{4}\sin^2\beta,\quad \text{t. j.}\quad \cos\beta=\pm\frac{\sqrt{7}}{4},$$

z čehož lze odchylku β určiti.

Úloha 43.

Jak velký úhel svírají strany kužele s jeho základnou, když rovina kolmá k základně protíná oblinu kuželovou v hyperbole rovnoosé? Jak dlouhé jsou osy hyperboly, značí-li m vzdálenost vrcholu jejího od vrcholu kužele?

Prof. *V. Hübner.*

Řešení. (Zaslal p. *Václav Haitich,* stud. VII. tř. gymn. v Praze.)

Této podmínce se vyhoví, když

$$\frac{m \sin 2\alpha}{2 \sin(\beta - \alpha)} = m \cos \alpha \sqrt{\frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin(\beta - \alpha)}},$$

při čemž značí opět α úhel, který svírá strana kužele s jeho základnou, β odchylku roviny se základnou a m úsek měřený od vrcholu.

Ježto $\beta = 90^0$, jest

$$\frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\cos \alpha} = \cos \alpha \sqrt{\frac{\cos \alpha}{\cos \alpha}}$$

čili $\operatorname{tg} \alpha = 1$ a $\alpha = 45^0$.

Délka osy $\quad 2a = \dfrac{m \sin 2\alpha}{\sin(\beta - \alpha)} = m\sqrt{2}$.

Jiné řešení. (Zaslal p. *Rudolf Hruša*, stud. VIII. tř. g. v Chrudimi.)

Rovnoběžné roviny přetínají plochu kuželovou v křivkách podobných. Jedna z rovin kolmých ku podstavě prochází vrcholem; průsek její s plochou jsou dvě povrchové přímky, ve které hyperbola přešla. Je-li tato rovnoosou, jsou obě přímky k sobě kolmé a svírají se základnou úhel $\alpha = 45^0$. Osy průseku hyperbolického jsou pak $2a = m\sqrt{2}$.

Uloha 44.

Po vnější straně plochy kulové padá těleso k zemi. Jak daleko bude se pohybovati po kouli, mělo-li v nejvyšším bodě koule rychlost počáteční c?

M. Aug. Haas na Strahově.

Řešení. (Zaslal p. *Otto Ottis*, stud. VII. tř. g. na Malé Straně v Praze.)

Těleso taženo je k zemi silou

$$P = m \cdot g,$$

kterou můžeme rozložiti na dvě složky.

Jedna, majíc směr tečny ke kouli vedené v bodě, kde těleso právě se nachází, *zrychluje* pohyb tělesa k zemi. Druhá na předešlou kolmá směřujíc do středu koule, *tlačí* na *dráhu* silou

$$P_1 = P \cos \alpha ,$$

kde α jest úhel sevřený poloměrem svislým a poloměrem vedeným k tělesu.

Pohybem po kouli povstává síla která působí proti složce P_1; tato síla centrifugalní

$$Q = \frac{mv^2}{r} .$$

Tlak na dráhu dle toho

$$R = mg \cos \alpha - \frac{mv^2}{r}$$

a bude větším než nulla, pokud bude se těleso pohybovati po kouli. Odloučí-li se od koule, nebude tlaku žádného čili

$$v^2 = gr \cos \alpha .$$

Klesne-li těleso z nejvyššího bodu, kde má počáteční rychlost c, o výšku a, bude jeho rychlost

$$v = c + \sqrt{2ga} .$$

A poněvadž

$$a = r(1 - \cos \alpha) = 2r \sin^2 \frac{\alpha}{2},$$

vznikne, spojíme-li s dvěma předcházejícími rovnicemi, k určení úhlu α rovnice

$$6\, gr \sin^2 \frac{\alpha}{2} + 4c \sqrt{gr} \sin \frac{\alpha}{2} + c^2 - rg = 0 .$$

Úloha 45.

V jaké vzdálenosti od středu nutno zavěsiti přímou tyč, aby měla nejkratší dobu kyvu?

M. Aug. Haas na Strahově.

Řešení. (Zaslal p. *Karel Nečas,* stud. VII. tř. g. ve Valašském Meziříčí.)

Doba kyvu fysického kyvadla, jak známo

$$T = \sqrt{\frac{\Sigma mr^2}{g\Sigma mr}},$$

kde $\left.\begin{matrix}\Sigma mr^2\\ \Sigma mr\end{matrix}\right\}$ značí moment $\left\{\begin{matrix}\text{setrvačnosti}\\ \text{rotační}\end{matrix}\right\}$ hledíc k bodu závěsu.

Momenty hmotné přímky, která se otáčí kolem bodu O od středu přímky o délku x vzdáleného, jsou, jak známo:

$$\Sigma mr^2 = \frac{h}{3}\left[\left(\frac{l}{2}+x\right)^3 + \left(\frac{l}{2}-x\right)^3\right]$$

$$\Sigma mr = \frac{h}{2}\left[\left(\frac{l}{2}+x\right)^2 + \left(\frac{l}{2}-x\right)^2\right],$$

kde l značí délku, h $\begin{matrix}\text{(hustotu)}\\ \text{spec. váhu}\end{matrix}$ přímky (tyče).

Dosazením těchto hodnot do vzorce pro dobu kyvu a zkrácením obdržíme

$$T = \sqrt{\frac{x^2 + \frac{l^2}{12}}{gx}}$$

a řešíce dle x

$$x = \frac{1}{2} gT^2 \pm \frac{1}{2}\sqrt{g^2T^4 - \frac{l^2}{3}}.$$

Minimum pro T nastane, když

$$g^2T^4 - \frac{l^2}{3} = 0$$

čili

$$T = \sqrt{\frac{l}{g}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{1}{3}\cdot\sqrt{\frac{l}{g}}\cdot\sqrt[4]{27} = 0{\cdot}7401\cdot\sqrt{\frac{l}{g}},$$

pročež

$$x = \frac{1}{2}\,\frac{l}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}\,.\,l = 0{\cdot}288675\,.\,l\,.$$

Úloha 54.

Dokázati, že

$$\cos x\,.\,\cos 2x\,.\,\cos 4x\,\ldots\,\cos 2^{n-1}x = \frac{\sin 2^n x}{2^n \sin x}.$$

R.

Řešení. (Zaslal p. *Václav Havlíček*, stud. VII. tř. r. v Budějovicích.)

Násobíme-li $\cos x$ zlomkem $\frac{2 \sin x}{2 \sin x}$, obdržíme

$$\cos x = \frac{\sin 2x}{2 \sin x},$$

tedy bude

$$\cos 2x = \frac{\sin 4x}{2 \sin 2x},$$

$$\cos 4x = \frac{\sin 8x}{2 \sin 4x},$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

konečně

$$\cos 2^{n-1}x = \frac{\sin 2^n x}{2 \sin 2^{n-1} x};$$

násobí-li se na obou stranách, povstane

$$\prod_{k=2}^{n} \cos 2^{k-1} = \frac{\sin 2^n x}{2^n \sin x}.$$

Jiné řešení. (Podal p. *Jan Vojtěch*, stud. VII. tř. g. v Uh. Hradišti.)

Násobíme-li rovnici jmenovatelem pravé strany, bude

$$2^{n-1} \,.\, 2 \sin x \cos x \,.\, \cos 2x \,.\, \cos 4x \ldots \cos 2^{n-1} x = \sin 2^n x$$

čili

$$2^{n-2} \sin 2x \,.\, \cos 2x \,.\, \cos 4x \ldots \cos 2^{n-1} x = \sin 2^n x$$

a dále postupně

$$2^{n-3} \sin 4x \,.\, \cos 4x \,.\, \cos 8x \ldots \cos 2^{n-1} x = \sin 2^n x,$$
$$2^{n-4} \sin 8x \,.\, \cos 16x \ldots \cos 2^{n-1} x = \sin 2^n x,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Posléze přijdeme k identitě

$$2 \sin 2^{n-1} x \,.\, \cos 2^{n-1} x = \sin 2^n x,$$

čímž správnost daného vzorce verifikována.

Úloha 55.

Dokázati, že

$$\frac{1}{\sin 2x}+\frac{1}{\sin 4x}+\frac{1}{\sin 8x}+\ldots+\frac{1}{\sin 2^n x}=ctg\, x-ctg\, 2^n x.$$

R.

Řešení. (Zaslal p. *Jan Kapras*, stud. VII. tř. g. v Brně.) Ježto

$$\operatorname{ctg} x=\sqrt{\frac{1+\cos 2x}{1-\cos 2x}}=\frac{1+\cos 2x}{\sin 2x}=\operatorname{cosec} 2x+\operatorname{ctg} 2x,$$

jest

$$\operatorname{cosec} 2x=\operatorname{ctg} x-\operatorname{ctg} 2x,$$

tedy

$$\begin{aligned}\operatorname{cosec} 4x&=\operatorname{ctg} 2x-\operatorname{ctg} 4x,\\ \operatorname{cosec} 8x&=\operatorname{ctg} 4x-\operatorname{ctg} 8x,\\ &\ldots\ldots\ldots\\ \operatorname{cosec} 2^n x&=\operatorname{ctg} 2^{n-1} x-\operatorname{ctg} 2^n x;\end{aligned}$$

sečítáme-li na obou stranách, povstane příslušným rušením členů

$$\sum_{k=1}^{n}\operatorname{cosec} 2^k x=\operatorname{ctg} x-\operatorname{ctg} 2^n x$$

aneb

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sin 2^n a}=\operatorname{ctg} x-\operatorname{ctg} 2^n x.$$

Úloha 57.

Dokázati, že

$$\sum_{k=1}^{n}(tg\, 2^{k-2} x+ctg\, 2^{k-1} x)=ctg\,\frac{x}{2}-ctg\, 2^{n-1} x.$$

R.

Řešení. (Zaslal p. *Viktor Kidles*, stud. VII. tř. r. na Malé Straně v Praze.)

Ježto

$$\operatorname{ctg} 2x=\frac{\cos 2x}{\sin 2x}=\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{2\sin x\cos x}=\frac{1}{2}\left(\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{\sin x}{\cos x}\right)$$

$$=\frac{1}{2}(\operatorname{ctg} x-\operatorname{tg} x),$$

jest tedy

$$\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x = 2 \operatorname{ctg} 2x$$

aneb

$$2 \operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg} \frac{x}{2} - \operatorname{tg} \frac{x}{2}.$$

Tento vzorec lze psáti

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} + \operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg} \frac{x}{2} - \operatorname{ctg} x$$

a podobně bude

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} 2x &= \operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} 2x \\
\operatorname{tg} 2x + \operatorname{ctg} 4x &= \operatorname{ctg} 2x - \operatorname{ctg} 4x \\
\operatorname{tg} 4x + \operatorname{ctg} 8x &= \operatorname{ctg} 4x - \operatorname{ctg} 8x \\
&\cdots\cdots \\
\operatorname{tg} 2^{n-2}x + \operatorname{ctg} 2^{n-1} x &= \operatorname{ctg} 2^{n-2} x - \operatorname{ctg} 2^{n-1} x;
\end{aligned}$$

sečítáme-li na obou stranách, nabudeme

$$\sum_{k=1}^{n} (\operatorname{tg} 2^{k-2}x + \operatorname{ctg} 2^{k-1}x) = \operatorname{ctg} \frac{x}{2} - \operatorname{ctg} 2^{n-1} x.$$

Úloha 58.

Dvě kružnice poloměrů r_1, r_2 protínají se pravoúhelně. Která jest délka jich společné tečny a společné tětivy?

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *Gabriel Tůma*, stud. VI. tř. r. v Budějovicích.)

Protínají-li se dvě kružnice pravoúhelně, jest délka jich středné

$$s = \sqrt{r_1^2 + r_2^2}$$

a délka společné tečny

$$t = \sqrt{s^2 - (r_1 - r_2)^2} = \sqrt{2r_1r_2}.$$

Délku společné tětivy u určuje vztah

$$su = 2r_1r_2,$$

tudíž

$$u = \frac{2r_1 r_2}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2}} = \frac{t^2}{s}.$$

Úloha 59.

Poloměry dvou kružnic se protínajících jsou v poměru 1 : 5, středná obou s = 13 dm, společná tečna má délku rovnou harmonickému průměru obou poloměrů. Které jsou poloměry kružnic? V kterém úhlu se obě křivky protínají?

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *Josef Mucha*, stud. VII. tř. g. v Brně.)

Poloměry kružnic buďtež x, y, délka společné tečny t; pak jest dle podmínky

$$t = \frac{2xy}{x + y}$$

a mimo to

$$t^2 = s^2 - (y - x)^2.$$

Z obou rovnic vyplývá

$$s = \frac{x^2 + y^2}{x + y}$$

a poněvadž

$$x : y = 1 : 5,$$

bude

$$s = \frac{26x}{6} = 13,$$

tudíž

$$x = 3, \quad y = 15.$$

Úhel φ obou křivek ustanovíme z rovnice

$$s^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos\varphi;$$

jestiť pak

$$\cos\varphi = \frac{x^2 + y^2 - s^2}{2xy} = \frac{x^2 + y^2}{(x + y)^2},$$

v případě daném

$$\cos\varphi = \frac{13}{18}.$$

Poznámka. Je-li vnější společná tečna dvou kružnic rovna harmonickému průměru poloměrů, rovná se středná jich průměru kontraharmonickému a naopak. Neboť délky obou, jak vzorci svrchu položenými snadno lze dokázati, vyhovují současně úměrám

$$(x-t):(t-y)=x:y$$
$$(x-s):(s-y)=y:x.$$

Úloha 60.

Dvě kružnice protínají se pravoúhelně; společná jich tětiva má délku $u = 20$ cm a společná tečna $t = 21$ cm. Vypočítejte poloměry obou kružnic.

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *Josef Rieger*, stud. VII. tř. r. v Jičíně.)

Jsou-li $x > y$ poloměry kružnic kolmo se protínajících, jest délka jich středné

$$s = \sqrt{x^2 + y^2},$$

délka společné tětivy určena vztahem

$$su = 2xy$$

a společuá tečna má délku

$$t = \sqrt{s^2 - (x-y)^2} = \sqrt{2xy}.$$

Tím vedeni jsme k rovnicím

$$\frac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = u,$$
$$2xy = t^2.$$

Z těchto vyvodíme

$$x^2 + y^2 = \frac{t^4}{u^2},$$

tedy

$$x + y = \frac{t}{u}\sqrt{t^2 + u^2},$$
$$x - y = \frac{t}{u}\sqrt{t^2 - u^2}.$$

V daném příkladě číselném obdržíme

$$x + y = \frac{21}{20}\sqrt{841} = \frac{21 . 29}{20},$$

$$x - y = \frac{21}{20}\sqrt{41},$$

tudíž

$$x = \frac{21}{40}(29 + \sqrt{41}) = 18{\cdot}59\ldots cm,$$

$$y = \frac{21}{40}(29 - \sqrt{41}) = 11{\cdot}86\ldots cm.$$

Úloha 61.

Základnou jehlanu je rovnostranný trojúhelník o straně s, plášť jehlanu (v rovinu rozprostřený) jest rovnoramenný trojúhelník o půdici 3s, rameni 2s. Který jest povrch a obsah jehlanu? Který poloměr má koule jemu opsaná, který vepsaná?

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *František Holzmann,* stud. VI. tř. g. v Brně.)

Výška trojúhelníka tvořícího plášť jest

$$v = \sqrt{(2s)^2 - \left(\frac{3s}{2}\right)^2} = \frac{s}{2}\sqrt{7},$$

rameno svírá s půdicí úhel α,

$$\cos\alpha = \frac{3}{4}.$$

Povrch jehlanu jest

$$P = \frac{s^2}{4}\sqrt{3} + \frac{3s^2}{4}\sqrt{7} = \frac{s^2}{4}\sqrt{3}\,(1 + \sqrt{21}).$$

Promítneme-li jehlan na rovinu základny, bude průmět hrany $2s$ míti délku

$$p = \frac{2s\cos\alpha}{\cos 30^0} = s\sqrt{3},$$

jest tedy výška jehlanu

$$x = \sqrt{4s^2 - p^2} = s$$

a obsah jeho

$$T = \frac{s^3}{12}\sqrt{3}.$$

Jelikož

$$T = \frac{1}{3} P\varrho,$$

jest poloměr vepsané koule

$$\varrho = \frac{3T}{P} = \frac{s}{1 + \sqrt{21}}.$$

Rovina souměrnosti jehlanu daného stanoví řez v podobě trojúhelníka, jehož strany s, $\frac{s\sqrt{3}}{2}$ svírají úhel 30^0. Poloměr kružnice opsané o tento trojúhelník jest zároveň poloměrem koule opsané jehlanu. Třetí strana onoho trojúhelníka jest

$$t = \sqrt{s^2 + \frac{3s^2}{4}} = \frac{s}{2}\sqrt{7}$$

a poloměr žádaný

$$r = \frac{t}{2 \sin 30^0} = t = v.$$

Úloha 62.

V trojúhelníku abc, jehož úhly jsou α, β, γ, vedeny příčky ao, bo, co tak, že

$$\sphericalangle oab = \alpha_1, \quad \sphericalangle obc = \beta_1, \quad \sphericalangle oca = \gamma_1.$$

Jest dokázati relaci

$$(ctg\, \alpha_1 - ctg\, \alpha)\,(ctg\, \beta_1 - ctg\, \beta)\,(ctg\, \gamma_1 - ctg\, \gamma)$$
$$= cosec\, \alpha\, cosec\, \beta\, cosec\, \gamma.$$

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *Norbert Novotný*, stud. VII. tř. r. v Budějovicích.)

Vedeme-li bodem o k stranám trojúhelníka kolmice

$$om \perp bc, \quad on \perp ca, \quad op \perp ab,$$

jest

$$\frac{op}{on} = \frac{\sin \alpha_1}{\sin(\alpha - \alpha_1)}$$
$$\frac{om}{op} = \frac{\sin \beta_1}{\sin(\beta - \beta_1)}$$
$$\frac{op}{om} = \frac{\sin \gamma_1}{\sin(\gamma - \gamma_1)};$$

tudíž platí známý vztah

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin(\alpha - \alpha_1)} \cdot \frac{\sin \beta_1}{\sin(\beta - \beta_1)} \cdot \frac{\sin \gamma_1}{\sin(\gamma - \gamma_1)} = 1.$$

Rovnici této lze dáti podobu

$$(\sin \alpha \cos \alpha_1 - \cos \alpha \sin \alpha_1)(\sin \beta \cos \beta_1 - \cos \beta \sin \beta_1)(\sin \gamma \cos \gamma_1 - \cos \gamma \sin \gamma_1) = \sin \alpha_1 \sin \beta_1 \sin \gamma_1;$$

dělíme-li obě strany součinem sinů všech šesti úhlů, obdržíme

$$(\operatorname{ctg} \alpha_1 - \operatorname{ctg} \alpha)(\operatorname{ctg} \beta_1 - \operatorname{ctg} \beta)(\operatorname{ctg} \gamma_1 - \operatorname{ctg} \gamma) = \operatorname{cosec} \alpha \operatorname{cosec} \beta \operatorname{cosec} \gamma,$$

odkudž po vykonaném násobení plyne relace daná.

Poznámka. Je-li na př.

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{2}, \quad \operatorname{ctg} \beta = \frac{1}{3}, \quad \operatorname{ctg} \alpha_1 = 2, \quad \operatorname{ctg} \beta_1 = 3,$$

bude

$$\operatorname{ctg} \gamma = 1,$$

načež vypočítáme

$$\operatorname{ctg} \gamma_1 = \frac{17}{12}.$$

Úloha 63.

Vyšetřiti geometrické místo bodů, které mají od přímek

$$M \equiv ax + by + c = 0$$
$$N \equiv bx - ay + d = 0$$

součet neb rozdíl vzdáleností rovný $\pm s$. *Jak velkou plochu omezuje toto geometrické místo?*

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *František Velísek*, stud. VI. tř. g. v Uh. Hradišti.)

Vzdálenosti bodu $m(x, y)$ od přímek M, N jsou

$$v_1 = \frac{ax + by + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$v_2 = \frac{bx - ay + d}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Z podmínky

$$v_1 \pm v_2 = \pm s$$

obdržíme rovnice čtyř přímek

$$(a + b)x - (a - b)y + c + d = \pm s\sqrt{a^2 + b^2}$$

$$(a - b)x + (a + b)y + c - d = \pm s\sqrt{a^2 + b^2}.$$

Z přímek těch skládá se hledané geom. místo. Jimi omezen jest čtverec, jehož stranou jest vzdálenost dvou protějších stran. Z rovnoběžných přímek, daných na př. rovnicí poslední, má jedna od počátku vzdálenost

$$p_1 = \frac{c - d + s\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{2(a^2 + b^2)}},$$

druhá pak

$$p_2 = \frac{c - d - s\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{2(a^2 + b^2)}};$$

strana čtverce jest

$$p = p_1 - p_2 = s\sqrt{2},$$

tudíž obsah jeho

$$P = 2s^2.$$

Úloha 64.

Který význam v pravoúhlé soustavě souřadnic má rovnice

$$2\left(\frac{x}{y} - \frac{y}{x}\right) + 6\left(\frac{3}{x} + \frac{1}{y}\right) = 3\left(1 + \frac{12}{xy}\right)?$$

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *Václav Špaček*, stud. VII. tř. g. v Příbrami.)

Rovnice zlomků zbavená má tvar

$$2x^2 - 3xy - 2y^2 + 6x + 18y - 36 = 0.$$

Řešíme-li ji dle y, obdržíme

$$y = \frac{1}{4}[18 - 3x \pm (6 - 5x)].$$

Značí tudíž rovnice dvě přímky dané rovnicemi

$$x - 2y + 6 = 0, \quad 2x + y - 6 = 0;$$

přímky ty stojí na sobě kolmo a protínají se v bodě (1·2, 3·6).

Úloha 65.

Ohniskem paraboly prochází kružnice, která se paraboly ve dvou bodech dotýká. Je-li p parametr paraboly, který jest poloměr kružnice?

Řed. *A. Strnad.*

Řešení. (Zaslal p. *Jan Vojtěch,* stud. VII. tř. g. v Uh. Hradišti.)

Rovnice paraboly jest

$$y^2 = 2px$$

a rovnice křivky kruhové, která má střed na ose paraboly a prochází ohniskem, má tvar

$$\left(x - \frac{p}{2} - r\right)^2 + y^2 = r^2.$$

Obě křivky protínají se obecně ve 4 bodech, z nichž dva a dva jsou dle X souměrny. Úsečky bodů těch stanoví rovnice

$$\left(x - \frac{p}{2} - r\right)^2 + 2px = r^2$$

čili

$$x^2 - (2r - p)x + pr + \frac{p^2}{4} = 0.$$

Aby oba po téže straně osy X ležící průsečíky v jeden splynuly, k tomu jest nutnou i dostačující podmínkou, aby diskriminant této rovnice stal se rovným nulle, t. j.

$$(2r - p)^2 - (4pr + p^2) = 0.$$

Rovnice tato přechází ve

$$r(r - 2p) = 0,$$

z čehož plyne

$$r = 2p.$$

Kružnice poloměru $2p$ prochází ohniskem a dotýká se paraboly ve 2 bodech, jichž souřadnice jsou

$$x = \frac{3p}{2}, \quad y = \pm p\sqrt{3}.$$

Poznámka redakce. Také hodnota $r = 0$ řeší úlohu. Přicházíme tu k *Plückerově definici*, dle které ohnisko křivky 2. stupně jest kružnice poloměru rovného nulle, dotýkající se ve dvou imaginárných bodech křivky dané. V naší úloze měly by tyto body souřadnice

$$x = -\frac{p}{2}, \quad y = \pm pi.$$

Úloha 66.

Která jest rovnice tečny vedené v bodě dotyčném (x_1, y_1) *ke křivce stupně třetího*

$$x^3 - y^3 - 3a^2x = 0?$$

R.

Řešení. (Zaslal p. *Rudolf Milota,* stud. VII. tř. g. v Písku.)

Dány-li na křivce dva body $(x_1 y_1)$, $(x_2 y_2)$, vyhovují souřadnice jich rovnici křivky

$$x_1^3 - y_1^3 - 3a^2x_1 = 0$$
$$x_2^3 - y_2^3 - 3a^2x_2 = 0.$$

Z rovnic těchto jde

$$(x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) - (y_1 - y_2)(y_1^2 + y_1y_2 + y_2^2) - 3a^2(x_1 - x_2) = 0$$

a proto směrnice sečny určené body $(x_1 y_1)$, $(x_2 y_2)$ jest

$$\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2 - 3a^2}{y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2}.$$

Sečna přejde v tečnu, sjednotí-li se body $(x_1 y_1)$, $(x_2 y_2)$; potom bude $x_2 = x_1$, $y_2 = y_1$ a tedy směrnice tečny v bodě (x_1, y_1) má hodnotu

$$\frac{3x_1^2 - 3a^2}{3y_1^2} = \frac{x_1^2 - a^2}{y_1^2}.$$

Rovnice tečny v bodě daném jest tudíž

$$y - y_1 = \frac{x_1^2 - a^2}{y_1^2}(x - x_1). \text{ *)}$$

Dodatek o řešení úloh z ročníku XXVI.

(Viz tamže str. 275.—278.)

Správná řešení úloh zaslali pp.:

G. Bureš, stud. VI. tř. r. v Rakovníku, úl. 5., 7., 9., 13., 21., 22., 33.

Václav Haitich, stud. VII. tř. g. v Praze, úl. 1.—48., 50.—66.

Karel Hanauer, stud. VII. tř. akad. g. v Praze, úl. 18., 22., 23., 25., 27., 31., 33., 34.

Jan Handl, stud. VII. tř. g. v Brně, úl. 17. až 20., 22. až 25., 27., 28., 31. až 43., 46., 54., 55., 57., 58., 59., 62., 64., 65., 66.

Václav Havlíček, stud. VII. tř. r. v Budějovicích, úl. 22., 23., 25., 27. až 43., 46. až 54., 58., 65., 66.

Emil Hendrich, stud. V. tř. g. v Žitné ulici v Praze, úl. 52.

Frant. Holzmann, stud. VI. tř. g. v Brně, úl. 51. až 53., 58., 60. až 62.

Břetislav Hromádko, stud. VII. tř. g. na Malé Straně v Praze úl. 35., 51., 52., 61.

Rudolf Hruša, stud. VIII. tř. g. v Chrudimi, úl. 22. až 50., 54. až 66.

Rudolf Jambor, stud. VIII. tř. g. ve Val. Meziříčí, úl. 22.—50.

---

*) Postup úlohy dané jeví se při stanovení tečny jednotlivých kuželoseček ve výtečné Geometrii Strnadově. *R.*

Jan Kapras, stud. VII. tř. g. v Brně, úl. 24. až 66.

Viktor Kidles, stud. VII. tř. r. na Malé Straně v Praze, úl. 54. až 57., 66.

Vilém Kloubek, stud. VII. tř. akad. g. v Praze, úl. 18., 22., 23., 25., 31. až 35., 46., 50.

František Košelka, stud. VII. tř. g. ve Val. Meziříčí, úl. 22. až 49., 51. až 54.

Gustav Lusk, stud. VI. tř. r. v Hradci Králové, úl. 23., 27., 33., 34.

Rudolf Milota, stud. VII. tř. g. v Písku, úl. 22. až 66.

Josef Mucha, stud. VII. tř. g. v Brně, úl. 22., 23., 25., 27. až 36., 38., 40., 41., 46., 54. až 61., 64., 65., 66.

Karel Nečas, stud. VII. tř. g. ve Val. Meziříčí, úl. 22. až 45., 49., 51. až 58., 62., 63., 65., 66.

Jiří Nerád, stud. g. v Hradci Králové, úl. 25., 27. až 43., 46., 49., 50.

Vilém Novák, stud. VIII. tř. g. v Jičíně, úl. 3., 18., 22., 23., 25., 27., 29., 31. až 35., 37., 38., 40., 46., 50.

Norbert Novotný. stud. VII. tř. r. v Budějovicích, úl. 1., 3., 5., 8., 22., 25., 27. až 38., 40. až 43., 45. až 66.

Otto Ottis, stud. VII. tř. g. na Malé Straně v Praze, úl. 22. až 66.

Jan Pospíšil, stud. VII. tř. g. v Pelhřimově, úl. 58. až 61., 64.

Josef Procházka, stud. VII. tř. g. ve Vys. Mýtě, úl. 12., 16., 22., 23.

Karel Prokeš, stud. VI. tř. g. na Malé Straně v Praze, úl. 24., 27., 28.

Antonín Rejzek, stud. VII. tř. g. ve Vys. Mýtě, úl. 27., 31. až 35., 40., 50.

Josef Rieger, stud. VII. tř. r. v Jičíně, úl. 22. až 66.

Otto Šindelář, stud. VII. tř. r. v Pardubicích, úl. 24., 33., 34., 35.

Václav Špaček, stud. VII. tř. g. v Příbrami, úl. 24. až 46., 54., 55., 57. až 60., 63., 65., 66.

Jan Štěpán, stud. VII. tř. g. v Kroměříži, úl. 28., 29., 31. až 34., 46.

František Tamchyna, stud. VI. tř. r. v Pardubicích, úl, 5., 6., 8. až 12., 22., 23.

Rudolf Tereba, stud. VIII. tř. g. ve Val. Meziříčí, úl. 22. až 50.

Josef Tille, stud. VII. tř. g. v Křemencové ulici v Praze, úl. 5., 9., 10., 14., 15., 17., 22., 23., 29., 30., 31., 32.
Dominik Trnka, stud. VII. tř. g. ve Vys. Mýtě, úl. 1., 10., 16., 18., 22., 23., 32. až 35., 40.
Gabriel Tůma, stud. VI. tř. g. v Budějovicích, úl. 6., 7., 10., 22., 27., 28., 31., 32., 33., 38., 48., 50. až 53., 58., 59.
Václav Vaněček, stud. VI. tř. r. na Malé Straně v Praze, úl. 24., 25., 27. až 34.
František Velísek, stud. VI. tř. g. v Uh. Hradišti, úl. 22. až 25., 29. až 38., 41., 42., 43., 46., 50. až 66.
Ignát Velísek, stud. v Uh. Hradišti, úl. 51., 54., 58., 59., 62.
Antonín Vitěka, stud. VI. tř. g. v Budějovicích, úl. 9., 10., 22., 23.
Jan Vojtěch, stud. VII. tř. g. v Uh. Hradišti, úl. 22 až 66.
František Zářiška, stud. VII. tř. g. v Brně, úl. 24. až 43.

Ceny udělené za řešení úloh.

Redakce těchto listů uznala, aby za nejdokonalejší a největší počet řešení úloh obsažených v XXVI. ročníku Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky (1897) ceny vypsané výborem Jednoty českých mathematiků uděleny byly těmto řešitelům:

A. Pět prvních cen.

1. *Václav Haitich*, stud. VII. tř. g. v Praze.
2. *Jan Kapras*, stud. VII. tř. g. v Brně.
3. *Norbert Novotný*, stud. VII. tř. r. v Budějovicích.
4. *Josef Rieger*, stud. VII. tř. r. v Jičíně.
5. *Jan Vojtěch*, stud. VII. tř. g. v Uh. Hradišti.

B. Deset druhých cen.

1. *Václav Havlíček*, stud. VII. tř. r. v Budějovicích.
2. *Rudolf Hruša*, stud. VIII. tř. g. v Chrudimi.
3. *Rudolf Jambor*, stud. VIII. tř. g. ve Val. Meziříčí.
4. *František Košelka*, stud. VII. tř. g. ve Val. Meziříčí.

5. *Rudolf Milota*, stud. VII. tř. g. v Písku.
6. *Josef Mucha*, stud. VII. tř. g. v Brně.
7. *Karel Nečas*, stud. VI. tř. g. ve Val. Meziříčí.
8. *Otto Ottis*, stud. VII. tř. g. na Malé Straně v Praze.
9. *Václav Špaček*, stud. VII. tř. g. v Příbrami.
10. *František Velísek*, stud. VI. tř. g. v Uh. Hradišti.

C. Patnáct třetích cen.

1. *Jan Handl*, stud. VII. tř. g. v Brně.
2. *Karel Hanauer*, stud. VII. tř. akad. g. v Praze.
3. *Viktor Kidles*, stud. VII. tř. r. na Malé Straně v Praze.
4. *Vilém Kloubek*, stud. VII. tř. akad. g. v Praze.
5. *Alois Moravec*, stud. VII. tř. r. na Malé Straně v Praze.
6. *Methoděj Nečas*, stud. VIII. tř. g. v Brně.
7. *Jiří Nerád*, stud. VII. tř. g. v Hradci Králové.
8. *Čeněk Nevečeřal*, stud. VII. tř. r. v Kutné Hoře.
9. *Vilém Novák*, stud. VIII. tř. g. v Jičíně.
10. *Antonín Rejzek*, stud. VII. tř. g. ve Vys. Mýtě.
11. *Rudolf Tereba*, stud. VIII. tř. g. ve Val. Meziříčí.
12. *Gabriel Tůma*, stud. VI. tř. g. v Budějovicích.
13. *Václav Vaněček*, stud. VI. tř. r. na Malé Straně v Praze.
14. *František Záviška*, stud. VI. tř. g. v Brně.
15. *Otakar Zich*, stud. VIII. tř. g. v Křemencové ulici v Praze.

Úlohy.

Úloha 1.

Vyhledati číslo, které se rovná své čtvrté mocnině.

R.

Úloha 2.

Řešiti jest rovnici

$$x^2 - 2x^{\frac{3}{2}} + 2x - \sqrt{x} = 6.$$

R.

Úloha 3.

Řešiti jest rovnici

$$\sqrt[3]{76+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{76-\sqrt{x}}=8.$$

R.

Úloha 4.

Řešiti jest rovnici

$$x\,(1-lg\,5)=lg\,[(x^2-1)\,(4x^2-17x+4)+2^x].$$

R.

Úloha 5.

Řešiti jest soustavu rovnic

$$\frac{(x-y)^2+1}{(x+y)^2+1}=\frac{a^2}{b^2+1}$$

$$\frac{x^2}{y^2+1}=\frac{(a-b)^2+1}{(a+b)^2+1}.$$

R.

Úloha 6.

Řešiti jest rovnici

$$sin\,x+cos\,x+tg\,x=sec\,x+cosec\,x+cotg\,x.$$

Řed. *A. Strnad.*

Úloha 7.

Řešiti jest rovnici

$$sin\,x+sin\,2x+sin\,3x+sin\,4x=0.$$

Týž.

Úloha 8.

Řešiti jest rovnici

$$4\,sin^3x-3\,sin\,x-cos\,x=0.$$

R.

Úloha 9.

Dokázati, že

$$\frac{1}{2} \operatorname{cosec} 10^0 - 2 \sin 70^0 = 1.$$

R.

Úloha 10.

Vyloučiti jest x ze soustavy rovnic

$$\sec x + (1 + \operatorname{cosec}^2 x) \sec x \, tg^2 x = m$$
$$tg\, x - (1 + \operatorname{cosec}^2 x) \, tg^3 x = n.$$

R.

Úloha 11.

Úhlopříčky trojúhelníka ABCD protínají se v bodě O; prodloužíme AC do E a BD do F tak, aby bylo OE = AC, OF = BD. Jest dokázati planimetricky, že čtyrúhelník ABCD rovná se trojúhelníku OEF.

R.

Úloha 12.

Do kružnice vepsati pětiúhelník, jehož úhly jsou dány.

Řed. *A. Strnad.*

Úloha 13.

Úhly pětiúhelníka do kružnice vepsaného jsou α, β, γ, δ, ε. Jest vypočítati úhly pětiúhelníka omezeného úhlopříčkami daného.

Týž.

Úloha 14.

Do kružnice vepsán šestiúhelník abcdef; vrcholy jeho dělí kružnici v oblouky

$$\widehat{ab} = \alpha, \ \widehat{bc} = \alpha',$$
$$\widehat{cd} = \beta, \ \widehat{de} = \beta',$$
$$\widehat{ef} = \gamma, \ \widehat{fa} = \gamma'.$$

Kterou relací vázány jsou tyto oblouky, protínají-li se spojnice ad, be, cf v jediném bodě? *Týž.*

Úloha 15.

Jsou-li m_1, m_2, m_3, m_4 *mocnosti vrcholů trojúhelníka a průsečíku jeho výšek vzhledem ke kružnici devíti bodů, jest dokázati, že*

$$\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} + \frac{1}{m_4} = 0.$$

Řed. *A. Strnad.*

Úloha 16.

Vypočítati úhel α *trojúhelníka pravoúhlého, je-li odvěsna* b *střední arithmetickou úměrnou mezi druhou odvěsnou* b *a přeponou* c.

R.

Úloha 17.

Jest dokázati, že trojúhelník jest pravoúhlý, platí-li o něm relace

$$a)\quad \frac{c-a}{c+a} = tg^2 \frac{\beta}{2},$$

$$b)\quad ctg \frac{\alpha}{2} = \frac{s}{s-b},$$

ve kterých značí s *polovici obvodu.*

R.

Úloha 18.

Dokázati, že o trojúhelníku pravoúhlém jest v platnosti relace

$$sec\, 2\alpha - tg\, 2\beta = \frac{b+a}{b-a}.$$

R.

Úloha 19.

Dokázati, že o stranách a úhlech trojúhelníka platnou jest relace

$$a \cos \alpha + b \cos \beta = c \cos \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

Řed. *A. Strnad.*

Úloha 20.

Ve čtyřúhelníku jsou strany $BC = CD = DA$ sobě rovny; jsou-li $ABCD$ úhly při AB označeny α, β a svírají-li prodloužené strany AB, CD úhel γ, jest dokázati, že

$$\sin \alpha = \sin \beta + \sin \gamma.$$

R.

Úloha 21.

V trojúhelníku abc vedena výška $cd \perp ab$, a do trojúhelníků acd, bcd vepsány kružnice poloměrů ϱ_1, ϱ_2. a) Sestrojiti trojúhelník abc, dáno-li ϱ_1, ϱ_2 a úhel $acb = \gamma$. b) Řešiti trigonometricky trojúhelník z týchž prvků daných.

Řed. *A. Strnad.*

Úloha 22.

Krychli o hraně a otupeny rohy koulí, která se dotýká všech hran krychle. Ustanoviti povrch a obsah tělesa takto vzniklého.

Týž.

Úloha 23.

Kolmý kruhový válec proťat rovinou v ellipse, jejíž číselná výstřednost jest ε. Který úhel tvoří rovina tato se základnou?

Týž.

Úloha 24.

Do půlkruhu vepsán lichoběžník, jehož větší půdicí jest průměr; menší půdice rovná se dvojnásobnému rameni. Otočí-li se tento lichoběžník kolem průměru, který jest povrch a obsah tělesa otočením vytvořeného?

Týž.

Úloha 25.

Ke kružnicím poloměrů r_1, r_2 vně se dotýkajícím vedeny společné vnější tečny, omezené body dotyčnými. Otočí-li se tento útvar kolem své osy souměrnosti, který jest povrch a obsah tělesa otočením vytvořeného?

Týž.

Úloha 26.

S vrcholů trojúhelníka abc spuštěny kolmice na libovolnou přímku X; jich patami a_1, b_1, c_1 vedeny po řadě kolmice $A \perp bc$, $B \perp ca$, $C \perp ab$. Dokázati, že přímky A, B, C protínají se v jediném bodě.

Řed. *A. Strnad.*

Úloha 27.

V ose X dán stálý bod a a mimo to v ní vytčeny body c, e, v ose $Y \perp X$ body b, d tak, že

$$ab \perp bc \perp cd \perp de.$$

Které jest geom. místo bodu m půlícího délku bc, bodu n půlícího cd a bodu p půlícího de?

Týž.

Úloha 28.

V přímce P dány body a, b, c; sestrojena kružnice K, která se přímky P v bodě c dotýká, a vedeny k ní z bodů a, b tečny. Které jest geom. místo průsečíku těchto tečen, mění-li se kružnice K? Které, mění-li se bod dotyčný c a zůstává-li stálým poloměr kružnice K?

Týž.

Úloha 29.

Ve které výši nad středem okrouhlého stolu jest zavěsiti lampu, aby osvětlovala okraj stolu co nejvíce?

Týž.

Úloha 30.

Dvě ladičky o malý půltón od sebe rozdílné a spoluznějící vydají v 10 sekundách 36 rázů. Jest ustanoviti tóny ladiček.

Lad. Fahoun, kand. prof. v Praze.