Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Alois Strnad

Drobné zprávy

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 17 (1888), No. 4, 178--182

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121173

Dokážeme, že potom hledaný trojúhelník není možný.

Důkaz. Kdyby totiž byl možný a v bodě M se dotýkala strana jeho AC kruhu K', byla by tím již dána příčka EQ, úhel při vrcholu protějším B rozpolující, která nutně bodem E, protože oblouk AC rozpoluje, a středem Q, protože strany AB a BC mají se dotýkati kruhu K', procházeti musí. Ale tím dán by byl i vrchol protější B, jenž má býti zároveň na této příčce a na kruhu K, tedy v průseku obou. Potom by musila přímka spojující průsek B s bodem C býti tečnou, což však býti nemůže:

α) Dejme tomu, že $d^2 - r^2 + 2r\varrho = c^2 > 0$, ($c^2$ značí veličinu kladnou vůbec), potom jest $DC^2 + c^2 = d^2 + 2r\varrho - OD^2$ podle (2) a také $DC^2 + c^2 = QJ^2$ dle (7) neboli $DC < QJ$, tedy $EC < QE$ a $\sphericalangle EQC < \sphericalangle ECQ$ čili

$$\text{arc}\, BF + \text{arc}\, EC < \text{arc}\, FA + \text{arc}\, AE,$$

z čehož $\text{arc}\, BF < \text{arc}\, FA$, tudíž $\sphericalangle FCB < \sphericalangle FCA$ vyplývá. Ale pak jest $QT < QM$, tedy BC sečnou kruhu K'.

β) Jeli však $d^2 - r^2 + 2r\varrho < 0$, lze podobně dokázati, že BC leží mimo kruh K'.

Drobné zprávy.

Napsal

Alois Strnad,
professor v Hradci Králové.

Čísla Bernoulliova. Čísla tato vyskytující se poprvé ve slavném spise Jakuba Bernoullia „Ars conjectandi“ (1713), různě bývají označována a definována. Pro svou důležitosť v analysi jsou častým a oblíbeným předmětem pojednání; podáme tuto stručnou zprávu o některých novějších pracích čísel těch se týkajících.

Baraniecki, docent university varšavské, pojednal o nich ve sborníku: Rozprawy i sprawozdania z posiedzeń wydziału matematyczno-przyrodniczego Akademii Umiejętności w Krakowie (tom. XIII. 1886. str. 183). Vyvineme-li výraz

$$S_n = 1^n + 2^n + 3^n + \dots + (k-1)^n$$

v řadu dle mocnin veličiny k, bude

$$S_n = \frac{1}{n+1} \sum_{m=0}^{n} B_m k^{n-m+1},$$

kdež B_m jest m-tým číslem Bernoulliovým. Ze vzorce toho lze odvoditi rovnici symbolickou

$$n\, S_{n-1} = (B + k)^n - B^n,$$

kde totiž po vykonaném zmocnění učiniti jest z mocnitelů veličiny B její ukazatele. Odtud vychází pak rovnice symbolická

$$(B + 1)^n - B^n = 0,$$

ze které spůsobem rekurentním hodnoty čísel B lze stanoviti. Obdržíme tak

$$B_0 = 1,\ B_2 = \frac{1}{6},\ B_4 = -\frac{1}{30},\ B_6 = \frac{1}{42},\ B_8 = -\frac{1}{30}, \ldots$$

$$B_1 = -\frac{1}{2},\ B_3 = B_5 = B_7 = \ldots = 0.$$

Užitím hořejšího vzorce lze mimo jiné vyvoditi relace

$$(2\,B + 1)^{2n+1} = 0,$$
$$(2\,B + 1)^{2n} - 2^{2n}\, B^{2n} = 2\,(1 - 2^{2n})\, B^{2n},$$
$$(2\,B + 1)^n - (2\,B - 1)^n = 2n\,(-1)^{n-1},$$

z nichž poslední podal již *E. Lucas* v pojednání Théorie nouvelle des nombres de Bernoulli et d'Euler, uveřejněném r. 1877 v Annalech Brioschiových.

Cesaro (Nouvelles Annales, 1886. p. 305) definuje čísla Bernoulliova rovnicí taktéž symbolickou

$$(B + 1)^n - B^n = n,$$

která vede k týmž hodnotám, jako rovnice svrchu uvedená, mimo $B_1 = \frac{1}{2}$. Při tomto označení platí pozoruhodná rovnice

$$\frac{x\, e^x}{e^x - 1} = e^{Bx} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n,$$

jakož i rovnice

$$\frac{1}{1^{2n}} + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \ldots = (-1)^{n-1} \frac{2^{2n-1}\, B_{2n}\, \pi^{2n}}{(2n)!}.$$

Zobecněním čísel těchto jsou tak zvaná *čísla ultrabernoulliovská*, vyhovující rovnici

$$(\mathfrak{B} + 1)^n - a\, \mathfrak{B}^n = n,$$

kdež a jest konstantní. Souvislost jejich s čísly B vyznačena jest rovnicí

$$\frac{x e^x}{e^x - a} = e^{\mathfrak{B}x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathfrak{B}_n}{n!} x^n$$

a vzorci

$$\mathfrak{B}_n(1) = \mathrm{B}_n, \quad \mathfrak{B}_n(-1) = (2^n - 1)\,\mathrm{B}_n.$$

Zmíníme se tuto ještě o článku Sur une classe de nombres remarquables, kterýž napsal *d'Ocagne* (American Journal of Mathematics. Volume IX. 1887. p. 353). Autor vyšetřuje čísla vyjádřená vzorcem

$$\mathrm{K}_m^p = p\,\mathrm{K}_{m-1}^p + \mathrm{K}_{m-1}^{p-1}$$

při podmínkách $\mathrm{K}_m^1 = 1$, $\mathrm{K}_m^m = 1$, při čemž ukazatelé p i m jsou čísla celá kladná od 1 do nekonečna. Čísla ta lze seřaditi do trojúhelníka, kdež p značí pak číslo sloupce a m číslo řádky:

$$\begin{array}{llllll}
1, & & & & & \\
1, & 1 & & & & \\
1, & 3, & 1 & & & \\
1, & 7, & 6, & 1 & & \\
1, & 15, & 25, & 10, & 1 & \\
1, & 31, & 90, & 65, & 15, & 1 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array}$$

Důležitosť těchto čísel zřejmě jest dokázána prací d'Ocagneovou, plnou pěkných výsledků; uvedeme zde některé vztahující se k číslům Bernoulliovým:

$$\mathrm{B}_n = \frac{n}{2^n - 1} \sum_{m=1}^{n-1} (-1)^{m-1} \frac{m!\,\mathrm{K}_{n-1}^m}{2^{m+1}}$$

$$\mathfrak{B}_n = -n a \sum_{m=1}^{n-1} \frac{m!\,\mathrm{K}_{n-1}^m}{(a-1)^{m+1}}$$

$$\mathrm{B}_n = \sum_{m=1}^{n} (-1)^{m-1} \frac{(m-1)!\,\mathrm{K}_n^m}{m+1}$$

$$\mathrm{B}_n = \sum_{m=1}^{n+1} (-1)^{m-1} \frac{(m-1)!\,\mathrm{K}_{n+1}^m}{m}.$$

Cremonovy transformace. Dvě rovinné soustavy mohou býti spolu v takové souvislosti, že každému bodu jedné náleží jediný bod ve druhé a naopak, a že každé přímce jedné soustavy přísluší v soustavě druhé křivka stupně n i naopak. Možnosť i hlavní vlastnosti takovéto sdruženosti dvou rovinných soustav objevil slavný geometr italský *Cremona*; pojednání jeho o tomto předmětu vyšlo též v českém překladu prof. dra *Em. Weyra* a sice v Živě r. 1872.

Geometrickou theorii těchto transformací pěstují pilně geometrové italští; podáme ukázkou některé výsledky novějších prací v tomto oboru.

Guccia pojednává v Rendiconti del circolo matematico di Palermo (I. 1886. p. 119)*) o vztazích, které ze soumístnosti obou soustav vyplývají. Jsou-li obě soustavy soumístné, t. j. nalézají-li se v téže rovině, mají $n+2$ body samodružné a $\frac{1}{2}n(n-1)$ vratných družin bodových. Geometrické místo bodů soustavy jedné, jichž spojnice s body příslušnými soustavy druhé obalují danou křivku třídy m, jest křivka stupně $m(n+1)$, která prochází několikráte základními body obou soustav a má v bodech samodružných body m-násobné. Při $m=1$ bude tímto místem křivka stupně $n+1$, k jejímž veškerým bodům přísluší body sdružené na paprscích určitého svazku p. K bodu p náleží tímto způsobem — dle toho, pokládáme-li jej za bod prvé neb druhé soustavy — dvě křivky P_p a P'_p, které již *Cremona* vyšetřil. *Guccia* nazývá je křivkami isologickými bodu p a mezi jinými dokazuje o nich větu: Dotýkají-li se v bodě b křivky isologické bodu a, dotýkají se křivky isologické bodu b v bodě tomto přímky ab. — K danému bodu p, počítáme-li jej k prvé neb druhé soustavě, lze stanoviti dva body odvozené p_1, p_2, odpovídající bodu p; podobně ku každé přímce G lze tak stanoviti dvě odpovídající křivky G_1, G_2. Geometrické místo bodu, jemuž odpovídající body stanoví tečnu dané křivky m-té třídy, jest křivka stupně $2mn$; tato prochází několikráte základními body obou soustav a má v bodech samodružných i v bodech vratných body m-násobné. Při $m=1$ obdržíme tak ke každému bodu p křivku M_p stupně $2n$, třídy n^2-1; křivka ta prochází též body p_1, p_2 odpovídajícími bodu p, ale neprochází obecně tímto bodem. Leží-li pak bod p na křivce M_p, jsou body p,

*) Na str. 93. tohoto sborníku podán jest obsah XIV. a XV. ročníku našeho Časopisu s úplným a správným uvedením původních titulů všech článků i jich autorů.

p_1, p_2 v jediné přímce. Četné další věty tohoto druhu obsahují zobecnění mnohých vlastností transformací kvadratických, jak *Hirstem* (Quarterly Journal, 1881) stanoveny byly.

Dvě nesoumístné soustavy, sdružené způsobem Cremonovým, zavdávají podnět ku vzniku různých ploch, jimiž zabývali se *Jung* a *Visali* (Atti della reale Accademia dei Lincei, Rendiconti 1885., p. 762, 1886., p. 80). Jsou-li dvě rovinné soustavy Σ a Σ' sdruženy ve stupni n-tém, tvoří spojnice bodů sdružených kongruenci stupně $n+2$ a třídy n. Buď dán mimo to svazek prostorový s, který je k soustavě Σ v reciproké souvislosti stupně m; t. j. každému bodu soustavy Σ náleží určitá rovina svazku s a naopak, přímé řadě v soustavě Σ přísluší ve svazku s roviny obalující plochu kuželovou třídy m atd. Přímky oné kongruence a příslušné roviny svazku s jsou jednoznačně k sobě přidruženy; každá přímka taková má s příslušnou rovinou společný bod a geometrickým místem všech těchto bodů jest určitá plocha ψ. Plocha tato jest stupně $(m+1)(n+1)+1$, má v bodě s bod $(n+2)$-násobný a obsahuje křivku dvojnou stupně

$$\alpha = \tfrac{1}{2}(mn+m+n)(mn+m+n-1) - \tfrac{1}{2}m(m-3)+1.$$

Základní body soustavy Σ a základní přímky svazku s jsou též násobnými body a přímkami plochy ψ, kteráž mimo to má $(m+1)(n+1)$ přímek jednoduchých; jsou to ony přímky v kongruenci (Σ, Σ'), kterými procházejí příslušné roviny svazku s. Z vytvoření plochy ψ jest patrno, že lze každému bodu jejímu přiřaditi jediný určitý bod roviny Σ; lze tedy onu plochu transformovati bod za bodem v rovinu Σ aneb v každou jinou, k této kollineárnou.

Úlohy.

Řešení úlohy 5.

(Zaslal p. *Karel Petr*, stud. VIII. tř. v Chrudimi.)

Zvolíme-li počátek pravoúhlé soustavy souřadnic v bodu, v němž se koule svislé stěny dotkla, osu X ke stěně kolmo a osu Y svislou, bude rovnice parabolické dráhy