E. Bunický

Sur la fonction reciproque réelle et continue

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 64 (1935), No. 8, 289--292

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121213

ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY A FYSIKY

ČÁST MATEMATICKÁ

Sur la fonction réciproque réelle et continue.

Par E. Bunický, Praha.

(Reçu le 13 septembre 1934.)

§ 1. Soit E un ensemble quelconque; soit $\varphi(x)$ une fonction définie dans E et dont les valeurs appartiennent à E. Posons

$$\varphi_1(x) = \varphi(x),\ \varphi_n(x) = \varphi(\varphi_{n-1}(x)) \text{ pour } n = 2, 3, \ldots$$

S'il existe un nombre entier $n > 0$ tel que $\varphi_n(x) = x$ pour chaque x de l'ensemble E, nous allons dire que la fonction $\varphi(x)$ est une *fonction réciproque d'ordre n dans E.* De plus nous allons appeler une telle fonction *fonction réciproque d'ordre n propre dans E* si, tout en étant réciproque d'ordre n dans E, elle n'est pas réciproque d'un ordre plus petit (dans E).

Il n'existe qu'une seule fonction réciproque d'ordre 1 (nécessairement propre) dans E; c'est la fonction $\varphi(x) = x$. La fonction $\varphi(x) = a - x$, a étant un nombre complexe, est une fonction réciproque du deuxième ordre propre dans l'ensemble de tous les nombres complexes et, si a est réel, aussi dans l'ensemble de tous les nombres réels. La fonction $\varphi(x) = b/x$, où $b \neq 0$ est un nombre complexe, est réciproque du deuxième ordre propre et continue dans l'ensemble de tous les nombres complexes, le nombre zéro étant exclu. Si $b \neq 0$ est un nombre réel, b/x est une fonction réciproque du deuxième ordre propre dans l'ensemble de tous les nombres réels, $x = 0$ étant exclu. Si $b > 0$, la fonction b/x est réciproque du deuxième ordre propre dans chacun des intervalles (ouverts) $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$ séparément. Au contraire, si $b < 0$, la fonction $\varphi(x) = b/x$ n'est pas réciproque dans aucun intervalle ininterrompu de nombres réels; car un tel intervalle devrait contenir le point zéro (car x et $\varphi(x)$ ont toujours des signes contraires), ce qui est absurde.

§ 2. Soit α une racine primitive de l'unité du degré n, n étant un nombre entier et positif quelconque. Si E signifie l'ensemble de tous les nombres complexes, la fonction αx est évidemment une fonction réciproque d'ordre n propre et *continue* dans E. Au contraire, si E est un intervalle de nombres réels, on a le résultat suivant:

Théorème. *(a, b) étant un intervalle quelconque (fini ou infini, fermé ou non) et $\varphi(x)$ étant une fonction continue dans (a, b) et réciproque d'ordre n propre dans (a, b), on a ou bien $n = 1$ ou bien $n = 2$; dans le premier cas, on a $\varphi(x) = x$ dans (a, b); dans le deuxième cas, $\varphi(x)$ est une fonction décroissante dans (a, b).*

Ce théorème est une conséquence des lemmes suivants.

Lemme 1. *Soit $\varphi(x)$ une fonction continue et réciproque d'un certain ordre n dans (a, b); alors $\varphi(x)$ est ou bien une fonction croissante ou bien une fonction décroissante dans (a, b).*

Démonstration: Supposons que

$$\varphi(x_1) = \varphi(x_2),$$

x_1, x_2 étant deux points de l'intervalle $J = (a, b)$. On a donc (en posant toujours $\varphi_0(x) = x$)

$$\begin{aligned}\varphi_{n-1}\,(\varphi(x_1)) &= \varphi_{n-1}\,(\varphi(x_2)),\\ \varphi_n(x_1) &= \varphi_n(x_2),\end{aligned}$$

c'est-à-dire $x_1 = x_2$. Donc $\varphi(x)$ est une fonction à valeurs distinctes dans J et continue dans J, d'où le résultat cherché.

Lemme 2. *Soit E un ensemble de nombres réels; soit $\varphi(x)$ une fonction réciproque d'un certain ordre n dans E et croissante dans E; alors on a $\varphi(x) = x$ dans E.*

Démonstration: Si l'on avait $\varphi(\alpha) < \alpha$ pour une certaine valeur α de l'ensemble E, on aurait ($\varphi(x)$ étant une fonction croissante dans E) pour chaque p entier et positif $\varphi_p(\alpha) < \varphi_{p-1}(\alpha)$, d'où

$$\alpha < \varphi_n(\alpha) < \varphi_{n-1}(\alpha) < \ldots < \varphi_0(\alpha) = \alpha$$

et, par suite, $\alpha < \alpha$, ce qui est absurde.

De la même manière, on déduit une contradiction de l'inégalité $\varphi(\alpha) > \alpha$.

Lemme 3. *Soit E un ensemble de nombres réels; soit $\varphi(x)$ une fonction réciproque d'un certaine ordre n dans E et décroissante dans E; alors $\varphi(x)$ est une fonction réciproque du deuxième ordre propre dans E.*

Démonstration: $\varphi(x)$ étant une fonction décroissante, $\psi(x) = \varphi_2(x)$ est une fonction croissante dans E; on a d'ailleurs:

$$\varphi_{2n}(x) = \varphi_n\,(\varphi_n(x)) = \varphi_n(x) = x,$$

c'est-à-dire $\psi_n(x) = x$; la fonction $\psi(x)$ étant réciproque et croissante dans E, on a d'après le lemme 2. $\psi(x) = x$, c'est-à-dire $\varphi_2(x) = x$ dans E.

Nous avons donc démontré les lemmes 1, 2, 3. Notre théorème en est une conséquence immédiate.

§ 3. *Exemples.* *a*) Les fonctions suivantes de x sont réelles, continues, réciproques du deuxième ordre propre et décroissantes dans les intervalles correspondants: $|\sqrt{r^2 - x^2}|$ et $r - |\sqrt{2rx - x^2}|$ dans l'intervalle $< 0, r >$, r étant un nombre constant positif arbitrairement donné; $(- |\sqrt{r^2 - x^2}|)$ dans l'intervalle $< -r, 0 >$, $r + |\sqrt{2rx - x^2}|$ dans l'intervalle $< r, 2r >$; $\sqrt[3]{1 - x^3}$ dans l'intervalle $(-\infty, +\infty)$; $\log_a(1 - a^x)$ pour $a > 1$ dans l'intervalle $(-\infty, 0)$ et pour $0 < a < 1$ dans l'intervalle $(0, +\infty)$, a étant une constante positive arbitrairement donnée.

b) La fonction $\varphi(x) = \dfrac{x-1}{x}$ est réciproque du troisième ordre propre, comme on le reconnaît aisément à l'aide des égalités

$$\varphi_2(x) = \frac{1}{1-x}, \quad \varphi_3(x) = x.$$

On peut considérer cette fonction comme réciproque du troisième ordre et continue dans un ensemble de trois intervalles isolés, par exemple dans l'ensemble d'intervalles $< 2, 3 >$, $< \frac{1}{2}, \frac{2}{3} >$, $< -1, -\frac{1}{2} >$, lesquels ne contiennent aucun des points de la discontinuité de la fonction $\dfrac{x-1}{x}$ ou de ses itérations, c'est-à-dire aucun des points $x = 0$, $x = 1$. Mais on ne peut définir la fonction $\dfrac{x-1}{x}$ comme réciproque et continue dans aucun intervalle ininterrompu, ce qui suit immédiatement de notre théorème. On peut vérifier cette propriété de la fonction $\dfrac{x-1}{x}$ par un calcul direct. En effet, soit $x = \xi$ une valeur donnée de x, différente des points de la discontinuité de la fonction $\varphi(x)$ et de ses itérations successives, à savoir différente des nombres 0 ou 1. Donc, il ne sont que trois cas possibles: $\xi < 0$, $0 < \xi < 1$, $\xi > 1$. Admettons que la fonction $\varphi(x) = \dfrac{x-1}{x}$ soit réciproque du troisième ordre propre et continue dans un seul intervalle quelconque ininterrompu. Or dans le premier cas on a $\xi < 0$, $\varphi(\xi) = \dfrac{\xi - 1}{\xi} > 0$; ainsi l'intervalle hypothétique de la définition de la fonction $\varphi(x)$ contient dans ce cas à la fois les valeurs $\xi < 0$ et $\varphi(\xi) > 0$ des signes contraires de la variable x et, par suite, contient le point $x = 0$, c'est-à-dire le point de la discontinuité de $\varphi(x)$, ce qui est contre l'hypothèse. Dans le second cas on a $\xi > 0$, $\varphi(\xi) = \dfrac{\xi - 1}{\xi} < 0$, et l'intervalle hypothétique doit de nouveau contenir le point de la discontinuité $x = 0$ de $\varphi(x)$, ce qui est impossible. Enfin dans le troisième cas on aura

$\xi > 1$, $\varphi(\xi) = \dfrac{\xi - 1}{\xi} < 1$, et l'intervalle hypothétique contient aussi le nombre intermédiaire $x = 1$ qui représente le point de la discontinuité de la fonction $\varphi_2(x)$, ce qui est impossible.

c) La fonction

$$\varphi(x) = \frac{x + 5}{3 - x}$$

est, en vertu des identités

$$\varphi_2(x) = \frac{5 - x}{1 - x}, \quad \varphi_3(x) = \frac{3x - 5}{x + 1}, \quad \varphi_4(x) = x,$$

réciproque du quatrième ordre propre. Donc, d'après notre théorème, cette fonction ne peut être définie comme continue et réciproque dans aucun intervalle ininterrompu. On peut le vérifier immédiatement au moyen des raisonnements analogues à ceux de l'exemple précédent, en tenant compte des points de la discontinuité $x = 3$, $x = 1$, $x = -1$ de la fonction $\varphi(x)$ et de ses itérations successives.

*

O funkci reciproké, reálné a spojité.

(Obsah předchozího článku.)

Budiž J libovolný interval na ose reálných čísel. Budiž $\varphi(x)$ funkce spojitá v J a taková, že $\varphi(J) \subset J$. Položme $\varphi_1(x) = \varphi(x)$, $\varphi_k(x) = \varphi(\varphi_{k-1}(x))$ a předpokládejme, že existuje celé $n > 0$ takové, že $\varphi_n(x) = x$ v celém intervalu J. Potom mohou nastati jenom tyto dva případy: 1. buď jest $\varphi(x) = x$ v celém intervalu J; 2. nebo jest funkce $\varphi(x)$ klesající v J a potom jest $\varphi_2(x) = x$ v celém intervalu J.