Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Alois Strnad

Poznámka o trojúhelnících racionálných

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 13 (1884), No. 1, 28--30

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121040

Zavedše pak označení

$$ABCD = B,\ A'B'C'D' = b,\ \triangle EBC = b_1,\ \triangle DCF = b_2,$$
$$AB = m,\ A'B' = m_1,\ AD = n,\ A'D' = n_1,$$

budeme míti

$$\triangle EBC : \triangle ABC = EB : AB$$

čili

$$b_1 : \triangle ABC = m_1 : m$$

a podobně

$$b_2 : \triangle ACD = n_1 : n,$$

z kterýchžto úměr následuje

$$b_1 : \triangle ABC = b_2 : \triangle ACD = m_1 : m \qquad (\alpha)$$

neb

$$(b_1 + b_2) : (\triangle ABC + \triangle ACD) = m_1 : m$$

čili

$$(b_1 + b_2) : B = m_1 : m,$$

tedy též

$$(b_1 + b_2)^2 : B^2 = m_1^2 : m^2 = b : B$$

neb

$$(b_1 + b_2)^2 : B = b : 1,$$

tedy

$$b_1 + b_2 = \sqrt{Bb}.$$

Sečteme-li všecky čtyři jehlance, ve které jsme daný jehlanec komolý rozdělili, obdržíme opět vzorec (1).

Byly-li by podstavy komolého jehlance rovnoběžníky, pak by $\triangle ABC = \triangle ACD$ a tudíž dle úměry (α) též $b_1 = b_2$ t. j. oba trojboké jehlance $B'EBC$ a $D'DCF$ jsou si pak rovny, takže jeden i druhý jest $\frac{v}{3} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{Bb} = \frac{v}{6}\sqrt{Bb}$.

Poznámka o trojúhelnících racionálných.

Od A. Strnada.

Předpokládejme trojúhelník *abc*, jehož vrcholy určeny jsou v pravoúhlé soustavě *souřadnicemi racionálných hodnot*:

$$a\,(x_1,\ y_1),\ b\,(x_2,\ y_2),\ c\,(x_3,\ y_3).$$

Obsah trojúhelníka toho, jsa vyjádřen vzorcem

$$\Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1, & y_1, & 1 \\ x_2, & y_2, & 1 \\ x_3, & y_3, & 1 \end{vmatrix},$$

jest pak také racionálný; strany jeho tvoří s osami souřadnými úhly racionálných tangent a následovně jsou též tangenty úhlů trojúhelníka veličiny racionálné. Tak jest ku př.

$$tg\,\widehat{bac} = \frac{(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)(x_3 - x_1) + (y_2 - y_1)(y_3 - y_1)}.$$

Z toho vysvítá:

Trojúhelník, jehož obsah neb tangenta některého úhlu jsou neracionálné, nemůže v rovině tak býti umístěn, aby vrcholy jeho měly racionálné souřadnice.

K vlastnostem těmto, náležejícím do onoho oboru, jejž Francouzové v novější době *„géométrie des quinconnes“* nazývají, poukázali *Lucas* a *Laisant*; *) dovolíme si připojiti k tomu malou poznámku týkající se trojúhelníků racionálných. Jak známo, slove *trojúhelníkem racionálným* takový, jehož strany i obsah mají racionálné hodnoty. Z výměru toho plyne ihned vzhledem k hořejšímu:

Trojúhelník, jehož vrcholy mají racionálné souřadnice a strany racionálné délky, jest racionálným.

Strany jeho tvoří s osami souřadnými racionálné úhly, nazveme-li racionálným takový úhel, jehož všechny goniometrické funkce jsou racionálné. Z jedné takové polohy lze trojúhelník racionálný převésti do jiné těchže vlastností, otočíme-li jej kolem počátku o racionálný úhel.

Strany trojúhelníku racionalného dány jsou relací

$$a : b : c = m(n^2 + 1) : n(m^2 + 1) : (m + n)(mn - 1),$$

v níž m a n jsou libovolné racionálné hodnoty, vázané toliko podmínkou $mn - 1 > 0$. Význam jich geometrický jest tento:

$$m = cotg\,\tfrac{1}{2}\,\widehat{bac},\quad n = cotg\,\tfrac{1}{2}\,\widehat{cba}.\text{**)}$$

Nazveme-li c_1, c_2 průměty stran $\overline{bc}$, $\overline{ca}$ do strany $\overline{ab}$, tak že jest

*) Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques. Tome VI. pag. 9. et 156.

**) Viz článek prof. Pánka „O trojúhelnících racionálných“ Časopis, ročník VI. str. 235 a násl.)

$$c_1 : c_2 : c = m(n^2 - 1) : n(m^2 - 1) : (m + n)(mn - 1),$$

jsou patrně i tyto hodnoty racionálné.

Vytkněme nyní dva vrcholy racionálného trojúhelníka, ku př. a, b, tak, aby měly racionálné souřadnice; potom jest

$$c = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

hodnota racionalná a rovněž i úkony

$$\cos\varphi = \frac{x_2 - x_1}{c}, \quad \sin\varphi = \frac{y_2 - y_1}{c},$$

značí-li φ úhel strany $\overline{ab}$ s osou X. Pro třetí vrchol trojúhelníka obdržíme pak souřadnice

$$x_3 = x_1 + c_2 \cos\varphi - v_c \sin\varphi$$
$$y_3 = y_1 + c_2 \sin\varphi + v_c \cos\varphi,$$

kdež v_c značí výšku k straně $\overline{ab}$ příslušnou a jest

$$v_c = \frac{2mnc}{(m + n)(mn - 1)}.$$

Dosazením hodnot lze konečně vzorcům pro x_3 a y_3 dáti podobu:

$$x_3 = \frac{m(n^2 - 1)x_1 + n(m^2 - 1)x_2 - 2mn(y_2 - y_1)}{(m + n)(mn - 1)}.$$

$$y_3 = \frac{m(n^2 - 1)y_1 + n(m^2 - 1)y_2 + 2mn(x_2 - x_1)}{(m + n)(mn - 1)}.$$

Vzorci těmito jest při dvou daných vrcholech trojúhelníka racionálného třetí vrchol určen pomocí dvou neodvislých racionálných argumentů m, n; zároveň odtud zřejma jest věta:

Mají-li dva vrcholy racionálného trojúhelníka v pravoúhlé soustavě racionálné souřadnice, má je i třetí.

O složení čísel mocněných.

Pro žáky středních škol napsal Dr. F. J. Studnička.

Rozeznávati čísla *sudá* a *lichá* bylo již od pradávna obyčejem a vyšetřovati složení čísel prostých a mocněných taktéž od nejstarších dob bylo úkolem pro počtáře vítaným. Rozvoj nauky o číslech*) poskytuje poučných toho dokladů hojnost, a jeden

*) Viz krátký jeho přehled na počátku spisu: *Studnička* „Základové nauky o číslech“ Praha, 1875, pag. 5—25.