Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Vilém Jung

Analytický důkaz věty o tečnách ve dvojném bodě průsečné křivky dvou ploch, dotýkajících se v tomto bodě

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 37 (1908), No. 2, 137--139

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/121107`

O shodnosti obou konstrukcí středu křivosti s_0 lze se však přesvědčiti i při libovolné poloze paprsku klinogonálně promítajícího, arciť že v tomto případě obecném na základě důkazu mnohem složitějšího. —

Analytický důkaz věty o tečnách ve dvojném bodě průsečné křivky dvou ploch, dotýkajících se v tomto bodě.

Napsal **Vilém Jung**, professor v Praze.

Budiž počátek o pravoúhlých souřadnic společným bodem ploch

$$z = f(x, y), \tag{1}$$

$$z = F(x, y); \tag{2}$$

společnou normálu těchto ploch zvolme za osu Z a předpokládejme, že bod o jest obyčejným bodem každé z daných ploch.

Platí tedy

$$f(o, o) = F(o, o) = 0,\ f_1(o, o) = F_1(o, o) = 0,$$

$$f_2(o, o) = F_2(o, o) = 0;$$

mimo to nechť aspoň jedna z částečných derivací 2. řádu pro $x = 0$, $y = 0$ liší se od nully.

Rovnice daných ploch možno pak psáti ve tvaru

$$z = \frac{1}{2!}\left[x^2 f_{11}(o, o) + 2xy f_{12}(o, o) + y^2 f_{22}(o, o)\right] + r_3, \tag{3}$$

$$z = \frac{1}{2!}\left[x^2 F_{11}(o, o) + 2xy F_{12}(o, o) + y^2 F_{22}(o, o)\right] + R_3; \tag{4}$$

při tom jest

$$r_3 = \frac{1}{3!}\left[x^3 \frac{\partial^3 f(\Theta x, \Theta y)}{\partial x^3} + 3x^2 y \frac{\partial^3 f(\Theta x, \Theta y)}{\partial x^2 . \partial y} \right.$$

$$\left. + 3xy^2 \frac{\partial^3 f(\Theta x, \Theta y)}{\partial x . \partial y^2} + y^3 \frac{\partial^3 f(\Theta x, \Theta y)}{\partial y^3}\right],$$

a obdobně pro R_3; $0 < \Theta < 1$.

Body průsečné křivky daných ploch možno stanoviti pomocnými rovinami rovnoběžnými s tečnou rovinou (XY). Na př. pro $z = k$ udávají rovnice (3) a (4) pravoúhlé průměty rovinných řezů obou ploch s rovinou $z = k$ do tečné roviny (XY). Dvojiny (x, y) společných kořenů těchto rovnic jsou souřadnicemi bodů průsečné křivky, ležících ve zmíněné pomocné rovině.

Z obou rovnic dají se pak vypočítati hodnoty $\frac{y}{x}$ směrnic průvodičů průmětů bodů průsečné křivky v rovině tečné (XY) vůči bodu o.

Položíme-li $\lim z = 0$, dostaneme pomocné řezy nekonečně blízké k tečné rovině (XY) a hodnoty $\lim \frac{y}{x} = tg\, \alpha$ udávají pak směrnice tečen průsečné křivky v bodě o, t. j.

$$(f_{22} - F_{22})\, tg^2 \alpha + 2(f_{12} - F_{12})\, tg\, \alpha + f_{11} - F_{11} + 2 \lim \frac{r_3 - R_3}{x^2} = 0. \qquad (5)$$

Ježto $\lim (\Theta x) = 0$, $\lim (\Theta y) = 0$, jsou mezné hodnoty součinitelů ve výrazech r_3 a R_3 konečné a určité, výrazy samy pak mají hodnoty nekonečně malé 3. stupně, tak že

$$\lim \frac{r_3 - R_3}{x^2} = 0.$$

Z toho plyne pro směrnice tečen v bodě o průsečné křivky daných ploch rovnice

$$(f_{22} - F_{22})\, tg^2 \alpha + 2(f_{12} - F_{12})\, tg\, \alpha + f_{11} - F_{11} = 0. \qquad (6)$$

Je-li tedy bod o obyčejným bodem každé z daných ploch, má v něm jejich průsečná křivka *dvojný bod*, mají-li v něm obě plochy společnou rovinu tečnou.

Pro $\lim z = 0$ značí rovnice (3) a (4) infinitesimální kuželosečky ploch v rovině, vedené v nekonečně malé vzdálenosti rovnoběžně s tečnou rovinou (XY). *) Společné jich průměry tvoří prvky průsečné křivky daných ploch v bodě o a udávají tedy směr zmíněných tečen.

---

*) Viz na př. *Ed. Weyr, Počet differenciálný,* pag. 378. Praha 1902.

Odvoďme k těmto kuželosečkám vůči bodu o centrálně podobné křivky v tečné rovině na základě téhož poměru zvětšení, položivše v rovnicích (3) a (4)

$$z = h, \quad r_3 = 0, \quad R_3 = 0.$$

Tyto křivky jsou pak indikatricemi ploch v tomto bodě. Jich společné průměry stotožňují se se společnými průměry zmíněných infinitesimálních kuželoseček a tedy s tečnami průsečné křivky daných ploch ve dvojném bodě o.

Dodatek. Přejde-li jedna z ploch v tečnou rovinu k ploše druhé, přejde její indikatrix v úběžnou přímku; prochází tedy tečny ve dvojném bodě průsečné křivky úběžnými body indikatrice druhé plochy v tomto bodě.

V obyčejném bodě plochy má průsečná křivka plochy s rovinou tečnou dvojný bod; tečnami v něm jsou asymptoty indikatrice plochy, jež se zovou jejími hlavními čili inflekčními tečnami ve zmíněném bodě.

Stanovení nejjednodušších opticky významných případů z Maxwellových rovnic.

Napsal dr. **A. Dittrich** v Třeboni.

Aby řešení Maxwellových rovnic vztahovalo se na případy optické, předpokládá se, že elektrický a magnetický vektor zachovává kontinuitu. K tomuto předpokladu připojíme druhý:

Poloha proudokřivek energie jest na čase nezávislá.

Tímto předpokladem zajistíme si existenci paprsků — po případě křivočarých. Jsou to jedinci ze svazku všech proudokřivek energie.

Jsou dva případy. Buď paprsky protínají jistý svazek ploch orthogonálně neb ne.

Hledáme případ „nejjednodušší", t. j. mathematicky přístupný. Proto budeme předpokládati, že plochy orthogonálné k paprskům existují. Říkejme jim vlnoplochy.

Obecně nevyhovují — jak samozřejmo — vlnoplochy differenciální rovnici Ossian-Bonnetově pro orthogonální soustavy