Úlohy

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 13 (1884), No. 4, 239--244

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121111

$$bm = n\left(\frac{p}{100n} - \frac{p^2}{20000n^2}\right),$$

z čehož snadným řešením podlé n vzejde vzorec

$$n = \frac{p^2}{200(p - 100\,bm)}, \qquad (3)$$

podlé něhož přímo určíme n, znajíce dle vzorce (2) hodnotu b.

Jak z podstaty úlohy jde na jevo, nemůže býti n *negativní*, takže nutno, aby ve vzorci (3) bylo

$$p > 100\,bm. \qquad (4)$$

V určitém případě, kde

$$p = 100\,bm, \qquad (5)$$

a tedy ze vzorce (3) vyjde

$$n = \infty,$$

takže tu na rok připadá nekonečně mnoho lhůt aneb úročení děje se nepřetržitě od okamžiku k okamžiku, obdržíme pak ze vzorce (2) a (5), vrátíme-li se k logarithmům přirozeným,

$$p = \frac{100}{r}\, l\frac{K_\infty}{K},$$

z čehož konečně plyne známý vzorec pro úročení nepřetržité

$$K_\infty = Ke^{\frac{pr}{100}}, \qquad (6)$$

jakož bylo lze očekávati.

Úlohy.

Řešení úlohy 26.

(Zaslal pan *Frant. Ullrich,* stud. VI. tř. r. městského r. g. v Praze).

Z prvé podmínky dané plyne $a^3 + b^3 + c^3 = c^2(a + b) + c^3$ čili

$$c^2 = \frac{a^3 + b^3}{a + b} = a^2 - ab + b^2;$$

že však

$$\frac{c^2}{ab} = \frac{sin^2\gamma}{sin\,\alpha\; sin\,\beta}$$

a pravá strana této rovnice dle druhé podmínky jest 1, proto

$$c^2 = ab.$$

Srovnáme-li obě hodnoty čtverce c^2, obdržíme

$$a^2 - 2ab + b^2 = 0, \text{ t. j. } a = b.$$

Ježto $c^2 = ab = a^2 = b^2$, proto též $a = b = c$.

Správné řešení zaslali pp.: *Jan Kropáček* a *Otto Mulaček* z VIII. tř. *v Klatovech*, *Ant. Pleskot* ze VI. a *Moric Hirsch* ze VII. tř. r. g. *v Chrudimi*, *O. Viglic* ze VII. tř. r. *v Pardubicích*, *Bohdan Tschapek*, *Josef Prask*, *Josef Sumr*, *Fr. Nepomucký*, *Alois Miessler* ze VI. tř. r. a *Kar. L. Špaček* ze VII. tř. r. městského r. g. na Malé Straně *v Praze*, *Bohuslav Mašek* z V. tř. v. g. na *Novém Městě v Praze*, *Frant. Nušl v Jindř. Hradci* a *Frant. Vítek* ze VII. tř. g. *v Hradci Králové.*

Řešení úlohy 27.

(Zaslal p. *R. Vyplel*, stud. VII. tř. r. v Přerově.)

Označíme-li poloměr základny kuželové r, výšku v, stranu s a poloměr vepsané koule ϱ, jest

$$\varrho = \frac{rv}{r+s} = 10 \text{ cm};$$

rovina vedená u vzdálenosti $2\varrho = 2$ dm od základny protíná kužel v kruhu, jehož poloměr

$$r' = \frac{(v - 2\varrho)r}{v} = 6\frac{2}{3} \text{ cm}.$$

Jest tedy obsah kužele zkomoleného

$$K = \frac{2}{3}\pi\varrho\,(r^2 + rr' + r'^2) = 7737{\cdot}62 \text{ cm}^3.$$

Tutéž úlohu řešili pp.: *A. Srbecký* z VIII. tř. *v Německém Brodě, Jan Kropáček* a *Otto Mulaček* z VIII. tř. *v Klatovech, Alois Vrzal* z VIII. tř. *v Přerově, Frant. Nušl* stud. *v Jindř. Hradci, K. Leopold* ze VI. tř. g. *v Budějovicích, Ant. Klír* a *J. Prokůpek* ze VI. tř. české real. šk. *v Praze*, *Vác. Koudela* ze VII. tř. r. *v Litomyšli*, *Frant. Josef Kočí* z VIII. tř. *v Jičíně*, *Fr. Fišer* ze VII. tř. r. g. *v Roudnici*, *Fr. Nepomucký*, *Josef Sumr*, *B. Tschapek, Fr. Ullrich*, *Josef Prask* ze VI. tř. r., *Kar. Lad. Špaček* a *Jaroslav Mašek* ze VII. tř. r. městského r. g. *na Malé Straně* *v Praze, Bohuslav Mašek* z V. tř. v. g. *na Novém Městě v Praze, M. Utyty na Smíchově, Michael Payer* stud. g. *v Českých Budějovicích, Frant. Vítek* ze VII. tř. g. a *Jan Zvoníček, Bohumil Král, Frant. Suchý, Jan Vancl* ze VII. tř. r. *v Hradci Králové, Ant. Pavlík* a *Ferd. Zuna* ze VII. tř. g. *v Písku, Ant. Pleskot* ze VI. tř. a *Moric Hirsch* ze VII. tř. g. *v Chrudimi* a *Ot. Viglic* ze VII. tř. r. *v Pardubicích.*

Řešení úlohy 28.

(Zaslal pan *Ant. Pleskot,* stud. VI. tř. g. v Chrudimi.)

Osvětlená část obliny $= \frac{2}{3} \pi r^2 \sqrt{5}$.

Stínová „ „ $= \frac{1}{3} \pi r^2 \sqrt{5}$.

Vržený stín $= \frac{1}{3} r^2 (3\sqrt{3} - \pi)$.

Tutéž úlohu řešili pp.: *Fr. J. Kočí* z VIII. tř. *v Jičíně, Karel Belšan* ze VII. tř. české real. šk. *v Praze, Frant. Nušl* stud. *v Jindř. Hradci, Ferd. Zuna* ze VII. tř. g. *v Písku, Michael Payer* stud. *v Českých Budějovicích, R. Vyplel* ze VII. tř. r. *v Přerově, Jan Zvoníček, Frant. Suchý, Bohumil Král* a *Jan Vancl* ze VII. tř. r. *v Hradci Králové, Josef Sumr, B. Tschapek* ze VI. tř. r., *Kar. Lad. Špaček* a *Jaroslav Mašek* ze VII. tř. r. městského r. g. *na Malé Straně v Praze, Václ. Koudela* ze VII. tř. r. *v Litomyšli* a *Ot. Viglic* ze VII. tř. r. v Pardubicích.

Řešení úlohy 29.

(Zaslal pan *Jan Vancl,* stud. VII. tř. r. v Hradci Králové).

Průsečí Q bude kosodélník, jehož průmětem kolmým na neproťatou stěnu C bude tato stěna. Svírají-li obě tyto roviny úhel α, jest $Q \cos\alpha = C$.

Znamenáme-li β úhel sevřený úhlopříčnou osou rovnoběžnostěnu a stěnou C, jest $\beta = 90 - \alpha$, a tudíž $Q = \frac{C}{\sin\beta}$, kdežto, jsou-li proťaté hrany c a neproťaté a a b, najdeme

$$\sin\beta = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Dosadíme-li do $sin\beta$ z rovnic $A = bc$, $B = ac$ a $C = ab$, místo hran

$$a = \sqrt{\frac{BC}{A}},\ b = \sqrt{\frac{AC}{B}},\ c = \sqrt{\frac{AB}{C}}$$

plochy, obdržíme

$$Q = \frac{C}{AB}\sqrt{A^2B^2 + A^2C^2 + B^2C^2} = 13dm^2.$$

Tutéž úlohu řešili pp.: *R. Vyplel* ze VII. tř. r. a *Alois Vrzal* z VIII. tř. *v Přerově, Václav Koudela* ze VII. tř. r. *v Litomyšli, Ant. Klír* a *J. Prokůpek* ze VI. tř. české vyšší real. šk. *v Praze, O. Viglic* ze VII. tř. r. *v Pardubicích.*

Řešení úlohy 30.

(Podal p. *Frant. J. Kočí,* stud. VIII. tř. v Jičíně).

Podstavami rovnoběžnostěnů buďtež z_1, z_2 a z_3. Z podobnosti prvního třetímu následuje, že

$$k_1 : k_3 = \sqrt{z_1^3} : \sqrt{z_3^3}.$$

Znamenáme-li v výšku každého daného rovnoběžnostěnu, bude

$$z_1 = \frac{k_1}{v} \quad \text{a} \quad z_2 = z_3 = \frac{k_2}{v},$$

tedy

$$k_1 : k_3 = \sqrt{k_1^3} : \sqrt{k_2^3}$$

a konečně

$$k_3 = k_2\sqrt{\frac{k_2}{k_1}} = 1331cm^3.$$

Správné řešení zaslali pp.: *Ant. Pleskot* ze VI. tř. g. *v Chrudimi, Jan Zvoníček* a *Jan Vancl* ze VII. tř. r. *v Hradci Králové, Ant. Klír* a *J. Prokůpek* ze VI. tř. české vyšší real. šk. *v Praze, Frant. Nušl v Jindř. Hradci* a *Ferd. Zuna* ze VII. tř. g. v Písku.

Řešení úlohy 31.

(Zaslal p. *Kar. L. Špaček,* stud. VII. tř. r. městského r. g. v Praze).

Skrojek tvoří kosokomolý hranol trojboký, jehož jedna pobočná hrana se rovná hraně a, a ostatní dvě úhlopříčným

$u = \frac{a}{2}(1 + \sqrt{5})$ dvanáctistěnu. Znamenáme-li v vzdálenosť hrany první od protilehlé pobočné stěny skrojku, bude jeho kr. obsah

$$k = \frac{uv}{2} \cdot \frac{2u + a}{3}.$$

Vzdálenosť pobočné hrany a od hrany u jest

$$d = \sqrt{a^2 - \left(\frac{u - a}{2}\right)^2} \text{ a tedy } v = \sqrt{d^2 - \frac{u^2}{4}} = \frac{a}{2}.$$

Dosazením do k obdržíme

$$k = \frac{1}{6} \cdot \frac{a}{2}(1 + \sqrt{5})\frac{a}{2}[a(1 + \sqrt{5}) + a] = \frac{a^3}{2^4}(7 + 3\sqrt{5})$$

a že kr. obsah celého dvanáctistěnu jest

$$K = \frac{a^3}{4}(15 + 7\sqrt{5}),$$

bude poměr

$$\frac{K}{k} = \frac{6(15 + 7\sqrt{5})}{7 + 3\sqrt{5}} = 6\sqrt{5},$$

pročež také

$$T = 6t\sqrt{5} = 21{\cdot}533 \ldots kg.$$

Tutéž úlohu řešili pp.: *R. Vyplel* ze VII. tř. r. *v Přerově, Jan Vancl* ze VII. tř. r. *v Hradci Králové*, *Ant. Klír* a *J. Prokůpek* ze VI. tř. vyšší real. šk. *v Praze*, *Ferd. Zuna* ze VII. tř. g. *v Písku*, *Ant. Pleskot* ze VI. g. *v Chrudimi*, *O. Viglic* ze VII. tř. r. *v Pardubicích*, *Jar. Mašek* ze VII. tř. r. městského r. g. na Malé Straně *v Praze, Frant. J. Kočí* z VIII. tř. *v Jičíně.*

Úloha 35.

Dokažte, že pro celistvé kladné n jest výraz

$3^{2n+1} + 2^{n+2}$ dělitelen 7,

$3^{2n+2} + 2^{6n+1}$ „ 11

a $(2n + 1)^5 - 2n - 1$ „ 240.

Úloha 36.

Dokažte: Je-li součet daných tří čísel roven 0, jest součet jich trojmocí roven trojnásobnému součinu daných čísel a součet jich pátých mocnin jest dělitelen pateronásobným součinem daných čísel.

Úloha 37.

Člen $n$tý řady arithmetické stupně prvého roven jest $\frac{3n-1}{6}$, vypočtěte její člen prvý a rozdíl.

Úloha 38.

Rozřešte rovnici

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + adx + d^2 = 0.$$

Úloha 39.

Vyhledejte rovnici, které vyhovují vzdálenosti středu kružnice, vepsané trojúhelníku pravoúhlému, od jeho vrcholů.

(Journal de mathématiques élémentaires et spéciales).

Úloha 40.

Rozřešiti jest soustavu rovnic

$$x^2 + y = 11 \quad (1)$$

$$x + y^2 = 7. \quad (2)$$
*)

Úloha 41.

Má se určiti součet n členů řady

$$1 + 5 + 13 + 29 + 61 + \ldots$$

Úloha 42.

Kolik musí míti někdo obleků, každý jiné barvy, aby každého dne v roce jináče trojbarevně se obléci mohl. *A. P.*

Úloha 43.

Ze čtyř rovně vysokých válců má první kr. obsah K_1 a druhý K_2; plášť třetího se rovná součtu, plášť čtvrtého rozdílu plášťů obou prvních. Jak velký jest součet S kr. obsahů všech? *Prof. Vavř. Jelínek.*

---

*) Jest to *známá* soustava rovnic, viz na př. Hromádko-Strnad: „Sbírka úloh z algebry", 1. vydání.