Úlohy

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 14 (1885), No. 3, 139--142

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121136

jsem v článku svém ukázal — patami kolmic z oněch čtyř bodů ku té ose souměrnosti, seznáme ihned, že pronikají tuto menší křivku kruhovou ve čtyrech bodech hyperboly, p. Amesedrem uvedené. Tím tedy souhlas dosti sobě podobných těch konstrukcí dokázán. Já přenáším délku a strojím čtyři stejnosměrky, p. Ameseder za to dvě délky rozpoluje.

V srpnu, 1884.

Úlohy.

Řešení úlohy 5.

(Zaslal p. *Antonín Klír*, stud. VII. tř. české real. šk. v Praze.)

Žádaný díl koule k jest roven kuželi menšímu, zvětšenému o vrstvu koule, kteráž jest omezena podstavami obou kuželů, a zmenšenému o kužel větší.

Značí-li R poloměr koule, r poloměr podstav kuželů, v výšku menšího, V výšku většího kužele, jest

$$k = \tfrac{1}{3}\pi r^2 . v - \tfrac{1}{3}\pi r^2 . V + \pi r^2 a + \tfrac{1}{6}\pi a^3;$$

a ježto $v - V = -a$, jest $k = \tfrac{2}{3}\pi a\left(r^2 + \dfrac{a^2}{4}\right)$.

Ale $$r^2 + \frac{a^2}{4} = R^2,$$

tedy $$k = \tfrac{2}{3}\pi R^2 a = 4\pi R^2 . \frac{a}{6} = \frac{1}{6} Pa = 299\cdot36\ cm^3.$$

Správné řešení zaslali pp.: *Jindřich Heinemann* a *Jar. Pavlousek* z VIII. tř. v Ml. Boleslavi, *Josef Sumr*, *B. Tschapek* ze VII. tř. r. a *Karel Rajdl* ze VI. tř. r. městského r. g. na Malé Straně v Praze, *Šimon Pokoj* z VIII. tř. a *Frant. Nušl* z V. tř. g. v Jindř. Hradci, *Frant. Vítek* z VIII. tř. v Hradci Králové, *Jan Pochobradský* z VIII. tř. a *Ant. Pleskot* ze VII. tř. g. v Chrudimi, *Frant. Jirásek* z VIII. tř. v Broumově, a *J. Prokůpek* ze VII. tř. české real. šk. v Praze.

Řešení úlohy 6.

(Zaslal p. *Josef Sumr*, stud. VII. tř. r. městského r. g. na Malé Straně v Praze.)

Nazveme-li r poloměr obou podstav a v výšku vrstvy kulové, bude její kr. obsah

$$k = \pi v \left(r^2 + \frac{v^2}{6}\right) = \pi r^2 v + \frac{\pi v^3}{6} = k_2 + k_3;$$

aneb, znamená-li R poloměr koule, jest

$$k = \pi v \left(R^2 - \frac{v^2}{4} + \frac{v^2}{6}\right) = \pi R^2 v - \frac{\pi v^3}{12} = k_1 - \frac{1}{2} k_3.$$

Rovnice tyto dají žádaný kr. obsah a sice vrstvy

$$k = \tfrac{1}{3}(2k_1 + k_2) = 18\tfrac{1}{2}\, dm^3$$

a vnitřní koule $k_3 = \tfrac{2}{3}(k_1 - k_2) = \tfrac{1}{2}\, dm^3$.

Kr. obsah vnitřní koule jest také $k_3 = \frac{\pi v^3}{6}$; z obou výrazů pro k_3 plyne pak výška vrstvy $v = \sqrt[3]{\frac{4}{\pi}(k_1 - k_2)}$, a že kr. obsah zevního válce jest $k_1 = \pi R^2 . v = R^2 \sqrt[3]{4\pi^2(k_1 - k_2)}$, bude poloměr koule $R = \sqrt{\frac{k_1}{\sqrt[3]{4\pi^2(k_1 - k_2)}}}$ a její obsah

$$K = \tfrac{4}{3} k_1 \sqrt{\frac{k_1}{k_1 - k_2}} = 62\tfrac{1}{2}\, dm^3.$$

Správné řešení zaslali pp.: *František Vítek* z VIII. tř. v Hradci Králové, *J. Karlík* ze VII. tř. r. v Karlíně, *Antonín Pleskot* ze VII. tř. g. v Chrudimi, *J. Prokůpek* a *Ant. Klír* ze VII. tř. české v. real. šk. v Praze, *Boh. Mašek* ze VI. tř. g. na Novém Městě v Praze, *Jindřich Heinemann* z VIII. tř. v Mladé Boleslavi, *Josef Stehlík* ze VII. tř. g., *Frant. Ullrich*, *B. Tschapek* ze VII. tř. r. a *Karel Rajdl*, *Alois Čenský*, *Boh. Müller* ze VI. tř. r. městského r. g. na Malé Straně v Praze a *Frant. Nušl* z V. tř. g. v Jindřichově Hradci.

Řešení úlohy 7.

(Zaslal p. *J. Karlík*, stud. VII. tř. r. v Karlíně.)

Dané koule mějtež poloměry R, r, podstavy komolého kužele R_1, r_1 a strana komolého kužele budiž t, výška V; úseky pak koulí, obsažené v kuželi, nechť mají výšku v.

Z podobných trojúhelníků pravoúhlých obdržíme, najdeme-li napřed $t = 2\sqrt{Rr}$,

$$V = \frac{t^2}{R + r} = \frac{4Rr}{R + r},$$

$$R_1 = \frac{Rt}{R+r} = \frac{2R\sqrt{Rr}}{R+r} \quad \text{a} \quad r_1 = \frac{rt}{R+r} = \frac{2r\sqrt{Rr}}{R+r}.$$

Poněvadž vnitřní tečna koulí půlí stranu t, půlí také výšku komole; výšky kulových úseků, pláštěm komole zahalených, jsou si tedy rovny a obnáší každá $v = \frac{V}{2} = \frac{2Rr}{R+r}$.

Kr. obsah žádaného prostoru rovná se obsahu komole

$$J = \frac{4\pi R^2 r^2}{3(R+r)^3}(4R^2 + 4Rr + 4r^2)$$

zmenšenému o oba úseky U i u, totiž

$$U + u = \frac{4\pi R^2 r^2}{3(R+r)^3}(3R^2 + 3Rr + 3r^2),$$

tudíž
$$k_1 = J - (U + u) = \frac{4\pi R^2 r^2}{3(R+r)}$$

neb
$$k_1 = \frac{\sqrt[3]{K^2 k^2}}{\sqrt[3]{K} + \sqrt[3]{k}} = 3{\cdot}3124\ dm^3.$$

Tutéž úlohu řešili pp.: *Fr. Zelený* z VIII. tř. I. r. g. v Praze, *Ferd. Koláčný* ze VII. tř. r. v Karlíně, *Josef Sumr, B. Tschapek*, *Frant. Ullrich* ze VII. tř. r. a *Karel Rajdl* ze VI. tř. r. městského r. g. na Malé Straně v Praze, *Šimon Pokoj* z VIII. tř. a *Fr. Nušl* z V. tř. g. v Jindř. Hradci, *Ant. Pleskot* ze VII. tř. g. v Chrudimi, *Ant. Klíma* a *Ferd. Zuna* z VIII. tř. v Písku, *Ant. Klír* a *J. Prokůpek* ze VII. tř. české real. školy v Praze, *Jos. Novák* ze VII. tř. r. v Hoře Kutné, *Fr. Fišer* z VIII. tř. v Roudnici a *Josef Kulhánek* ze VII. tř. r. v Hradci Králové.

Řešení úlohy 8.

(Zaslal p. *Ant. Pleskot,* stud. VII. tř. g. v Chrudimi.)

Postavme jehlan na pobočnou stěnu s_1, jejíž hrany a_1 a b_1, vycházející ze společného vrcholu všech skrojků, patří k největšímu skrojku k_1, souhlasné pak hrany a_2 a b_3 potažně skrojku menšímu a nejmenšímu. Žádaný skrojek bude míti podstavnou hranu a_2 s druhým, b_3 s třetím a výšku pak s prvním skrojkem společně.

Je-li tedy jeho podstava s, bude

$$k : k_1 = s : s_1 = a_2 b_3 : a_1 b_1,$$

a že pro podobnosť daných skrojků jest

$$a_2 : a_1 = \sqrt[3]{k_2} : \sqrt[3]{k_1}$$

$$b_3 : b_1 = \sqrt[3]{k_3} : \sqrt[3]{k_1},$$

bude také $$a_2 b_3 : a_1 b_1 = \sqrt[3]{k_2 k_3} : \sqrt[3]{k_1^2},$$

tedy i $$k : k_1 = \sqrt[3]{k_2 k_3} : \sqrt[3]{k_1^2},$$

z čehož $$k = \sqrt[3]{k_1 k_2 k_3} = \sqrt[3]{\frac{2^4 . 9}{11} . \frac{2^3 . 11}{13} . \frac{2^2 . 13}{9}} = 8 dm^3.$$

Tutéž úlohu správně řešil p. *Josef Sumr* ze VII. tř. r. městského r. g. na Malé Straně v Praze.

Úloha 18.

Vyhovují-li veličiny

$$a_1, \ a_2, \ a_3, \ \ldots, \ a_n$$
$$b_1, \ b_2, \ b_3, \ \ldots, \ b_n$$

složité srovnalosti

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \ldots = \frac{a_n}{b_n},$$

platí zároveň

$$\sqrt{a_1 b_1} + \sqrt{a_2 b_2} + \sqrt{a_3 b_3} + \ldots + \sqrt{a_n b_n}$$
$$= \sqrt{(a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n)(b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n)}.$$

Jaký jest toho důkaz? *Std.*

Úloha 19.

Budiž řešena rovnice

$$\begin{vmatrix} 1 & \operatorname{tg} x & \cot x \\ \cot x & 1 & \operatorname{tg} x \\ \operatorname{tg} x & \cot x & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Prof. *A. Strnad.*

Úloha 20.

Má se řešiti trojúhelník, jsou-li dány podstava ($c = 20$), těžní přímka podstavu půlící ($t = 12$) a příčka půlící protilehlý úhel ($u = 11$). Prof. *Jar. Sobička.*

Úloha 21.

Budiž ustanovena obalová křivka kružnic majících středy na hyperbole a procházejících středem jejím. Prof. *A. Strnad.*
