Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Zdeněk Pírko

Pohyb proměnného rovinného útvaru

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 71 (1946), No. 1-4, 71--77

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121085

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, roč. 71 (1946)

Pohyb proměnného rovinného útvaru.

Zdeněk Pírko, Praha.

(Došlo dne 22. prosince 1945.)

1. Budiž dána rovinná křivka Γ a budíž σ její oblouk, počítaný od jistého bodu. Zaveďme tento oblouk jako parametr na křivce; označíme-li $\mathfrak{r}$ radiusvektor obecného bodu M křivky Γ, můžeme psát její rovnici ve vektorovém tvaru

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{r}(\sigma). \tag{1}$$

O složkách $x = x(\sigma)$, $y = y(\sigma)$ vektoru $\mathfrak{r}$ předpokládejme, že jsou jednoznačnými funkcemi parametru σ v jistém společném oboru a že mají první a druhou derivaci. — Budeme v dalším nazývat křivku Γ křivkou základní; kromě toho nazveme pravoúhlou soustavu Σ souřadnic x, y, k nimž je křivka rovnicí (1) vztažena, soustavou absolutní.

Vedle této absolutní soustavy Σ zaveďme ještě pravoúhlou soustavu $'\Sigma$ souřadnic $'x$, $'y$ takto: kladnou osou úseček nové soustavy budiž kladná tečna základní křivky Γ v obecném bodě jejím M, kladnou osou pořadnic budiž příslušná kladná normála; přitom kladné smysly nových os souřadnic jsou definovány obvyklým způsobem.[1]) Soustavu nazveme soustavou relativní.

Konečně budiž P bod, jehož souřadnice v relativní soustavě $'\Sigma$ jsou $('x; 'y)$. — Jestliže se relativní soustava pohybuje podél základní křivky Γ a jestliže kromě tohoto základního pohybu má bod P v soustavě $'\Sigma$ zároveň ještě svůj pohyb vlastní, od základního pohybu neodvislý, tu popíše všeobecně trajektorii $'\Gamma$; označíme-li $\mathfrak{R}$ radiusvektor bodu P, vztažený k absolutní soustavě, je rovnice křivky $'\Gamma$ ve vektorovém tvaru

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{r} + {'x}\mathfrak{t} + {'y}\mathfrak{n}. \tag{2}$$

Přitom jsou $\mathfrak{t} = \mathfrak{t}(\sigma)$ resp. $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}(\sigma)$ jednotkový vektor tečny resp. normály základní křivky Γ, skaláry

$$'x = 'x(\sigma, \varrho), \quad 'y = 'y(\sigma, \varrho) \tag{3$_1$}$$

[1]) Viz Václav Hlavatý, Diferenciální geometrie křivek a ploch a tensorový počet, Praha 1937; 21 násl.

jsou jednoznačné funkce dvou nezávislých parametrů σ, ϱ v jistém společném oboru, které mají první derivaci. Je tedy také

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}(\sigma, \varrho); \tag{3_2}$$

σ je — jako výše — oblouk základní křivky Γ, ϱ je parametr, jímž stanovíme vlastní pohyb bodu P v relativní soustavě. — Křivku $'\Gamma$ budeme v dalším nazývat křivkou odvozenou.

2. Pro křivku $'\Gamma$ odvodíme nyní jisté základní vztahy. — Diferencujeme-li rovnici (2), obdržíme nejprve

$$d\mathfrak{R} = d\mathfrak{r} + d('x\mathfrak{t}) + d('y\mathfrak{n})$$

a tedy, vzhledem k rovnicím (3_1) a vztahům $\mathfrak{r}_\sigma = \mathfrak{t}$, $\mathfrak{r}_\varrho = \mathfrak{t}_\varrho = \mathfrak{n}_\varrho = 0$,

$$\left.\begin{aligned} d\mathfrak{R} = \mathfrak{t}\, d\sigma + {'x}\mathfrak{t}_\sigma\, d\sigma + {'x_\sigma}\mathfrak{t}\, d\sigma + {'x_\varrho}\mathfrak{t}\, d\varrho + \\ + {'y_\sigma}\mathfrak{n}\, d\sigma + {'y}\mathfrak{n}_\sigma\, d\sigma + {'y_\varrho}\mathfrak{n}\, d\varrho. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Podle vzorců Frenetových-Serretových však platí

$$\mathfrak{t}_\sigma = k\mathfrak{n}, \quad \mathfrak{n}_\sigma = -k\mathfrak{t},$$

kdež $k = k(\sigma)$ je křivost základní křivky Γ v bodě (σ).

Můžeme tedy psát rovnici (4) také ve tvaru

$$\left.\begin{aligned} d\mathfrak{R} = (d\sigma + {'x_\varrho}\, d\varrho + {'x_\sigma}\, d\sigma - {'y}k\, d\sigma)\, \mathfrak{t} + \\ + ({'y_\varrho}\, d\varrho + {'y_\sigma}\, d\sigma + {'x}k\, d\sigma)\, \mathfrak{n}. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Označme $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}('x, 'y)$ resp. $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}('x, 'y)$ vektor tečny resp. normály odvozené křivky $'\Gamma$ a s její oblouk. Platí tudíž nejprve

$$\frac{d\mathfrak{R}}{ds} = \mathfrak{T}$$

a tedy podle (5)

$$\mathfrak{T}\, ds = A\mathfrak{t} + B\mathfrak{n}, \tag{6}$$

jestliže jsme položili pro stručnost

$$\left.\begin{aligned} A &= d\sigma + {'x_\varrho}\, d\varrho + {'x_\sigma}\, d\sigma - {'y}k\, d\sigma, \\ B &= \phantom{d\sigma +{}} {'y_\varrho}\, d\varrho + {'y_\sigma}\, d\sigma + {'x}k\, d\sigma. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Vyjádříme-li ještě vektor $\mathfrak{T}$ lineárně pomocí skalárů T'_x, T'_y

$$\mathfrak{T} = T'_x\mathfrak{t} + T'_y\mathfrak{n}$$

čili

$$\mathfrak{T}\, ds = (T'_x\mathfrak{t} + T'_y\mathfrak{n})\, ds, \tag{8}$$

obdržíme srovnáním rovnic (6), (8)

$$(A - T'_x\, ds)\, \mathfrak{t} + (B - T'_y\, ds)\, \mathfrak{n} = 0$$

a tedy

$$\left.\begin{aligned} A - T'_x\, ds = 0, \\ B - T'_y\, ds = 0. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Hledané základní vztahy získáme, dosadíme-li v rovnicích (9) za A, B podle (7):

$$\left.\begin{aligned}(1 + {}'x_\sigma - {}'yk)\,\mathrm{d}\sigma + {}'x_\varrho\,\mathrm{d}\varrho - T_{'x}\,\mathrm{d}s = 0,\\ ({}'y_\sigma + {}'xk)\,\mathrm{d}\sigma + {}'y_\varrho\,\mathrm{d}\varrho - T_{'y}\,\mathrm{d}s = 0.\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

3. Obecné rovnice (10) specialisujme! — Jestliže bod P je v relativní soustavě pevný (bez vlastního pohybu), pak je

$${}'x_\varrho = {}'y_\varrho = 0 \text{ a ovšem i } \mathrm{d}\varrho = 0,$$

takže rovnice (10) se zjednoduší:

$$\left.\begin{aligned}(1 + {}'x_\sigma - {}'yk)\,\mathrm{d}\sigma - T_{'x}\,\mathrm{d}s = 0,\\ ({}'y_\sigma + {}'xk)\,\mathrm{d}\sigma - T_{'y}\,\mathrm{d}s = 0.\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Označíme-li $\mathrm{d}'x$ resp. $\mathrm{d}'y$ diferenciály souřadnic $'x$, $'y$ bodu P v relativní soustavě, pak bude

$$\frac{\mathrm{d}'x}{\mathrm{d}s} = T_{'x}, \quad \frac{\mathrm{d}'y}{\mathrm{d}s} = T_{'y},$$

takže rovnice (11) můžeme psát ve tvaru

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}'x}{\mathrm{d}\sigma} &= 1 + {}'x_\sigma - {}'yk,\\ \frac{\mathrm{d}'y}{\mathrm{d}\sigma} &= \phantom{1 + {}} {}'y_\sigma + {}'xk.\end{aligned}\right| \tag{12}$$

V této podobě nejsou rovnice (12) nic jiného, než t. zv. **fundamentální rovnice Cesàrovy**, jež jsou východiskem pro přirozenou analysu křivek.[2] S tohoto hlediska mohli bychom nazvat rovnice (10)

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}'x}{\mathrm{d}\sigma} &= 1 + {}'x_\sigma - {}'yk + {}'x_\varrho \frac{\mathrm{d}\varrho}{\mathrm{d}\sigma},\\ \frac{\mathrm{d}'y}{\mathrm{d}\sigma} &= \phantom{1 + {}} {}'y_\sigma + {}'xk + {}'y_\varrho \frac{\mathrm{d}\varrho}{\mathrm{d}\sigma}\end{aligned}\right|$$

„zobecněnými rovnicemi Cesàrovými".

Z rovnic (12) obdržíme pro úhel ν, který svírá tečna odvozené křivky $'\Gamma$ s relativní osou $'x$ (v případě, že bod P nemá vlastní pohyb), výraz

$$\operatorname{tg}\nu = \frac{\mathrm{d}'y}{\mathrm{d}'x} = \frac{{}'y_\sigma + {}'xk}{1 + {}'x_\sigma - {}'yk}; \tag{13}$$

pro čtverec elementu oblouku $\mathrm{d}s^2$ této křivky pak nalezneme

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{d}s^2 &= \mathrm{d}'x^2 + \mathrm{d}'y^2 = \\ &= [(1 + {}'x_\sigma - {}'yk)^2 + ({}'y_\sigma + {}'xk)^2]\,\mathrm{d}\sigma^2.\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

[2]) Viz Ernesto Cesàro, Lezioni di geometria intrinseca (něm. Vorlesungen über natürliche Geometrie, přel. Gerhard Kowalewski, Berlin 1926 [II. vyd.], 21 násl.); Georg Scheffers, Einführung in die Theorie der Kurven in der Ebene und im Raume, Berlin 1923 (III. vyd.), 91 násl.

Stanovme nyní odvozenou křivku $'\Gamma$ těmito dalšími požadavky:

$$'x = l(\sigma), \quad 'y = 0,$$

kdež $l(\sigma)$ je libovolná (regulární) funkce oblouku σ základní křivky Γ. Pak obdržíme z rovnice (13)

$$\operatorname{tg} \nu = \frac{k\, l(\sigma)}{1 + l'(\sigma)} \qquad \left(l'(\sigma) = \frac{dl(\sigma)}{d\sigma}\right)$$

čili

$$l'(\sigma) - k\, l(\sigma) \operatorname{cotg} \nu + 1 = 0; \tag{15}$$

z rovnice (14)

$$ds^2 = [(1 + l'(\sigma))^2 + k^2\, l^2(\sigma)]\, d\sigma^2$$

a tudíž vzhledem k rovnici (15) (žádáme-li zároveň, aby oblouk s rostl s rostoucím obloukem σ)

$$ds = k \frac{l(\sigma)}{\sin \nu}\, d\sigma. \tag{16}$$

Rovnice (15), (16) budeme aplikovat na pohyb proměnného rovinného útvaru.[3])

4. Z rovnice (15) plyne

$$dl(\sigma) = k\, l(\sigma) \operatorname{cotg} \nu\, d\sigma - d\sigma.$$

Jestliže označíme $d\tau$ kontingenční úhel základní křivky Γ a dále $N(\sigma) = \dfrac{l(\sigma)}{\sin \nu}$, můžeme napsat předcházející rovnici ve tvaru

$$dl(\sigma) = \left[N(\sigma) \cos \nu - \frac{d\sigma}{d\tau}\right] d\tau. \tag{17}$$

Při stejném označení obdržíme z rovnice (16) vztah

$$ds = N(\sigma)\, d\tau. \tag{18}$$

Uvažujme konečně dvě základní křivky Γ_1, Γ_2 obecně různé a další křivku $'\Gamma$ obecně rozdílnou od křivek Γ_1, Γ_2. Z libovolného bodu křivky $'\Gamma$ veďme tečny ke křivkám Γ_1, Γ_2; označme λ jejich úhel. Jsou-li $d\tau_i$ kontingenční úhly křivek Γ_i ($i = 1, 2$), pak platí nejprve

$$d\lambda = d\tau_1 - d\tau_2$$

---

[3]) K jiné geometrické aplikaci rovnic (15), (16), jež pochází od Herwiga, uveďme: Je-li $k = k(\sigma)$ přirozenou rovnicí základní křivky Γ a předpokládáme-li, že úhel ν je stálý, je odvozená křivka $'\Gamma$ isogonální trajektorií tečen základní křivky Γ (pod úhlem ν). Rovnici ∞^1 těchto trajektorií nalezneme z diferenciální rovnice lineární 1. řádu (15); zní

$$l(\sigma) = \exp(\operatorname{cotg} \nu \,.\, \textstyle\int k\, d\sigma)\, [C - \int \exp(-\operatorname{cotg} \nu \,.\, \int k\, d\sigma)\, d\sigma],$$

C je integrační konstanta. Rovnice (16) spolu s rovnicí předcházející určuje pak oblouk této trajektorie. Viz Gino Loria, Curve piane speciali algebriche e transcendenti, II, Milano 1930; 306 násl.

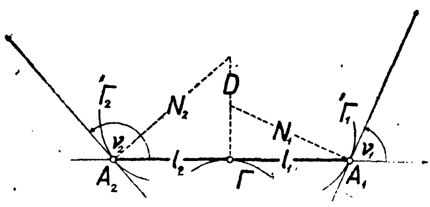
a tudíž podle rovnice (18)

$$\mathrm{d}\lambda = \left(\frac{1}{N_1} - \frac{1}{N_2}\right)\mathrm{d}s, \tag{19}$$

kdež opět $N_i(\sigma_i) = \frac{l_i(\sigma_i)}{\sin \nu_i}$ $(i = 1, 2)$ je element oblouku křivky $'\Gamma$.

Rovnice (17), (18), (19) lze ihned interpretovat v kinematice proměnného rovinného útvaru:

Nechť se úsečka $\overline{A_1A_2}$ proměnlivé délky l pohybuje svými krajními body A_1, A_2 po daných dvou křivkách $'\Gamma_1$, $'\Gamma_2$ obecně různých a její pohyb budiž řízen tak, že zůstává stále tečnou dané křivky Γ, obecně rozdílné od křivek $'\Gamma_1$, $'\Gamma_2$ (obr. 1). Označíme-li, v souhlase s předcházejícím výkladem, σ oblouk křivky Γ, $\mathrm{d}\tau$ její kontingenční úhel, s_i oblouk křivky $'\Gamma_i$ a l_i části, v něž je úsečka $\overline{A_1A_2}$ v dané fázi pohybu rozdělena bodem dotyku s křivkou Γ $(i = 1, 2)$, pak změna délky $\mathrm{d}l$ úsečky l při přechodu z fáze dané do fáze sousední (při pošinutí úsečky $\overline{A_1A_2}$ po křivce Γ) je patrně rovna algebraickému součtu změn obou jejích částí, t. j.



Obr. 1.

$$\mathrm{d}l = \mathrm{d}l_1 + \mathrm{d}l_2,$$

při čemž platí podle rovnice (17)

$$\mathrm{d}l_i = \left(N_i \cos \nu_i - \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\tau}\right)\mathrm{d}\tau, \quad N_i = \frac{l_i}{\sin \nu_i}. \tag{20$_1$}$$

$$(i = 1, 2)$$

Poněvadž změny $\mathrm{d}l_1$, $\mathrm{d}l_2$ mají opačná znaménka, můžeme psáti také

$$|\,\mathrm{d}l\,| = |\,N_1 \cos \nu_1 - N_2 \cos \nu_2\,|\,\mathrm{d}\tau = D\,\mathrm{d}\tau; \tag{20$_2$}$$

význam délky D je patrný z obrázku. Vztah (20_1) je však známý jako druhá základní rovnice d'Ocagneova, vztah (20_2) jako první základní rovnice Mannheimova (pro změnu délky při pohybu proměnného rovinného útvaru).

Při zmíněném pošinutí bude změna oblouku $\mathrm{d}s_i$ křivky $'\Gamma_i$ dána rovnicí (18), totiž

$$\mathrm{d}s_i = N_i\,\mathrm{d}\tau; \tag{21$_1$}$$

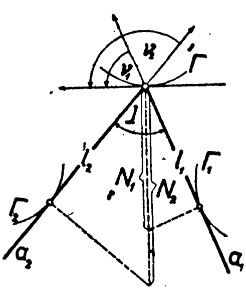
$$(i = 1, 2)$$

odtud pro poměr obou změn

$$\frac{\mathrm{d}s_1}{\mathrm{d}s_2} = \frac{N_1}{N_2}. \tag{21$_2$}$$

Vztah (21_1) je totožný s první základní rovnicí d'Ocagneovou (pro změnu oblouku při pohybu proměnného rovinného útvaru). vztah (21_2) je pak třetí základní rovnice Mannheimova (pro poměr změn oblouků; tento vztah byl ostatně známý již Newtonovi).

Konečně nechť se pohybuje úhel $\widehat{a_1 a_2}$ poměnlivé velikosti λ tak, že svými rameny a_1, a_2 se dotýká dvou daných křivek Γ_1, Γ_2 obecně různých, při čemž jeho pohyb je řízen tak, že vrchol úhlu probíhá danou křivkou $'\Gamma$, obecně rozdílnou od křivek Γ_1, Γ_2 (obr. 2). Označíme-li zase σ_i oblouk křivky Γ_i, $d\tau_i$ kontingenční úhel její ($i = 1, 2$), s oblouk křivky $'\Gamma$, pak změna úhlu $d\lambda$ úhlu λ při přechodu z fáze dané do fáze soumezné (při pošinutí úhlu $\widehat{a_1 a_2}$ po křivce $'\Gamma$) je patrně dána rovnicí (19)



Obr. 2.

$$|\,d\lambda\,| = \left|\frac{1}{N_1} - \frac{1}{N_2}\right| ds. \qquad (22)$$

Rovnice (22) je totožná s třetí základní rovnicí d'Ocagneovou a druhou základní rovnicí Mannheimovou (pro změnu úhlu při pohybu proměnného rovinného útvaru).

5. V závěru poznamenejme toto: Autorem základních rovnic pro pohyb proměnného rovinného útvaru je A. Mannheim[4]); způsob, jímž tyto rovnice odvodil, není však prostý námitek.[5]) Přesný důkaz methodou t. zv. infinitesimální geometrie podal teprve M. d'Ocagne[6]), ale pro každou rovnici samostatně, pozměniv také Mannheimovo pořadí. Význam vzorců dostatečně prokazují jejich různé geometrické aplikace.[7])

[4]) Nazývá je „formules primordiales“ a uveřejnil je poprvé v knize E. Bour, Cours de Mécanique et Machines, I, Cinématique, Paris 1865 (str. 51—52, 57, 59), poté ve vlastních spisech: Cours de Géométrie descriptive comprenant les éléments de la Géométrie cinématique, Paris 1880 a 1886 (I. a II. vyd.), str. 202—204 resp. 203—205); Principes et développements de Géométrie Cinématique, Paris 1894, str. 44—48.

[5]) Způsob, kterým Mannheim dokazuje své vzorce, lze posouditi také z důkazu vzorce (20_2), jak je podán v knize V. Jarolímek a B. Procházka, Deskriptivní geometrie pro vysoké školy technické, Praha 1909; str. 389.

[6]) Nazývá je „formules fondamentales“. Viz jeho spisy: Cours de Géométrie descriptive et de Géométrie infinitésimale, Paris 1896, str. 258 až 264; Cours de Géométrie pure et appliquée, I, Paris 1917; II, Paris 1918 (str. 123—131 prvního dílu); Cours de Géométrie, Paris 1930; str. 38—43. Způsob, kterým d'Ocagne dokazuje své vzorce, lze posoudit z důkazů, jak jsou podány v knize J. Sobotka, Differenciální geometrie, I, Praha 1909; str. 408 násl., 446 násl.

[7]) V uvedených spisech Mannheimových, d'Ocagneových a v knize Sobotkově.

V této práci jsem podal jejich důkaz, používaje jednotného hlediska a analytické methody. Význam rovnic (10) je však mnohem širší a daleko přesahuje úzký obor kinematiky proměnného rovinného útvaru.

*

Sur le mouvement d'une figure plane variable.

(Résumé de l'article précédent).

Pour l'étude des propriétés géométriques d'une figure plane variable qui se meut dans son plan, on se sert habituellement de certaines relations dites „primordiales" ou „fondamentales" qui étaient déduites à son temps par MM. Mannheim et d'Ocagne (cfr l'oeuvre magistral de Mannheim ou traités divers de d'Ocagne). Ces relations ne sont qu'un cas très particulier des équations générales, que nous appelons „les équations généralisées de M. Cesàro pour l'analyse intrins que des courbes planes". La démonstration de ces équations et leur spécialisation à celles de Mannheim et de d'Ocagne font l'objet de notre travail.