mezi něž brzy se zařadí i náš spis do tisku již uchystaný a Jednotou českých mathematiků do nákladu vzatý.

Poznámka ku sestrojení průmětu plochy hyperboloidu jednodílného.

Napsal

B. Procházka,
professor v Karlíně.

1. Projektivního vztahu přímek téže soustavy jednodílného hyperboloidu s řadou bodů, které stanoví tyto přímky na libovolné křivce rovinné této plochy,*) můžeme užíti ku řešení následní úlohy vyskytující se v deskriptivní geometrii:

Z daných průmětů A', B', C', D' (orthogonalných, klinogonalných neb centralných) čtyř přímek A, B, C, D téže soustavy jednodílného hyperboloidu a jejich bodů stopních a, b, c, d jest sestrojiti stopu S a průmět obrysové křivky O této plochy.

Křivka stopní S a průmět O' obrysové křivky plochy hyperboloidu (z nichž prvá obsahuje stopy přímek plochy této a druhá obaluje průměty jejich) jsou křivky 2. stupně, dotýkající se ve dvou bodech.**)

2. Abychom stopu S sestrojili, stačí stanoviti jeden další bod její, který ji s danými body a, b, c, d bude určovati. Za tím účelem považujeme průmět A' za průmět přímky druhé soustavy ${}^1P$ téhož hyperboloidu, kterou protínají přímky prvé soustavy B, C, D v bodech m, n, p a sestrojme stopou a přímky A a přímkami B, C, D roviny, jichž stopami jsou přímky M, N, P, spojující bod a s body b, c, d. Řada průmětů bodů m, n, p... jest projektivní se svazkem stop M, N, P...***) Stopa R, stotožňující se s průmětem A' protíná stopu S v bodu e, který jest stopou přímky první soustavy E, a zároveň stopou přímky

---

*) *„Základové vyšší geometrie“* od *Dra Emila a Eduarda Weyra,* díl III. str. 32.

**) Tamtéž, str. 35.

***) Tamtéž, 32.

druhé soustavy ${}^1P$. Jest tedy bod e totožný s bodem r řady bodů m, n, p... odpovídajícím stopě R v projektivním svazku M, N, P..., kterýž známou konstrukcí sestrojíme na základě rovnosti dvojpoměru

$$(m', n', p', r') = (M, N, P, R)$$

a tak docílíme pátého bodu křivky 2. stupně S.

3. Průmět O' křivky obrysové sestrojíme, když určíme ještě jednu další tečnu její. Bodu q přímky ${}^1P$, jehož průmět q' se stotožňuje se stopou a přímky A, přísluší přímka F 1. soustavy, jejíž průmět se bude stotožňovati s příslušnou stopou Q svazku a. Stopa Q, již opět sestrojíme na základě promětnosti svazku a a řady průmětů bodů na přímce ${}^1P$, jest tudíž pátou tečnou křivky O'.

4. Kollinearné souvislosti obou křivek 2. stupně S a O' můžeme použiti, abychom ze sestrojené křivky S odvodili křivku O. Bude však předem třeba sestrojiti osu kollineace G, kteráž spojuje dotýčné body h a k obou křivek nebo střed kollineace g, určený průsekem tečen sestrojených ku křivkám těm v bodech h a k.

Tečně T, sestrojené v bodě a ku křivce S, přísluší bod t', ve kterém se dotýká přímka A' křivky O' a který sestrojíme nahoře uvedeným způsobem. Bod ${}^1a$ harmonicky sdružený s bodem t' vzhledem ku bodům a a r' jest jedním bodem osy G, neboť body t a ${}^1a$ jsou samodružné body involuční řady, kterou svazek křivek 2. stupně v týchž dvou bodech h a k křivky S se dotýkajících, určuje na přímce A, a které tudíž jsou body a a r' harmonicky odděleny. Použijeme-li tak jako přímky A' jiné s daných tečen, ku př. přímky B', můžeme sestrojiti druhý bod ${}^1b$ osy G a tak určiti přímku tuto body ${}^1a$ a ${}^1b$. Střed kollineace g lze pak stanoviti na základě sestrojené osy G.

5. Můžeme jej však také sestrojiti bezprostředně. S bodu a ku křivce O' vedené tečny A' a Q oddělují harmonicky tečnu T (v bodě a ku křivce S sestrojenou) a přímku ${}^1A$ bodem g procházející, neboť tečny T a ${}^1A$ jsou samodružné paprsky involučního svazku tečen, vedených s bodu a ku řadě kuželoseček, dotýkajících se v týchž dvou bodech (h a k) křivky S, a které tudíž tečnami T a Q jsou harmonicky odděleny. Použijeme-li tak i jiného bodu křivky S ku př. b, obdržíme druhou přímku

^1B, která se s přímkou ^1A protíná ve středu kollineace g. Takto nalezené osy a středu kollineace použijeme, abychom sestrojili křivku O'.

6. Úloha předem uvedená se zjednoduší, jest-li *z dané stopy S a průmětů A', B', C' tří přímek hyperboloidu jednodílného jest sestrojiti průmět jeho obrysové křivky O.*

Způsob 1. Použijme opět projektivnosti řady bodové m' n'.. na přímce $^1P' \equiv A'$ a svazku M, N,... o středu a, v kteréž přísluší druhému průsečnému bodu p' přímky A' se stopou S ve svazku a přímka $P \equiv A'$. Těmito třemi družinami m', n', p', a M, N, P jest tato projektivnost určena a můžeme nyní ku každému bodu řady $^1P' \equiv A'$ sestrojiti sdružený paprsek svazku a. Sestrojíme onen paprsek R, jemuž přísluší bod $r' \equiv a$, a který bude zároveň tečnou křivky O', poněvadž obsahuje svůj bod sdružený. Kdybychom použili prométnosti řady bodové na přímce B' a svazku o středu b, obdrželi bychom další tečnu Q, která s tečnami A', B', C', R křivku O' úplně určuje.*)

Také můžeme, aniž bychom sestrojovali další tečny (R a Q), použíti ku sestrojení křivky O' osy kollineace G obou kuželoseček S a O' způsobem naznačeným ve článku 4.

Způsob 2. Jest-li se nalezají body m' a n', v nichž se tečny A' B' a A' C' protínají, zevně křivky S, pak možno řešiti tutéž úlohu jiným způsobem. Sestrojíme-li s bodu m' tečny ku stopě S, budou tyto s přímkami A' B' tvořiti involuční svazek, jehož jeden samodružný paprsek ^1A prochází středem kollineace g obou křivek S a O', (druhý jest tečnou ku oné křivce 2. stupně řady S, O', která obsahuje bod m'). Použijeme-li týmž způsobem bodu n', obdržíme nový involuční svazek tečen, jehož jeden samodružný paprsek ^1B se protíná s paprskem ^1A ve středu kollineace g.

7. Tímto způsobem můžeme řešiti tuto úlohu i v případě, kdy ony tečny A', B', C' neprotínají stopu S a tudíž nemohou býti pokládány za průměty přímek hyperboloidu. Pak možno je však bráti za tečné přímky ku průmětu obrysové křivky O nějaké *nepřímkové plochy 2. stupně.* Poněvadž v tomto případě

*) Úlohu tuto řeší jiným způsobem *Dr. Chr. Wiener* ve svém díle „*Lehrbuch der darstellenden Geometrie.*" II. Band. Leipzig, 1887. Pag. 122.

není bodů stopních a, b, c obdržíme čtyři možná řešení a tudíž i čtyři křivky O'.*)

8. Zajímavou by se stala tato úloha, *kdyby vedle tečen A', B', C' křivky O' byla dána imaginarní křivka kruhová S, jakožto stopa jisté nepřímkové plochy 2. stupně.*

Abychom tuto úlohu rozřešili, *sestrojíme takovou realnou křivku kruhovou, vzhledem ku které přísluší bodu p týž involuční svazek sdružených polár jako vzhledem ku imaginární křivce kruhové S.*

Nechť jest imaginární křivka kruhová S vyjádřena idealně křivkou kruhovou J o středu s.**) Polaru bodu p vzhledem ku křivce S nalezneme, když v tomto bodě sestrojíme kolmou přímku L ku přímce ${}^1S$, určené body p a s. Jedním jejím bodem průsečným s křivkou J ku př. l sestrojíme průměr jeho, a v druhém mezném bodě k tohoto průměru sestrojíme tečnu T, v jejímž proniku h s přímkou ${}^1S$ sestrojená kolmice P k této přímce jest polárou bodu p. Jelikož lze tuto poláru také sestrojiti, když vedeme poloměr sq kolmý ku ${}^1S$ a ku qp sestrojíme v bodě q kolmici qh, jest přímka P také polárou bodu s vzhledem ku realné křivce kruhové R, která prochází bodem q, a v bodě p má svůj střed.

K paprsku A involučního svazku sdružených polar p vzhledem k imaginarní křivce S nalezneme sdružený paprsek A', když bodem p sestrojíme kolmici ku přímce ${}^1A'$, kteráž spojuje bod průsečný a přímky A a polary P se středem s. Ve svazku involučním s vzhledem ku křivce R přísluší přímce ${}^1A$ (kolmé ku A) přímka ${}^1A'$ kolmá ku přímce A'.

Jsou tedy sdružené paprsky involučního svazku sdružených polar s kolmy ku paprskům involučního svazku sdružených polar p. Otočíme-li svazek s o úhel 90^0 kolem středu jeho a pošineme pak střed jeho do bodu p, stotožní se oba involuční svazky sdružených polar s a p.

Můžeme tudíž nahraditi involuční svazek sdružených polar p vzhledem ku imaginární křivce kruhové S, jejímž středem jest bod s, a vzhledem k níž jest P polarou bodu p, totožným invo-

---

*) Tamtéž.

**) Tamtéž, I. Band, Pag. 322.

lučním svazkem sdružených polar vzhledem ku jisté realné křivce kruhové ${}^1R$, kteráž povstane tím, že jinou realnou křivku kruhovou R, jejíž střed jest bod p, a vzhledem k níž jest bod s polem polary P, — otočíme kolem bodu p o úhel 90^0.

9. Vraťme se k úloze původní a sestrojme křivku O', jsou-li dány tři tečny její A', B', C' a stopa S, jakožto imaginarní křivka kruhová vyjádřená idealně křivkou kruhovou J o středu s.

Dle článku 6. vyhledáme samodružné přímky F a G involučního svazku tečen s bodu průsečného m' tečen A' a B' ku řadě křivek 2. stupně, určené křivkami S a O'; jednu realnou družinu involučního svazku tečen, to jest tečny A' a B' ke křivce O' známe, a druhou imaginární t. j. tečny ku imaginární křivce S stanovíme dvěma družinami involučního svazku sdružených polar vzhledem ku imaginární křivce S.

Týmž způsobem určíme samodružné paprsky ${}^1F$ a ${}^1G$ involučního svazku tečen o středu n', v němž se tečny B' a C' protínají. Přímky ${}^1F$ a ${}^1G$ protínají se s přímkami dříve určenými F a G ve čtyřech bodech, z nichž každý jest středem kollineace křivek O' a S. Obdržíme tudíž čtyři možné křivky O', z nichž sestrojíme tu, která přísluší k onomu bodu p, v němž se protínají přímky F a ${}^1F$.

Jelikož křivka imaginarní S se nám nehodí ku konstrukci kollinearně sdružené křivky O', použijeme realné křivky kruhové ${}^1R$ (viz článek předcházející), kteráž bude míti s ní společný svazek involuční sdružených polar p a proto jest i s křivkou O' v poloze perspektivné vzhledem ku bodu p jakožto středu kollineace.

Polarou tohoto bodu jest vzhledem ku křivce O' (a tudíž i S) přímka P a vzhledem ku křivce ${}^1R$ přímka ${}^1P$, kterou sestrojíme známým způsobem. Bodu průsečnému u tečny A' s polárou P ku křivce O' (a S) příslušící, odpovídá kollinearně bod ${}^1u$, v kterém přímka up protíná přímku P'. Tečně A' přísluší tečny sestrojené s bodu u' ku křivce ${}^1R$. Zvolme jednu z nich a označme ji ${}^1A$.

Průsekem r tečen A' a ${}^1A$ a průsekem y obou polar P a ${}^1P$ určena jest osa kollineace ${}^1O$ obou křivek O' a ${}^1R$. Jelikož nyní známe střed kollineace p, její osu ${}^1O$ a jednu družinu kollinearných bodů u a ^1u, můžeme sestrojovati k jednotlivým bodům křivky kruhové ^1R kollinearně sdružené body křivky O'. Jest zřejmo, že body průsečné křivky ^1R s osou kollineace ^1O také náležejí křivce O', jejíž osy bychom mohli také přímo sestrojiti na základě této souvislosti kollinearné.*)

10. Na místě křivky S a tří tečen křivky O' mohou býti dány *křivka O' a tři body a, b, c stopy S, kterou lze pak úplně sestrojiti.*

S bodů a, b, c sestrojíme tečny A', B', C' ku křivce O' a považujeme ji za průměty tří přímek plochy hyperboloidu.

Poněvadž lze každým z těchto tří bodů sestrojiti dvé tečen ku křivce O', budeme míti osm různých trojic tečen, z nichž vždy dvě určují týž hyperboloid; obdržíme proto čtyři různé hyperboloidy, jimž čtyři různé křivky O' přísluší. Zvolíme-li jeden z oněch osmi případů, pak sestrojíme křivku O' takto:

Způsob 1. Abychom mohli užiti projektivnosti řady bodové m', n', ... na tečně A' a svazku M, N,... o středu a, opatříme si třetí družinu. Touto družinou jest bod $r' \equiv a$ v řadě bodové A', jemuž přísluší tečna R sestrojená tímto bodem ku křivce O', jakožto sdružený paprsek svazku a. Cestou naznačenou ve článku 2. sestrojíme body p' a q', v kterých tečny A' a B' protínají křivku S podruhé. Body těmito a body a, b, c jest určena pak křivka S a možno ji sestrojiti úplně.

Anebo vyhledáme si ku sestrojení křivky této místo bodů p' a q', na přímkách A' a B' body a^1 a ^1b (tak jako jsme to učinili ve článku 4.), kteréž určují osu kollineace G obou křivek O' a S, použijíce jí ku sestrojení této křivky.

Způsob 2. Jestli dvě ze spojnic ab, ac, bc protínají křivku O', pak přijdeme rychleji k cíli, použijeme-li involučních řad bodů, které křivky S a O' určují na těchto spojnicích. Dvěma páry samodružných bodů těchto involučních řad určeny jsou čtyři možné osy kollineace G, na jichž základě lze ku křivce O' sestrojiti kollinearně čtyři příslušné stopy S.

11. Tímtéž způsobem lze řešiti tuto úlohu, kdy body a,

---

*) *„Soustava deskriptivní geometrie"* od *professora Františka Tilšera.* Díl první. Praha, 1870. Pag. 105.

b, c se nalézají uvnitř křivky O' nějaké *nepřímkové plochy 2. stupně*, tak že nelze sestrojiti tečny s bodů těchto ku křivce O'.*)

12. Kdyby křivka O' byla *imaginární křivkou kruhovou*, pak bychom dospěli k cíli cestou naznačenou ve článku 9.

Vyhledali bychom na přímce M, dané body a a b stopy S spojující, samodružné body f a g involuční řady bodů, v nichž přímka M protíná křivky svazku kuželoseček určeného křivkami S a O'; jednou realnou družinou této involuční řady, to jest body a a b známe a druhou družinu imaginarní, t. j. proniky přímky M s imaginarní křivkou kruhovou S stanovíme dvěma družinami involuční řady sdružených polů vzhledem ku této křivce, kterou za tím účelem, jako ve článku 9., idealně vyjádříme realnou křivkou kruhovou J.

Právě tak určili bychom si samodružné body ${}^1f$ a ${}^1g$ involuční řady, kterou určuje týž svazek křivek 2. stupně na přímce N, spojující body a a c stopy S. Body ${}^1f$ a ${}^1g$ určují s body f a g čtyři přímky, z nichž každá jest osou kollineace křivek O' a S'. Při konstrukci každé z možných křivek S užili bychom s výhodou dříve uvedeného způsobu, jakým lze pomocí realné křivky kruhové sestrojiti křivku kollinearnou ku imaginarní křivce kruhové.**)

Z geometrie kuželoseček.

Píše

M. Lerch,

docent vysoké školy technické v Praze.

(Pokračování.)

5. Ve svazku kuželoseček o vrcholech $a_1 a_2$, $b_1 b_2$ přicházejí tři kuželosečky zvrhlé; jsou to páry přímek

$$(\overline{a_1 a_2}, \overline{b_1 b_2}), \quad (\overline{a_1 b_1}, \overline{a_2 b_2}), \quad (\overline{a_1 b_2}, \overline{a_2 b_1}),$$

t. j. *páry protějších stran úplného čtyřhranu* $a_1 a_2 b_1 b_2$. Tyto sta-

*) *Dr. Chr. Wiener.* „L. d. d. G.“ II. Band. Pag. 109.

**) Tamtéž, pag. 121.