Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Vladimír Knichal

Sur la distribution des mesures sur une sphére a n dimensions

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 71 (1946), No. 1-4, 45--54

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121092

Sur la distribution des mesures sur une sphère à n dimensions.

Vladimír Knichal, Praha.

(Reçu le 19 mai 1946.)

Dans mon article[1]) „Sur une généralisation d'un théorème des MM. Blichfeldt et Visser dans la géométrie des nombres" j'ai réussi à prouver le théorème suivant:

Théorème 1. *Soit S un groupe métrique et séparable (multiplicatif). Soient $\alpha\xi$ et $\xi\alpha$ des transformations continues en $\xi \in S$ pour tout $\alpha \in S$ (donc, α étant donné, $\alpha\xi$ signifie une homéomorphie de S en S). Soient $\sigma(\Gamma)$ et $\tau(\Gamma)$ deux mesures[2]) définies pour tout $\Gamma \subset S$ borelien. Soit $0 < \sigma(S) < \infty$, $0 < \tau(S) < \infty$. Soit $\sigma(\Gamma\alpha) = \sigma(\Gamma)$ pour tout $\alpha \in S$ et pour tout $\Gamma \subset S$ borelien. Pour chaque ensemble $\Gamma \subset S$ borelien il existe alors $\beta, \beta' \in S$ tels que*

$$\tau(\beta\Gamma) \leqq \frac{\tau(S)\,\sigma(\Gamma)}{\sigma(S)} \leqq \tau(\beta'\Gamma). \tag{1}$$

Dans la note suivante je voudrais présenter — par application du théorème cité — la solution d'un problème dû à M. Rössler — d'un problème tout-à-fait analogue à un théorème de M. Blichfeldt connu de la géométrie des nombres: Soient donnés h points x_1, $x_2, \ldots, x_h$ arbitraires sur une sphère à n dimensions et à l'aire P et un ensemble M situé sur cette sphère à la mesure (lebesguienne) $\mu(M)$. Alors sur l'unité d'aire tombent en moyenne $\frac{h}{P}$ points x_i. Si la distribution de points x_i était homogène, l'ensemble M contiendrait environs $\frac{h}{P}\,\mu(M)$ de points cités. On se pose la question si l'on peut „faire tourner" l'ensemble M, quelle que soit la distri-

[1]) Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Tome 71, 1946, page 33. Théorème 2.

[2]) S. Saks, Theory of the Integral, Warszawa 1937, p. 16 (une mesure est une fonction d'ensembles non négative et dénombrablement additive).

bution de ces points, de la façon que l'ensemble transformé par cette rotation contienne au moins $\frac{h}{p}\mu(M)$ points x_i. Ce problème, même un problème un peu plus général, est résolu d'une manière affirmative par le théorème suivant:[3])

Théorème 2. *Soit $n \geqq 1$ un nombre entier. Soit $K = K_n$ une sphère à n dimensions*

$$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 1 \tag{2}$$

à la métrique habituelle (comme un sousensemble d'un espace R_{n+1} cartésien à $n+1$ dimensions). *Soit $\mu(N)$ l'aire d'un ensemble $N \subset K$ borelien. Soit $\nu(N)$ une mesure*[2]) *arbitraire définie pour tout $N \subset K$ borelien. Soit*[4]) $0 < \nu(K) < \infty$.

Pour chaque $M \subset K$ borelien il existe alors des transformations β, β' isométriques positives (c. à d. des transformations linéaires homogènes, orthogonales au déterminant 1, transformant alors la surface (2) en soi-même d'une manière isométrique — brièvement appellées „rotations") *de la sphère K telles que l'on ait*

$$\nu(\beta M) \leqq \frac{\nu(K)\,\mu(M)}{\mu(K)} \leqq \nu(\beta' M). \tag{3}$$

Avant de démontrer le théorème 2 nous allons établir d'abord quelques remarques et lemmes.

Dans l'espace R_{n+1} nous allons désigner les points et les rayons vecteurs correspondants par les mêmes lettres.

Soit f une transformation isométrique de la surface K en K. Pour $x \in K$ posons $f(x) = x'$. Pour $x, y \in K$ on a[5]) $(x' - y')^2 = (x - y)^2$, donc

$$x' \,.\, y' = x \,.\, y. \tag{4}$$

Désignons les points $(1, 0, 0, \ldots, 0)$, $(0, 1, 0, \ldots, 0)$, $\ldots$, $(0, 0, 0, \ldots, 1)$ qui se trouvent sur la sphère K successivement par $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$. Ce système de points représente une base linéaire orthogonale dans R_{n+1} (car $a_i^2 = 1$, $a_i \,.\, a_k = 0$ pour $i \neq k$). Selon (4), $a'_0, a'_1, \ldots, a'_n$ forment évidement aussi une base linéaire orthogonale et l'on a $a'_k = \sum\limits_i \alpha_{ki} a_i$, où α_{ki} sont des coefficients réels. Ces coefficients forment d'après (4) une matrice orthogonale au déterminant $|\alpha_{ki}| = \pm 1$. Si $|\alpha_{ki}| = +1$ on a la transformation isométrique positive, dans le cas contraire négative. Etant $x = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$,

[3]) Dans la note citée sub 1) on peut s'instruir comment le cas d'un système de h points x_i se peut déduire comme un cas particulier du théorème 2.

[4]) Dans le cas $\nu(K) = 0$ la relation (3) est aussi satisfaite; mais ce cas est banal.

[5]) En appliquant la symbolique du calcul vectoriel.

$x' = (x'_0, x'_1, \ldots, x'_n)$ on a $x = \sum_i x_i a_i$ et $x' = \sum_i \beta_i a'_i$, alors d'après (4) $x_i = x \,.\, a_i = x' \,.\, a'_i = \beta_i$, donc $x' = \sum_k x_k a'_k = \sum_{k,i} x_k \alpha_{ki} a_i = \sum_i x'_i a_i$, donc

$$x_i' = \sum_k \alpha_{ki} x_k. \tag{5}$$

La transformation f est donc représentée par une transformation (5) linéaire orthogonale des coordonnées x_i.

D'autre part, soit $a'_0, a'_1, \ldots, a'_n$ une base linéaire orthogonale située sur K. Il existe alors une seule transformation isométrique f telle que l'on ait $f(a_i) = a'_i$. Si $x = \sum_i x_i a_i$ on a évidemment [voir (4)]

$$x' = f(x) = \sum_i x_i a'_i. \tag{6}$$

Le système de toutes les transformations isométriques resp. isométriques positives de K en K forme un groupe $\overline{S} = \overline{S}_n$ resp. $S = S_n$. Ces groupes sont évidemment transitifs.

La sphère K [voir (2)] est un espace compact.

Définissons une métrique dans l'espace $\overline{S}$ comme il suit: Posons

$$\varrho(\alpha, \beta) = \sup_{x \in K} | \alpha(x) - \beta(x) | = \max_{x \in K} | \alpha(x) - \beta(x) | \tag{7}$$

pour $\alpha, \beta \in \overline{S}$. $\varrho(\alpha, \beta)$ remplit les postulats d'une métrique.

Lemme 1. *La transformation $\zeta = \xi\eta$ dépend d'une manière continue du couple $\xi, \eta \in \overline{S}$.*

Démonstration. Soient $\xi_0, \eta_0 \in \overline{S}$, $\zeta_0 = \xi_0\eta_0$, $\varepsilon > 0$. La sphère étant compacte, on peut choisir $\varepsilon' > 0$ tel que l'on ait $| \xi_0(x) - \xi_0(x') | < \frac{1}{2}\varepsilon$ pour $| x - x' | < \varepsilon'$; $x, x' \in K$. Soit $\varrho(\xi, \xi_0) < \frac{1}{2}\varepsilon$, $\varrho(\eta, \eta_0) < \varepsilon'$. On obtient ensuite $\varrho(\xi\eta, \xi_0\eta_0) \leqq \varrho(\xi\eta, \xi_0\eta) + \varrho(\xi_0\eta, \xi_0\eta_0) = \sup_{x \in K} | \xi\eta x - \xi_0\eta x | + \sup_{x \in K} | \xi_0\eta x - \xi_0\eta_0 x | \leqq \sup_{y \in K} | \xi y - \xi_0 y | + \sup_{\substack{|y - y'| < \varepsilon' \\ y, y' \in K}} | \xi_0 y - \xi_0 y' | \leqq \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon$.

Lemme 2. *La transformation ξ^{-1} dépend d'une manière continue de la transformation $\xi \in \overline{S}$.*

Démonstration. Soit $\xi_0 \in \overline{S}$, $\varepsilon > 0$. Il existe alors $\varepsilon' > 0$ tel que l'on ait $| \xi_0^{-1}x - \xi_0^{-1}x' | < \varepsilon$ pour $x, x' \in K$, $| x - x' | < \varepsilon'$. Soit $\varrho(\xi, \xi_0) < \varepsilon'$. On a ensuite $\varrho(\xi^{-1}, \xi_0^{-1}) = \sup_{x \in K} | \xi^{-1}x - \xi_0^{-1}x | = \sup_{\xi y \in K} | y - \xi_0^{-1}\xi y | = \sup_{y \in K} | \xi_0^{-1}\xi_0 y - \xi_0^{-1}\xi y | \leqq \sup_{\substack{|z - z'| < \varepsilon' \\ z, z' \in K}} | \xi_0^{-1}z - \xi_0^{-1}z' | \leqq \varepsilon$.

Corollaires. Si $\alpha \in \overline{S}$ resp. S et si ξ parcourt l'espace $\overline{S}$ resp. S, alors $\alpha\xi$, $\xi\alpha$, ξ^{-1} représente chaque une homéomorphie de $\bar{S}$ en $\bar{S}$ resp. de S en S. Si $\alpha \in \bar{S}$ resp. S et si $F \subset \bar{S}$ resp. S est un ensemble borelien[6]), les ensembles $\alpha\Gamma$, $\Gamma\alpha$, Γ^{-1} sont aussi boreliens.

Lemme 3. *L'espace $\bar{S}$ et par suite aussi l'espace S* (qui est un sousensemble fermé de l'espace $\bar{S}$) *est un espace compact.*

Démonstration. Soit $\alpha_i \in \bar{S}$ $(i = 1, 2, \ldots)$. K étant compact, on peut choisir de la suite $\{\alpha_i\}$ une suite $\{\beta_i\}$ partielle de manière que $\beta_i a_k \to a'_k$ pour $i \to \infty$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$. On a donc $(\beta_i a_k) \,.\, (\beta_i a_l) \to a'_k \,.\, a'_l$.

Mais [d'après (4)] on a $(\beta_i a_k) \,.\, (\beta_i a_l) = a_k \,.\, a_l$. Il s'en suit $a'_k \,.\, a'_l = a_k \,.\, a_l$. Le système $a'_0, a'_1, \ldots, a'_n$ est donc une base orthogonale. Soit β une transformation isométrique transformant a_k en a'_k. Soit $x = (x_0, x_1, \ldots, x_n) \in K$ et $\varepsilon > 0$ et choisissons i assez grand pour que l'on ait $|\beta_i a_k - a'_k| \leqq \frac{\varepsilon}{n+1}$, $k = 0, 1, \ldots, n$.

On a $|\beta_i x - \beta x| = |\sum_k x_k(\beta_i a_k) - \sum_k x_k(\beta a_k)| \leqq \sum_k |\beta_i a_k - a'_k| \leqq$

$\leqq (n+1) \frac{\varepsilon}{n+1} = \varepsilon$.

Il s'en suit $\beta_i \to \beta \in \bar{S}$.

Nous allons considérer le lemme suivant comme connu.

Lemme 4. *$N \subset K$ étant borelien et α étant un élément de $\bar{S}$, on a*[7]) $\mu(\alpha N) = \mu(N)$ *et* $0 < \mu(K) < \infty$.

Dorénavant soit S_a le système de tels $\alpha \in S$ pour lesquels $\alpha a = a$ (à cause de brièveté on écrit $a_n = a$). S_a forme évidemment un groupe.

Lemme 5. *Le groupe S_a est isomorphe et isométrique avec le groupe S_{n-1} ($n \geqq 1$, entier).*

Démonstration. Soit $\alpha \in S_a$. αx détermine donc une transformation positive isométrique de la surface K_{n-1} en soi même (on peut considérer K_{n-1} comme un sousensemble de K_n en posant $x \in K_{n-1} \Leftrightarrow x \in K$, $x \,.\, a = 0$). D'autre part, α' étant une transformation positive isométrique de la surface K_{n-1} en soi-même, on peut la prolonger en toute la surface K_n: En effet, définissons α de telle façon que l'on ait $\alpha a = a$ et $\alpha a_i = \alpha' a_i$ pour $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Cette correspondance $\alpha \longleftrightarrow \alpha'$ est évidemment isomorphe. Elle est même isométrique, ce que nous démontrons de suite. α, β étant des éléments de S_a et x étant un élément de K, définissons $y \in K_{n-1}$ de manière que l'on ait $x = \lambda y + \lambda' a$ (λ, λ' réels) [$\lambda' =$

---

[6]) $\Gamma \subset S$ étant borelien dans S il est borelien aussi dans $\bar{S}$ et réciproquement (S est fermé dans $\bar{S}$).

[7]) αN est par suite aussi borelien dans K.

$= x \,.\, a,\ \lambda = \sqrt{(x - \lambda' a)^2}$, donc $\lambda^2 + \lambda'^2 = 1$, $|\lambda| \leq 1$]. On a donc $|\alpha x - \beta x| = |\lambda(\alpha y - \beta y) + \lambda'(\alpha a - \beta a)| = |\lambda|\,|\alpha y - \beta y| \leq$ $\leq |\alpha y - \beta y|$ et donc $\sup\limits_{x \in K} |\alpha x - \beta x| \leq \sup\limits_{y \in K_{n-1}} |\alpha y - \beta y|$. Puisque on a aussi $\sup\limits_{y \in K_{n-1}} |\alpha y - \beta y| \leq \sup\limits_{x \in K_n} |\alpha x - \beta x|$, on obtient pour la distance dans l'espace S_{n-1} $\varrho'(\alpha, \beta) = \varrho(\alpha, \beta)$.

Lemme 6. *Il existe un $T \subset S$ jouissant des propriétés suivantes:*

1. *Pour chaque $x \in K$ il existe exactement un seul $\alpha = \alpha_x \in T$ tel que l'on ait $\alpha a = x$.*

2. *Si $\beta \in S_a$, $\alpha \in T$, $\alpha a \neq -a$, on a $\beta^{-1}\alpha\beta \in T$.*

3. *$\alpha \in T$ entraîne $\alpha^{-1} \in T$.*

4. *$\alpha_1, \alpha_2 \in T$ entraîne $|\alpha_1^{-1}a - \alpha_2^{-1}a| = |\alpha_1 a - \alpha_2 a|$. La transformation biunivoque $x \longleftrightarrow x'$ de l'espace K en soi-même donnée par la relation $\alpha_{x'} = (\alpha_x)^{-1}$ est donc isométrique et* (en vertu du lemme 4) *ne change pas la mesure μ.*

5. *$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \in T$, $\alpha_0 \in T$, $\alpha_0 a \neq -a$, $\alpha_i a \to \alpha_0 a$ pour $i \to \infty$ entraîne $\alpha_i \to \alpha_0$ pour $i \to \infty$.*

Démonstration. Pour $n = 1$ il suffit de poser $T = S$. Soit donc $n \geq 2$. Soit U le groupe de tous les $\alpha \in S$ pour lesquels on a $\alpha a_i = a_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$. Soit $\overline{T}$ le système de toutes les transformations de la forme $\beta^{-1}\alpha\beta$ où β parcourt les éléments de S_a et α ceux de U. Pour $x \in K$ il existe $y \in K_{n-1}$ tel que $x = \lambda y + \lambda' a$ (λ, λ' réels, donc $\lambda^2 + \lambda'^2 = 1$). Ensuite il existe un $\beta \in S_a$ tel que $\beta y = a_0$. Soit $\alpha \in S$ la transformation qui transforme $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a$ respectivement en points $+ \lambda' a_0 - \lambda a, a_1, \ldots, a_{n-1}, \lambda a_0 + \lambda' a$ qui forment une base orthogonale au déterminant $+1$ située dans K. On a donc $\alpha \in U$ et $\beta^{-1}\alpha\beta a = \beta^{-1}\alpha a = \beta^{-1}(\lambda a_0 + \lambda' a) = \lambda\beta^{-1}a_0 + \lambda'\beta^{-1}a =$ $= \lambda y + \lambda' a = x$. Pour chaque $x \in K$ il existe donc un élément $\gamma \in \overline{T}$ tel que $\gamma a = x$. Si $x \neq -a$, il n'existe qu'un tel γ. Supposons que l'on ait $\beta^{-1}\alpha\beta a = \beta'^{-1}\alpha'\beta' a \neq -a$ pour $\beta, \beta' \in S_a$; $\alpha, \alpha' \in U$. On a ensuite $\beta^{-1}\alpha a = \beta'^{-1}\alpha' a$, donc $\overline{\beta}\alpha a = \alpha' a$, où $\overline{\beta} = \beta'\beta^{-1} \in S_a$. Évidemment on a $\alpha a = \lambda_1 a_0 + \lambda_2 a$, $\alpha' a = \lambda'_1 a_0 + \lambda'_2 a$ (tous les λ sont réels, $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = \lambda'^2_1 + \lambda'^2_2 = 1$), donc $\lambda'_1 a_0 + \lambda'_2 a = \lambda_1 \overline{\beta} a_0 +$ $+ \lambda_2 a$. En multipliant cette relation par $a = \overline{\beta} a$ (produit scalaire) on obtient $\lambda'_2 = \lambda_2$ et donc $\lambda'_1 = \pm \lambda_1$,

donc soit 1: $\lambda_1 \neq 0$, $\overline{\beta} a_0 = \pm a_0$,

soit 2: $\lambda'_1 = \lambda_1 = 0$, donc $\alpha' a = \alpha a = \pm a$.

Dans le premier cas on a $\alpha a = \lambda_1 a_0 + \lambda_2 a$, $\alpha a_0 = \lambda_2 a_0 - \lambda_1 a$ (α est une transformation positive isométrique) et $\alpha a_i = a_i$ pour $i = 1, 2, \ldots, n-1$, et également $\alpha' a = \pm \lambda_1 a_0 + \lambda_2 a$, $\alpha' a_0 =$ $= \lambda_2 a_0 \mp \lambda_1 a$, $\alpha' a_i = a_i$ pour $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Puisque $\overline{\beta} a_0 =$

$= \pm a_0$, $\overline{\beta}a = a$, $a \,.\, \overline{\beta}a_i = \overline{\beta}a \,.\, \overline{\beta}a_i = a \,.\, a_i = 0$ et d'une manière analogue $a_0 \,.\, \overline{\beta}a_i = 0$ pour $i = 1, 2, \ldots, n-1$, on obtient $\overline{\beta}a_i = \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_{ik} a_k$ pour $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Il s'en suit $\overline{\beta}\alpha a = \overline{\beta}(\lambda_1 a_0 + \lambda_2 a) = \pm \lambda_1 a_0 + \lambda_2 a$, $\alpha'\overline{\beta}a = \alpha' a = \pm \lambda_1 a_0 + \lambda_2 a$, donc $\overline{\beta}\alpha a = \alpha'\overline{\beta}a$. D'une façon analogue on a $\overline{\beta}\alpha a_0 = \alpha'\overline{\beta}a_0$ et ensuite $\overline{\beta}\alpha a_i = \overline{\beta}a_i = \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_{ik} a_k$ et $\alpha'\overline{\beta}a_i = \alpha' \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_{ik} a_k = \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_{ik} a_k$ pour $i = 1, 2, \ldots, n-1$. On obtient donc $\overline{\beta}\alpha a_i = \alpha'\overline{\beta}a_i$ pour $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, donc $\overline{\beta}\alpha = \alpha'\overline{\beta}$, donc $\beta^{-1}\alpha\beta = \beta'^{-1}\alpha'\beta'$.

Dans le second cas on ne peut pas avoir $\alpha a = -a$, car on obtiendrait $\beta^{-1}\alpha\beta a = \beta^{-1}(-a) = -a$ contrairement à l'hypothèse. On a donc $\alpha' a = \alpha a = a$, $\alpha' a_0 = \alpha a_0 = a_0$ et ensuite $\alpha' a_i = \alpha a_i = a_i$ pour $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Donc on a $\alpha' = \alpha = 1$ (l'identité). On a donc aussi $\beta^{-1}\alpha\beta = \beta'^{-1}\alpha'\beta'$.

Soit maintenant T le système des $\alpha \in \overline{T}$ tels que l'on ait soit $\alpha a \neq -a$ soit $\alpha \in U \subset \overline{T}$.

Démonstration de la thèse 1 pour T. Il suffit de démontrer qu'il existe un et un seul $\alpha \in T$ tel que $\alpha a = -a$. C'est donc cet α qui fait correspondre la base $-a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, -a$ à la base orthogonale $a_0, a_1, \ldots, a$. Si l'on avait $\alpha a = \beta a$ et $\alpha, \beta \in U$ on aurait évidemment $\alpha = \beta$.

Démonstration de la thèse 2. Si l'on a $\beta \in S_a$, $\alpha \in T$, $\alpha a \neq -a$ on a $\alpha \in \overline{T}$ et évidemment $\beta^{-1}\alpha\beta \in \overline{T}$. Puisque $\beta^{-1}\alpha\beta a = \beta^{-1}\alpha a \neq \beta^{-1}(-a) = -a$, on a $\beta^{-1}\alpha\beta \in T$.

Démonstration de la thèse 3. Si $\alpha \in T$ on a $\alpha \in \overline{T}$, donc $\alpha = \beta^{-1}\alpha'\beta$, où $\beta \in S_a$, $\alpha' \in U$, donc $\alpha^{-1} = \beta^{-1}\alpha'^{-1}\beta \in \overline{T}$, car $\alpha'^{-1} \in U$. Si $\alpha^{-1}(a) \neq -a$ on a $\alpha^{-1} \in T$. Si $\alpha^{-1}a = -a$ on a $\alpha(-a) = a$, $\alpha a = -a$, donc $\alpha \in U$, $\alpha^{-1} \in U \subset T$.

Démonstration de la thèse 4. Soit d'abord $\alpha \in U$. Ensuite on a $\alpha a = \lambda_1 a + \lambda_2 a_0$ et donc $\alpha a_0 = -\lambda_2 a + \lambda_1 a_0$ (la matrice des coefficients doit être orthogonale et au déterminant 1). Il s'en suit $a = \lambda_1 \alpha^{-1} a + \lambda_2 \alpha^{-1} a_0$, $a_0 = -\lambda_2 \alpha^{-1} a + \lambda_1 \alpha^{-1} a_0$ et donc $\alpha^{-1} a = \lambda_1 a - \lambda_2 a_0$ et

$$\alpha a + \alpha^{-1} a = 2\lambda_1 a = 2\,(a \,.\, \alpha a)\, a. \tag{8}$$

Si $\alpha' \in T$ (donc $\alpha' \in \overline{T}$) on obtient $\alpha' = \beta^{-1}\alpha\beta$, où $\beta \in S_a$, $\alpha \in U$. La relation (8) est donc vraie et par conséquent ($\beta a = a$) $\beta^{-1}\alpha\beta a + \beta^{-1}\alpha^{-1}\beta a = 2\,(a \,.\, \beta^{-1}\alpha\beta a)\, a$, car $a \,.\, \beta^{-1}\alpha\beta a = \beta a \,.\, \alpha\beta a = a \,.\, \alpha a$. On a donc $\alpha'^{-1} a = 2\,(a \,.\, \alpha' a)\, a - \alpha' a$. Pour $\alpha_1, \alpha_2 \in T$ et en posant $\alpha_1 a - \alpha_2 a = v$ on a $| \alpha_1^{-1} a - \alpha_2^{-1} a | = | 2\,(a \,.\, v)\, a - v | = \sqrt{4\,(a \,.\, v)^2 - 4\,(a \,.\, v)\,(a \,.\, v) + v^2} = | v |$.

Démonstration de la thèse 5. S étant compact on peut choisir de chaque suite partielle de $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ une suite partielle $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \ldots$ telle que $\gamma_i = \beta_i^{-1}\alpha'_i\beta_i$, où $\beta_i \in S_a$, $\alpha'_i \in U$ et où les suites $\{\alpha'_i\}$ et $\{\beta_i\}$ sont convergentes. Soit $\alpha'_i \to \alpha'_0$, $\beta_i \to \beta_0$. On a donc $\alpha'_0 a_k = a_k$ pour $k = 1, 2, \ldots, n - 1$ et $\beta_0 a = a$, donc $\alpha'_0 \in U$, $\beta_0 \in S_a$. En vertu des lemmes 1 et 2 on a $\gamma_i \to \beta_0^{-1}\alpha'_0\beta_0 = \gamma_0 \in \overline{T}$ et $\gamma_i a \to \gamma_0 a$, donc $\gamma_0 a = \alpha_0 a \mp - a$, $\gamma_0 \in T$, donc $\gamma_0 = \alpha_0$. Il s'en suit $\alpha_i \to \alpha_0$.

Lemme 7. *Dans S_a soit définie une mesure $\omega(\Gamma)$ pour chaque $\Gamma \subset S_a$ borelien. Soit $0 < \omega(S_a) < \infty$. Il existe alors une mesure $\tau(\Gamma)$ pour $\Gamma \subset S$ borelien telle que l'on ait*

$$\tau(\Gamma_M) = \nu(M)$$

pour chaque $M \subset K$ borelien. Γ_M y signifie l'ensemble de tous les $\alpha \in S$ tels que $\alpha a \in M$. L'ensemble Γ_M est évidemment un ensemble borelien dans S.

Démonstration. Soit T l'ensemble construit dans le lemme 6. Soit $\gamma \in S$; décomposons $\gamma = \alpha\beta$ en un produit tel que $\alpha \in T$, $\beta \in S_a$ (on a $\gamma a = \alpha\beta a = \alpha a$, donc $\alpha = \alpha_{\gamma a}$ est déterminé d'une manière univoque et évidemment $\beta = \alpha^{-1}\gamma \in S_a$). Considérons dans ce sens l'espace S comme le produit cartésien $K \times S_a$ $[\gamma = (\gamma a, \alpha_{\gamma a}^{-1}\gamma)]$. Désignons par $\mathfrak{M}$ le plus petit système additif[8]) contenant tous les ensembles $M \times \Lambda$ où M resp. Λ est borelien dans K resp. S_a. Le système $\mathfrak{M}$ contient tous les $\Gamma \subset S$ boreliens. Il suffit de démontrer qu'il contienne tous les $\Gamma \subset S$ ouverts.

Posons $\Gamma_1 = \Gamma - \alpha_{-a}S_a$. $\alpha_{-a}S_a$ étant fermé dans S, Γ_1 est par conséquent un ensemble ouvert dans S. Soit $\gamma \in \Gamma_1$, $\gamma = \alpha\beta$ ($\alpha \in T$, $\beta \in S_a$, donc $\alpha a \mp - a$). Choisissons $\varepsilon > 0$ tel que $\gamma' \in S$, $\varrho(\gamma', \gamma) < \varepsilon \Rightarrow \gamma' \in \Gamma_1$. Il existe un $\varepsilon' > 0$ tel que l'on ait $\varrho(\alpha'\beta', \alpha\beta) < \varepsilon$ pour $\varrho(\alpha', \alpha) < \varepsilon'$ et pour $\varrho(\beta', \beta) < \varepsilon'$ (lemme 1). Il s'en suit $\gamma' = \alpha'\beta' \in \Gamma_1$. Choisissons (la propriété 5 de l'ensemble T) un $\varepsilon'' > 0$ tel que $\alpha' \in T$, $\varrho(\alpha' a, \alpha a) < \varepsilon'' \Rightarrow \varrho(\alpha', \alpha) < \varepsilon'$. Il existe donc un tel entourage M_1 du point αa dans K et un tel entourage Λ_1 du point β dans S_a que $M_1 \times \Lambda_1 \subset \Gamma_1$. On voit aisément que $M_1 \times \Lambda_1$ est un ensemble ouvert dans S.[9]) S étant compact et donc séparable, on a $\Gamma_1 \in \mathfrak{M}$.

---

[8]) S. Saks, Theory of the Integral, p. 7.

[9]) En effet, soit $\gamma_0 \in M_1 \times \Lambda_1$, $\gamma_n \to \gamma_0$; posons $\gamma_0 = \alpha_0\beta_0$, $\gamma_n = \alpha_n\beta_n$ ($\alpha_i \in T$, $\beta_i \in S_a$ pour $i = 0, 1, 2, \ldots$), donc $\alpha_0 a \mp - a$. On a $\gamma_n a \to \gamma_0 a$, c'est-à-dire $\alpha_n a \to \alpha_0 a$, d'où l'on déduit d'une part $\alpha_n \in M_1$ pour $n > n_1$, d'autre part $\alpha_n \to \alpha_0$ (thèse 5 du lemme 6). On a ensuite $\alpha_n^{-1}\gamma_n \to \alpha_0^{-1}\gamma_0$ (lemme 1 et 2), c'est-à-dire $\beta_n \to \beta_0$, donc $\beta_n \in \Lambda_1$ pour $n > n_2$, donc enfin $\gamma_n \in M_1 \times \Lambda_1$ pour $n > \text{Max}(n_1, n_2)$.

Ensuite, l'ensemble $\Gamma . \alpha_{-a} S_a$ (partie commune) est ouvert dans $\alpha_{-a} S_a$, donc $\alpha_{-a}^{-1} \Gamma . S_a$ est ouvert dans S_a et par suite $\Gamma . \alpha_{-a} S_a =$ $= \{-a\} \times \alpha_{-a}^{-1} \Gamma . S_a$, où $\{-a\}$ resp. $\alpha_{-a}^{-1} \Gamma . S_a$ est borelien dans K resp. dans S_a.

Définissons pour[10]) $\Gamma \in \mathfrak{M}$:

$$\tau(\Gamma) = \frac{1}{\omega(S_a)} \int\limits_{\beta \in S_a} d\omega(\beta) \int\limits_{\substack{\alpha_x \beta \in \Gamma \\ x \in K}} d\nu(x) = \frac{1}{\omega(S_a)} \int\limits_{x \in K} d\nu(x) \int\limits_{\substack{\alpha_x \beta \in \Gamma \\ \beta \in S_a}} d\omega(\beta).$$

Soit M un ensemble borelien dans K. On a ensuite $\Gamma_M = M \times S_a$ $[(x \in K, \beta \in S_a);\ \alpha_x \beta \in \Gamma_M \Leftrightarrow \alpha_x \beta a \in M \Leftrightarrow \alpha_x a \in M \Leftrightarrow x \in M]$, donc

$$\tau(\Gamma_M) = \frac{1}{\omega(S_a)} \int\limits_{\beta \in S_a} d\omega(\beta) \int\limits_{x \in M} d\nu(x) = \frac{1}{\omega(S_a)} . \omega(S_a) . \nu(M).$$

Lemme 8. *Soit définie une mesure $\omega(\Gamma)$ pour tous les $\Gamma \subset S_a$ boréliens. Soit*

1. $0 < \omega(S_a) < \infty$;
2. $\omega(\alpha\Gamma) = \omega(\Gamma)$ *pour* $\alpha \in S_a$ *et pour tous les* $\Gamma \subset S_a$ *boreliens*;
3. $\omega(\Gamma^{-1}) = \omega(\Gamma)$ *pour tous les* $\Gamma \subset S_a$ *boreliens.*

Alors il existe une mesure $\sigma(\Gamma)$ définie pour tous les $\Gamma \subset S$ boreliens telle que

1. $\sigma(\Gamma_M) = \mu(M)$ *pour tous les* $M \subset K$ *boreliens*;
2. $\sigma(\gamma\Gamma) = \sigma(\Gamma)$ *pour* $\gamma \in S$ *et pour tous les* $\Gamma \subset S$ *boreliens*;
3. $\sigma(\Gamma^{-1}) = \sigma(\Gamma)$ *pour tous les* $\Gamma \subset S$ *boreliens.*

Démonstration. La mesure σ soit définie à l'aide de la mesure μ de la même manière que la mesure τ à l'aide de celle ν dans le lemme précédent. Ainsi il est évident que la thèse 1 (analogue à celle du lemme 7) est vraie (voir le lemme 4).

Démonstration de la thèse 2. Soit Γ borelien dans S. On a $(x \in K;\ \beta, \beta' \in S_a)$

$$\sigma(\gamma\Gamma) = \frac{1}{\omega(S_a)} \int\limits_{x} d\mu(x) \int\limits_{\alpha_x \beta \in \gamma\Gamma} d\omega(\beta) = \frac{1}{\omega(S_a)} \int\limits_{\gamma x \in K} \underset{(x)}{d\mu(\gamma x)} \int\limits_{\alpha_{\gamma x} \beta \in \gamma\Gamma} d\omega(\beta)$$

et ensuite (car $\alpha_{\gamma x}^{-1} \gamma \alpha_x \in S_a$)

$$\sigma(\gamma\Gamma) = \frac{1}{\omega(S_a)} \int\limits_{x} d\mu(x) \int\limits_{\gamma \alpha_x \beta' \in \gamma\Gamma} \underset{(\beta')}{d\omega(\alpha_{\gamma x}^{-1} \gamma \alpha_x \beta')} =$$

$$= \frac{1}{\omega(S_a)} \int\limits_{x} d\mu(x) \int\limits_{\alpha_x \beta' \in \Gamma} d\omega(\beta') = \sigma(\Gamma)$$

(voir la propriété 2 de la mesure ω et le lemme 4).

[10]) S. Saks, Theory of the Integral, p. 85.

Démonstration de la thèse 3. On a ($x, x', y \in K$; $\beta \in S_a$)

$$\sigma(\Gamma^{-1}) = \frac{1}{\omega(S_a)} \int\limits_{\beta} \mathrm{d}\omega(\beta) \int\limits_{\substack{\alpha_x\beta \in \Gamma^{-1} \\ x \neq -a}} \mathrm{d}\mu(x) = \frac{1}{\omega(S_a)} \int\limits_{\substack{(\beta) \\ \beta^{-1} \in S_a}} \mathrm{d}\omega(\beta^{-1}) \int\limits_{\substack{\alpha_x\beta^{-1} \in \Gamma^{-1} \\ x \neq -a}} \mathrm{d}\mu(x).$$

En posant $\alpha_{x'} = \alpha_x^{-1}$ (voir la propriété 4 du lemme 6 et la propriété 3 de la mesure ω) on obtient

$$\sigma(\Gamma^{-1}) = \frac{1}{\omega(S_a)} \int\limits_{\beta} \mathrm{d}\omega(\beta) \int\limits_{\substack{(x') \\ \alpha_{x'}^{-1}\beta^{-1} \in \Gamma^{-1} \\ x' \neq -a}} \mathrm{d}\mu(\alpha_{x'}^{-1}a) = \frac{1}{\omega(S_a)} \int\limits_{\beta} \mathrm{d}\omega(\beta) \int\limits_{\substack{\beta\alpha_{x'} \in \Gamma \\ x' \neq -a}} \mathrm{d}\mu(x').$$

En posant $\beta\alpha_{x'}\beta^{-1} = \alpha_y$ ($\beta\alpha_{x'}\beta^{-1} \in T$, voir la propriété 2 de l'ensemble T) c. à d. $y = \alpha_y a = \beta\alpha_{x'}\beta^{-1}a = \beta\alpha_{x'}a = \beta x'$, il s'en suit

$$\sigma(\Gamma^{-1}) = \frac{1}{\omega(S_a)} \int\limits_{\beta} \mathrm{d}\omega(\beta) \int\limits_{\substack{(y) \\ \alpha_y\beta \in \Gamma \\ y \neq -a}} \mathrm{d}\mu(\beta^{-1}y) =$$

$$= \frac{1}{\omega(S_a)} \int\limits_{\beta} \mathrm{d}\omega(\beta) \int\limits_{\alpha_y\beta \in \Gamma} \mathrm{d}\mu(y) = \sigma(\Gamma).$$

Lemme 9. *Dans $S = S_n$ ($n = 1, 2, \ldots$) il existe une mesure $\sigma(\Gamma)$ définie pour tous les $\Gamma \subset S$ boreliens telle que*

1. $\sigma(\Gamma_M) = \mu(M)$ *pour tous les $M \subset K$ boreliens [donc $0 < \sigma(S) = \mu(K) < \infty$];*
2. $\sigma(\alpha\Gamma) = \sigma(\Gamma)$ *pour $\alpha \in S$ et pour tous les $\Gamma \subset S$ boreliens;*
3. $\sigma(\Gamma^{-1}) = \sigma(\Gamma)$ *pour tous les $\Gamma \subset S$ boreliens.*

Démonstration. Nous allons démontrer ce lemme à l'aide de l'induction complète par rapport à n en appliquant le lemme 8. Dans le cas $n = 1$ S_a contient seulement la transformation identique 1. On pose $\omega(\emptyset) = 0$, $\omega(\{1\}) = 1$. Les suppositions 1, 2, 3 sont remplies dans ce lemme et par conséquent même les thèses 1, 2, 3 ce qui est en accord avec les thèses 1, 2, 3 du notre lemme.

Soit $m \geqq 2$ (m entier). Supposons que notre lemme soit prouvé pour $n = m - 1$. Le groupe $(S_m)_{a_m}$ est en vertu du lemme 5 isomorphé et isométrique avec le groupe S_{m-1}. Selon la supposition d'induction il existe donc dans l'espace S_{m-1} et par suite même dans $(S_m)_{a_m}$ une mesure $\omega(\Gamma)$ définie pour tout $\Gamma \subset S_a$ borelien de telle façon que les prémisses du lemme 8 soient remplies. Ce lemme donne immédiatement notre thèse pour $n = m$.

Lemme 10. *Dans l'espace S il existe une mesure $\tau(\Gamma)$ pour tous les $\Gamma \subset S$ boreliens telle que*

$$\tau(\Gamma_M) = \nu(M)$$

pour tous les $M \subset K$ boreliens.

Démonstration. On va appliquer le lemme 7. Pour $n = 1$ définissons la mesure ω dans l'espace S_a de la même manière qu'au commencement de la démonstration précédente. Pour $n > 1$ S_a est en vertu du lemme 5 isomorphe et isométrique avec S_{n-1}; alors, d'après le lemme 9, il existe une mesure ω dans S_a telle que $0 < < \omega(S_a) < \infty$. Il en résulte sans peine notre thèse.

Démonstration du théorème 2. Nous allons appliquer le théorème 1. Le groupe $S = S_n$ est métrique et séparable (lemme 3). Les transformations $\alpha\xi$ et $\xi\varkappa$ sont continues en $\xi \in S$ pour tous les $\alpha \in S$ (lemme 1). Soient $\sigma(\Gamma)$ et $\tau(\Gamma)$ deux mesures définies dans les lemmes 9, 10. En vertu du lemme 9 on a $0 < \sigma(S) < \infty$ et $\sigma(\Gamma\alpha) = = \sigma(\varkappa^{-1}\Gamma^{-1}) = \sigma(\Gamma^{-1}) = \sigma(\Gamma)$ pour tout $\alpha \in S$ et pour tous les $\Gamma \subset S$ boreliens. Selon le lemme 10 on a $0 < \tau(S) = \tau(\Gamma_K) = = \nu(K) < \infty$, car dans le théorème 2 on a supposé $0 < \nu(K) < \infty$. En appliquant le théorème 1 on obtient immédiatement pour $\Gamma = \Gamma_M$ la thèse du théorème 2 en considérant que $\tau(\beta\Gamma_M) = = \tau(\Gamma_{\beta M}) = \nu(\beta M)$, $\tau(S) = \nu(K)$, $\sigma(S) = \mu(K)$, $\sigma(\Gamma_M) = \mu(M)$.

*

O rozložení měr na n-dimensionální ploše kulové.

(Výtah z předcházejícího článku.)

Budiž $n \geqq 1$, celé. Budiž K n-dimensionální plocha kulová. Nechť $\mu(N)$ značí plošný obsah (borelovské) množiny $N \subset K$. Budiž $\nu(N)$ libovolná míra[2]) definovaná pro všechna borelovská $N \subset K$ [na př. nechť $\nu(N)$ značí počet bodů z daného konečného systému bodů: $x_1, x_2, \ldots, x_h$ ležících na kouli, které padnou do množiny N]. Nechť $0 < \nu(K) < \infty$. Pak pro každé borelovské $M \subset K$ existují „otočení“ β, β' plochy kulové K tak, že platí (3).