Václav A. Hruška

Une note sur les fonctions aux valeurs intermédiaires

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 71 (1946), No. 1-4, 67--69

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121087

Une note sur les fonctions aux valeurs intermédiaires.

Václav Hruška, Prague.

(Reçu le avril 1945.)

1. — **Définition.** — Soit donnée une fonction

$$f(x), \quad a \leqq x \leqq b. \tag{1,1}$$

Soient $\alpha \neq \beta$ deux points quelconques de l'intervalle (1,1), dans lesquels $f(x)$ a des valeurs différentes

$$f(\alpha) = A \neq B = f(\beta).$$

Si dans un point convenable situé entre α et β la fonction $f(x)$ devient égale à toute valeur choisie entre A et B, je dis que $f(x)$ est une fonction aux valeurs intermédiaires.

A l'aide de cette définition nous pouvons donner à un théorème bien connu de Darboux[1]) la forme suivante:

Théorème. — Soit

$$f(x), \quad a \leqq x \leqq b \tag{1,2}$$

une fonction ayant une dérivée dans chaque point de l'intervalle (1,2). Cette dérivée est une fonction aux valeurs intermédiaires dans l'intervalle (1,2).

Remarque. — De même les fonctions continues dans l'intervalle (1,1), ont naturellement la propriété mentionnée dans la Définition, ce que l'on démontre ordinairement d'une façon indépendante du théorème de Darboux. Mais on peut aussi le démontrer comme une conséquence de ce théorème, car toute fonction continue est aussi une dérivée de son intégrale définie de Cauchy-Riemann, ayant la limite supérieure variable.

2. — Je ne crois pas que le théorème suivant sur les fonctions aux valeurs intermédiaires ait déjà été prononcé:

Théorème. — Soient

$$f(x) \text{ et } \varphi(x), \quad a \leqq x \leqq b \tag{2,1}$$

[1]) Ch. J. de la Vallée-Poussin, Cours d'analyse infinitésimale t. 1; p. 70 (7ième éd., Paris, 1930, Gauthier-Villars).

deux fonctions qui possèdent des dérivées du premier ordre $f'(x)$ et $\varphi'(x)$ partout dans l'intervalle (2,1), dont la dérivée $\varphi'(x)$ va constamment en croissant ou constamment en décrossant dans (2,1). Alors la fonction

$$\lambda(x) = \frac{f'(x) - f'(a)}{\varphi'(x) - \varphi'(a)} \tag{2,3}$$

est une fonction aux valeurs intermédiaires dans (2,1).

Démonstration. — Soit, par exemple, $\varphi'(x)$ une fonction allant constamment en décroissant dans (2,1), c'est-à-dire

$$\begin{gathered}\varphi'(a) > \varphi'(\alpha) > \varphi'(x) > \varphi'(\beta), \\ a < \alpha < x < \beta \leqq b.\end{gathered} \tag{2,4}$$

Soit p. ex. aussi

$$A = \lambda(\alpha) > \lambda(\beta) = B. \tag{2,5}$$

Choisissons une valeur L quelconque entre A et B,

$$A > L > B \tag{2,6}$$

et considérons la fonction

$$\chi(x) = f(x) - x \,.\, f'(a) - L\,[\varphi(x) - x \,.\, \varphi'(a)], \quad a \leqq x \leqq b.$$

Elle a une dérivée

$$\chi'(x) = f'(x) - f'(a) - L\,[\varphi'(x) - \varphi'(a)] \tag{2,7}$$

partout dans

$$\alpha \leqq x \leqq \beta \tag{2,8}$$

qui a des valeurs

$$\begin{aligned}\chi'(\alpha) &= f'(\alpha) - f'(a) - L\,[\varphi'(\alpha) - \varphi'(a)] = \\ &= \lambda(\alpha)\,[\varphi'(\alpha) - \varphi'(a)] - L\,[\varphi'(\alpha) - \varphi'(a)] = \\ &= (A - L)\,[\varphi'(\alpha) - \varphi'(a)] < 0, \\ \chi'(\beta) &= f'(\beta) - f'(a) - L\,[\varphi'(\beta) - \varphi'(a)] = \\ &= \lambda(\beta)\,[\varphi'(\beta) - \varphi'(a)] - L\,[\varphi'(\beta) - \varphi'(a)] = \\ &= (B - L)\,[\varphi'(\beta) - \varphi'(a)] > 0\end{aligned}$$

dans les points $x = \alpha$ et $x = \beta$. Alors, d'après le théorème de Darboux, elle a la valeur

$$\chi'(\xi) = 0, \quad \alpha < \xi < \beta$$

dans un point ξ entre α et β, c'est-à-dire

$$\lambda(\xi) = \frac{f'(\xi) - f'(a)}{\varphi'(\xi) - \varphi'(a)} = L, \quad \alpha < \xi < \beta. \quad \text{c. q. f. d.}$$

Remarque de la rédaction. Dans le théorème de M. Hruška, on peut se passer de la supposition concernant la monotonie de $\varphi'(x)$. En effet, on peut énoncer le théorème suivant:

Soient $F(x)$, $G(x)$ deux fonctions réelles possédant dans l'intervalle fermé $\langle a, b\rangle$ des dérivées finies $F'(x)$,

$G'(x)$.[2]) Soit $G'(x) \neq 0$ pour $a \leq x \leq b$[3]) et posons $A = F'(a) : G'(a)$, $B = F'(b) : G'(b)$. Si $A \neq B$, alors la fonction $F'(x) : G'(x)$ prend, dans l'intervalle ouvert (a, b), toutes les valeurs situées entre A et B.

Démonstration. Soit p. ex. $A < B$ et soit C un nombre quelconque tel que $A < C < B$. Evidemment il existe un nombre $h > 0$ tel que

$$\frac{F(a+h)-F(a)}{G(a+h)-G(a)} < C < \frac{F(b)-F(b-h)}{G(b)-G(b-h)}, \quad a+h < b-h.$$

Choisissons un tel h. La fonction

$$f(x) = \frac{F(x+h)-F(x)}{G(x+h)-G(x)}$$

est continue dans l'intervalle fermé $\langle a, b-h \rangle$ (voir[3]) et l'on a $f(a) < C < f(b-h)$. Il existe donc un ξ tel que

$$a < \xi < b-h, \quad f(\xi) = C,$$

c'est-à-dire

$$F(\xi+h) - C\,G(\xi+h) = F(\xi) - C\,G(\xi).$$

D'après le théorème de Rolle, il existe un η tel que

$$a < \xi < \eta < \xi + h < b, \quad F'(\eta) - C\,G'(\eta) = 0, \quad \text{c. q. f. d.}$$

Dans le cas particulier $G(x) = x$ on retrouve le théorème de Darboux.

V. Jarník.

*

Poznámka o funkcích s intermediárními hodnotami.

(Obsah předešlého článku.)

Buďte $F(x)$, $G(x)$ reálné funkce v uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$, jež mají v $\langle a, b \rangle$ konečnou derivaci (v bodě a zprava, v bodě b zleva). Nechť $G'(x) \neq 0$ pro $a \leq x \leq b$. Položme $A = F'(a) : G'(a)$, $B = F'(b) : G'(b)$. Potom platí: je-li $A \neq B$, nabývá funkce $F'(x) : G'(x)$ v otevřeném intervalu (a, b) všech hodnot, ležících mezi čísly A, B.

---

[2]) Où $F'(a)$, $G'(a)$ désignent des dérivées du côté droit au point a et $F'(b)$, $G'(b)$ des dérivées du côté gauche au point b.

[3]) Pour $a \leq \alpha < \beta \leq b$ on a donc

$$G(\beta) - G(\alpha) = (\beta - \alpha)\,G'(\gamma) \neq 0 \quad (\alpha < \gamma < \beta).$$