Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

František Josef Studnička

O kvaternionech. [I.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 5 (1876), No. 2, 49--66

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121222

O kvaternionech.

Sepsal

Dr. F. J. Studnička.

Úvod.

Jak jsem na jiném místě [1]) již poznamenal, vedlo původně odčítání k číslům *negativním, odčetným,* ana dlouho byla považována jen za zvláštní fikce a tudíž i zavrhována; neb představiti si něco, co jest menší nežli samo nic, příčilo se zdravému rozumu. Pojem čísla co souboru jednotek stejnorodých v této své obmezenosti taktéž byl příliš úzkým, jelikož v sobě obsahoval posici něčeho, co jest větší nežli nic, takže tak dlouho jen s čísly positivními počítáno, až konečně rozvoj mathematiky dosáhl tak vysokého stupně, že mohl pojem čísla vůbec se rozšířiti i na čísla negativní po celá století nenáviděná a zneuznávaná.

První mathematik západu, nanejvýš zasloužilý *Fibonacci* (1230) uznává negativní řešení úlohy jen tam, kde se jedná o nějaké debitum a má tudíž na zřeteli i po dnes užívané porovnání příjmů a vydání, jmění a dluhů s čísly positivními a negativními. Po něm vyskytují se tytéž názory beze změny až do konce XV. století, kde *Pacioli* (1494) již známé pravidlo symbolem

$$- \cdot - = +$$

vyjádřené zná, ač zdánlivou neshodu, jak násobením čísel smyšlených možná vyvésti číslo skutečné neb reálné, nedovedl objasniti a vyložiti. I výtečný mathematik německý *Stifel* (1544) nazývá negativní čísla „numeri surdi, ficti infra nihil“, taktéž i současný algebrista *Cardano* (1545) uvádí je co „minus purum“

[1]) Viz „Základové nauky o číslech“ pag. 39.

do počtu, avšak snaží se jich všude vystříhati. Teprv *Harriot* skoro na konci XVI. století zjednal jim občanské právo v mathematice a od té doby málo kdy vyskytl se odpůrce nějaký, který by počítání s nimi zavrhoval aneb číselnou podstatu jim upíral.

Tak dlouhého boje bylo tudíž zapotřebí, nežli si negativní čísla vydobyla onoho postavení, jaké zaujímají čísla positivní, prostým kladením jednotky povstávající, tak dlouho zůstal jedině v platnosti úzký pojem čísla vůbec, nežli byl rozšířen tak, aby se jím zahrnula i čísla negativní!

Podobný ač mnohem trudnější osud měla čísla imaginární, k nimž se ponejprv přišlo při řešení rovnic kvadratických, když bylo dobýti kořene druhého z čísla negativního; těch oprávněnost teprv v našem století uznána, ba teprv nyní končí se boj o platnost těchto čísel v mathematice, jež tak mnohých služeb jí prokazují a přec jen s jakýmsi podezřením u mnohých se potkávají.

Aby se jim vyhnul, žádá již *Cardano* při řešení rovnic kvadratických

$$x^2 + b = 2ax,$$

aby $a^2 > b$, a podotýká „si detractio ipsa $a^2 - b$ fieri nequit, quæstio ipsa et falsa, nec esse potest, quod proponitur"; tak na př. jest mu řešení $5 \pm \sqrt{-15}$ „solutio vere sophistica", ba symbol $-1 - \sqrt{-1}$ „omnino falsum", při čemž mu neušlo, že se tyto výrazy podivné vyskytují po dvou čili sdruženě. Krajan jeho *Bombelli* (1579) ukázal již, jak se má počítati s veličinami tvaru soujemného (komplex) $a + b\sqrt{-1}$, [2]) při čemž nazývá $+\sqrt{-1}$ „piu di meno" a opak toho $-\sqrt{-1}$ „meno di meno"; avšak jsou mu to jen výrazy pro jisté výkony, reálnými čísly nesplnitelné. *Albert Girard* (1629) připouští sice oprávněnost čísel těchto, jež nazývá „quantités enveloppées", *Descartes* (1637) rozeznává je co *imaginární* od reálných, ale používá jen reálných, takže jinorodost jejich, ač nevadí úkonům algebraickým, nedovoluje uznati jich stejnou oprávněnost.

---

[2]) Soujemné číslo skládá se tudíž z dvou podstatně se lišících částí, takže místo překladu slova „komplex" lépe by se k jich označení hodilo slovo „dvojspřežné číslo".

Zcela jinak soudil o veličinách soujemných *Leibnic* (1676), maje na zřeteli výrazy pro kořeny sdružené; praví v dopisu k Oldenburgovi: Et veræ realesque sunt quantitates, si inter se conjunguntur, ob destructiones *virtuales*. Quod multis elegantibus exemplis et argumentis deprehendi. E. g.

$$\sqrt{(1+\sqrt{-3})}+\sqrt{(1-\sqrt{-3})}=\sqrt{6}.$$

V této příčině velice prospěla snaha vytknouti poměr jich k číslům reálným; a tu již *Wallis* (1673) ustanovil $\sqrt{-1}$ co geometrický průměr mezi $+1$ a -1, načež *Kühn* (1753) ukázal, že znázornění čísla imaginárního dá se provésti kolmicí na přímku vedenou, kteráž znázorňuje čísla reálná, což *Truel* (1786) opětně vytknul a více přivedl k platnosti ve světě mathematickém. Hlavní však zásluhy získal si o nauku těchto čísel *Argand* (1806), kterýž soujemnou veličinu $a+bi$ znázornil bodem v rovině a též pojem modulu $\sqrt{a^2+b^2}$ zavedl; čísla reálná znázorňuje tudíž přímka, čísla imaginární pak přímka kolmo na předešlou v bodě o postavená, pročež někteří mathematikové i navrhovali, aby se zavedlo pojmenování „laterální“, místo imaginární, čísla soujemná konečně znázorňuje rovina a naopak.

Po něm ujali se těchto „nemožných, nesmyslných“ čísel někteří výteční mathematikové, vyložili zcela jasně úlohu, jaká jim jest v mathematice vykázaná, a zjednali jim tudíž stejnou vážnost s čísly reálnými.

Především sluší tu jmenovati geniálního krajana Argandova jmenem *Cauchy* (1821), který zavedením pojmu *modul*, *argument*, *tvar redukovaný*

$$r e^{\varphi i}=r\,(\cos\varphi+i\sin\varphi)=a+bi,$$

sdruženost a m. j. usnadnil jich užívání, vyzpytováním nových vztahů ukázal jich zajímavost a hojným upotřebením zřejmě vytknul jich prospěšnost. Vedlé něho zaujímá místo neméně čestné *Gauss* (1831), který si o tato dlouho postrkovaná čísla tolik zjednal zásluh, že obecně se má za to, že od něho pochází měšťanské právo, jakéhož nyní užívají v mathematickém světě; krátké označení imaginární jednotky

$$\sqrt{-1}=i$$

jakož i jmeno „komplex“ a označení normy čísla soujemného

$a+bi$ součtem čtverců a^2+b^2 pochází od něho. Konečně dovršil uznání jakož i upotřebení těchto čísel *Riemann* (1851) svými duchaplnými badáními v oboru nauky o funkcích, kde proměnné jsou veličiny soujemné, takže nyní stala se čísla soujemná, kterým po tolik století se mathematikové takřka vyhýbali, zamilovaným předmětem nejdůmyslnějších badání, a byť i zde onde se někdo pronesl o jich nepochopitelnosti, žádný mathematik nepozastavuje se více nad nimi, jakož nečiní nikdo více u čísel negativních.

Jakmile s jedné strany vytknut význam a uznána platnost čísel skládajících se z dvou podstatně rozdílných částí, z reálné a a imaginární bi, kdež i značí novou jednotku ideální, jakmile se s druhé strany poznalo, jak se dá toto číslo znázorniti polohou bodu v rovině a jak prospěšně slouží v geometrii rovinné: bylo věcí zcela přirozenou, že se vyskytly snahy, aby se tento pojem zavedením nových jednotek ideálních s jedné strany zvšeobecnil, s druhé strany pak pro geometrii prostornou upravil. A v této snaze založen původ nauky o kvaternionech! [3])

Již *Argand*, o jehož zásluhách bylo právě stručně, co nutno, poznamenáno, snažil se podobně vyjádřiti polohu bodu v prostoru, jak se podařilo při bodu v rovině, ale nepřišel k cíli, což platí i o podobných snahách *Servoise;* připojením třetí sou-

---

[3]) Jak přirozená byla snaha přejíti od soujemných veličin rovinných k vyšším prostorovým, mohu z vlastní zkušenosti dosvědčiti. Nemaje ani zdání o kvaternionech Hamiltonových a prácech dřívějších, hleděl jsem při svých studiích na universitě vídeňské r. 1859 pomocí ideálních jednotek i a j zjednati si relaci skládající se z trojčlenného vzorce, která by rozpadnutím se ve tři rovnice poskytla tři základní vzorce sférické trigonometrie, tedy asi podobným spůsobem, jako se vyvine ze vzorců

$$e^{\alpha i} = \cos\alpha + i\sin\alpha\,,$$

$$e^{\beta i} = \cos\beta + i\sin\beta\,,$$

pouhým násobením a identifikováním

$$\begin{aligned} e^{(\alpha+\beta)i} &= \cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta) \\ &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\ &\quad + i(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta) \end{aligned}$$

dvé základních vzorců trigonometrie rovinné.

Co jsem hledal, nalezl jsem, avšak nyní nemám více v paměti spůsob, jak jsem provedl věc, na niž teď nekladu žádné váhy.

části k číslu soujemnému neb dvojspřežnému a zavedením nové jednotky ideální nebylo možná sestrojiti pro prostor analogon čísla soujemného pro rovinu. Taktéž málo plodnou ukázala se býti novota, kterou *Cauchy* v tomto oboru provedl svou symbolikou *klíčovou;* symbolické rovnice jako na př.

$$ai + bj + c = a_1 i + b_1 j + c_1$$

obsahují dva klíče (clefs) i a j, kterýmiž se rozkládá na rovnice tři a sice

$$a = a_1, \quad b = b_1, \quad c = c_1$$

a naopak.

Teprv *Hamilton* přišel po desítiletém namáhavém zkoušení r. 1843 na nový druh čísel, kteráž skládajíce se ze čtyr podstatně od sebe se lišících částí, obdržela od něho jmeno *kvaterniony*, jež bychom dobře vyjádřili slovem „čísla čtyrspřežná."

Sestavilť pomocí nových jednotek ideálných i, j, k číslo

$$\xi = x_0 + ix_1 + jx_2 + kx_3,$$

kdež značí x_0, x_1, x_2, x_3 čísla buď reálná neb soujemná, a nazval nové číslo v případě prvním kvaternion, v druhém pak bikvaternion.

Ba *Kirkmann* zvšeobecnil tento pojem nových čísel ideálních tak, že složiv z $2n$ částí rozličných pomocí ($2n$—1) ideální jednotky nové číslo

$$\alpha = a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + \ldots + a_{2n-1} i_{2n-1} = \sum_{k=0}^{2n-1} a_k i_k, \qquad (1)$$

kdež a_k značí číslo reálné, i_k jednotky ideálné vyjmouc $i_0 = 1$, obdržel čísla *mnohospřežná* neb *plusquaterniony,* z nichž pro $k > 3$ a $a_k = 0$ obdrží se

$$\alpha = a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3 \qquad (2)$$

co číslo čtyrspřežné neb kvaternion, pro $k > 1$ a $a_k = 0$ pak

$$\alpha = a_0 + a_1 i_1 \qquad (3)$$

co číslo dvojspřežné neb soujemné a pro $k > 0$ a $a_k = 0$ konečně

$$\alpha = a_0$$

co číslo jednospřežné neb reální.

Od té doby, co se Hamiltonovi podařilo pomocí lichého počtu nových ideálních jednotek sestaviti a pro upotřebení prostorné upraviti kvaterniony, pracoval neustále na zdokonalení této své nové nauky, aby ji nejen všestranně rozvinul, nýbrž i platnost jí zjednal při řešení úloh geometrických a mechanických. Jak snahy jeho byly skvěle odměněny, pozná se nejlépe z jeho spisu „Lectures on Quaternions“ r. 1853 v Dublíně vydaného jakož ze spisu „Elements of Quaternions“, jejž r. 1866 syn po jeho smrti v Londýne uveřejnil. Oba tyto spisy činí základ a dosud takřka jediný pramen této nauky, jelikož vše, co dosud o kvaternionech bylo sepsáno, zejmena *Allegrétovo* dílo „Essai sur le calcul des quaternions“ 1862 a *Hankelův* spis „Vorlesungen über die complexen Zahlen und ihre Funktionen“ 1867, kdež v VIII. a IX. oddílu obsažena nauka o těchto veličinách, čerpáno jest ze spisů Hamiltonových a jen co do formy učiněn jest nějaký pokrok zejména Hankelem, podlé něhož, ač s valnými změnami a doplňky, sestavena následující prostá nauka o kvaternionech.

Arithmetika kvaternionů.

§. 1.

Co jsou kvaterniony a jak se označují.

Jak v úvodu bylo již poznamenáno, jest kvaternion číslo skládající se ze čtyr podstatně se od sebe lišících částí, takže značí-li a_0, a_1, a_2, a_3 čísla reálná, i_1, i_2, i_3 ideální jednotky, o nichž platí

$$i_1^2 = i_2^2 = i_3^2 = -1, \quad i_1 i_2 = i_3, \tag{4}$$

jest číslo čtyrčlenné

$$\alpha = a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3 \tag{5}$$

kvaternionem.[4]) Každá z těchto čtyr částí má jiný ráz do sebe a představuje číslo, abychom tak řekli, jinak barvené, takže bychom pro porovnání říci mohli, a_0 představuje číslo, dejme tomu, bílé, $a_1 i_1$ číslo modré, $a_2 i_2$ číslo žluté a $a_3 i_3$ číslo červené, celý kvaternion tedy číslo strakaté. Z této rozličnosti plyne dále, že tu nemůže míti všeobecně platnost tak zvaný zákon kommutativnosti, jejž vyjadřuje vzorec

$$a \,.\, b = b \,.\, a$$

---

[4]) Jsou-li a_0, a_1, a_2, a_3 čísla soujemná tvaru $a + bi$, sluje α *bikvaternion.*

a že tudíž třeba na základě vzorců (4) ustanoviti, jak se mají ostatní součiny těchto ideálných jednotek.

K tomu cíli klaďme při násobení čitatele v každém zvláštním případě stejné na obou stranách a považme, že o stejných jednotkách již *a priori* platí kommutativnost, jelikož stejné za stejné vždy položiti dovoleno.

Z posledního vzorce (4) jde, znásobíme-li jej i_1 a i_2 na obou stranách, klademe-li první faktor napřed,

$$i_1 \,.\, i_1 i_2 = i_1 i_3 = i_1^2 \,.\, i_2 = - i_2$$

a druhý faktor na zad,

$$i_1 i_2 \,.\, i_2 = i_3 i_2 = i_1 \,.\, i_2^2 = - i_1 \,;$$

jest tudíž

$$i_1 i_3 = - i_2 \,,$$
$$i_3 i_2 = - i_1 \,,$$

a znásobíme-li na obou stranách

$$i_1 i_3^2 i_2 = - i_1 i_2 = i_2 i_1 = - i_3 \,; \text{ [5]}$$

podobně obdržíme ze vzorců

$$i_2 i_1 = - i_3 \,,$$
$$i_1 i_3 = - i_2 \,,$$

znásobíme-li v stejném pořádku na obou stranách,

$$i_2 i_1^2 i_3 = - i_2 i_3 = i_3 i_2 = - i_1 \,,$$

z čehož jde též

$$i_2 i_3 = i_1 \,;$$

taktéž obdržíme ze vzorců

$$i_3 i_2 = - i_1 \,,$$
$$i_2 i_1 = - i_3 \,,$$

znásobíme-li stejným spůsobem, jako prvé,

$$i_3 i_2^2 i_1 = - i_3 i_1 = i_1 i_3 = - i_2 \,,$$

z čehož jde též

$$i_3 i_1 = i_2 \,.$$

---

[5]) Zde vyskytuje se zřejmě ve vzorci

$$i_1 i_2 = - i_2 i_1 \,,$$

že o těchto jednotkách neplatí pravidlo záměnnosti činitelů, nýbrž že součin dvou změní své znamení, jakmile se postavení jich zamění. K znázornění tohoto alternujícího zjevu slouží dobře porovnání součinu s tkaninou; skládá-li se osnova z nití modrých (i_1), outek z nití žlutých (i_2), obdržíme určitou tkaninu ($i_1 i_2$); je-li však osnova žlutá (i_2) outek modrý (i_1), bude tkanina sice z prvků stejných, ale obráceně upotřebených ($- i_2 i_1$), čímž se vymění rub a líc.

Sestavíme-li tyto výsledky, obdržíme

$$\begin{array}{l|l} i_1 i_2 = i_3 & i_2 i_1 = -i_3 \\ i_2 i_3 = i_1 & i_3 i_2 = -i_1 \\ i_3 i_1 = i_2 & i_1 i_3 = -i_2 . \end{array} \tag{6}$$

Znásobíme-li tyto vzorce, jak po sobě jdou, jednotkami i_3, i_1, i_2, kladouce je u prvních nazad, u druhých napřed, obdržíme pomocí základních vzorců (4)

$$\begin{array}{l|l} i_1 i_2 i_3 = -1 & i_3 i_2 i_1 = 1 \\ i_2 i_3 i_1 = -1 & i_1 i_3 i_2 = 1 \\ i_3 i_1 i_2 = -1 & i_2 i_1 i_3 = 1. \end{array} \tag{7}$$

Všechny tyto vzorce, podlé nichž se nutno říditi při počítání s kvaterniony, možná zahrnouti schematem následujícím: Vepišme do kruhu směrem ručičky hodinové tyto tři ideální jednotky i_1, i_2, i_3, pak dá součin dvou, $\left\{\begin{matrix}\text{jdeme-li}\\ \text{nejdeme-li}\end{matrix}\right\}$ směrem ručičky, $\left\{\begin{matrix}\text{positivní}\\ \text{negativní}\end{matrix}\right\}$ třetí, součin tří v $\left\{\begin{matrix}\text{prvním}\\ \text{druhém}\end{matrix}\right\}$ případě $\left\{\begin{matrix}-1\\ +1\end{matrix}\right\}$; čtverec jednotlivých těchto jednotek dá pak -1, v čemž se podobají tyto ideální jednotky obyčejné jednotce imaginární.

Jak ze vzorce (5) patrno, skládá se kvaternion z části reálné a_0, již nazývá Hamilton *skalárem* neb *částí skalární*, a z části ideálné $a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3$, již nazývá taktéž z příčin geometrických *vektorem*, takže krátce jej označiti můžeme co soubor těchto dvou částí podstatně od sebe rozdílných; zavedeme-li k označení reálnosti symbol R, ideálnosti pak I, bude podlé toho

$$\alpha = R\alpha + I\alpha, \tag{8}$$

kdež tedy platí

$$R\alpha = a_0,$$
$$I\alpha = a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3.$$[6]

[6]) Při této příležitosti budiž poznamenáno, že sestaveny byly ještě jiného druhu čísla ideální; značí-li totiž i_k kořen binomické rovnice

$$x^n = 1,$$

a_k pak číslo reálné, sluje

$$\alpha = a_1 i_1 + a_2 i_2 + \ldots + a_n i_n$$

podlé *Gaussa* a *Dirichleta* číslem ideálným.

Zároveň tu patrno, že pro

$$a_2 = 0, \quad a_3 = 0$$

se kvaternion α promění v obyčejné číslo soujemné

$$\alpha = a_0 + a_1 i,$$

takže nauka o kvaternionech se v tomto zvláštním případě stane naukou o číslech soujemných.

Při tom nutno konečně poznamenati, že jako při obyčejných číslech soujemných i zde rozeznáváme kvaterniony *sdružené* (konjugované), při nichž část ideální má opačné označení; zavedeme-li pro označení tohoto pojmu vzájemnosti symbol K, bude tedy

$$K\alpha = R\alpha - I\alpha. \tag{9}$$

kvaternionem s α sdruženým.

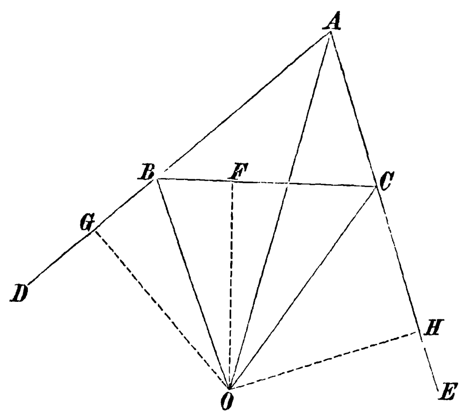
(Pokračování.)

Příspěvek k řešení ploských trojúhelníků.

Podal

P. **Julián Vervaet** v Bohosudově.

Obr. 8.



V libovolném trojúhelníku ABC (obr. 8.) buďte $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ tři strany, α, β, γ příslušné úhly, v_a, v_b, v_c příslušející výšky, $2s$ obvod, p ploský obsah, R poloměr kruhu opsaného, r vepsaného a r_a, r_b, r_c poloměry vnějších kruhů dotyčných, z nichžto se každý jedné ze tří stran a zároveň prodloužení dvou druhých dotýká.

1. Prodlouživše dvě strany trojúhelníka ku př. AB i AC, rozpolme úhly vnější DBC, ECB. S průsečného bodu O rozpolovacích přímek BO, CO spusťme kolmici OF na třetí stranu BC. Tato svislá jest poloměrem r_a vnějšího kruhu dotyčného, k straně a náležitého. Neb z $OFB \cong OGB$ a $CFO \cong CHO$ vyplývá $OF = OG = OH$.

Úhlopříčnou OA rozložíme čtyrúhelník $ABOC$ ve dva trojúhelníky ABO a ACO. Podstavy těch trojúhelníků jsou strany b i c; výšky jejich OG a OH jsou rovny r_a. I máme tudíž

$$ABOC = ABO + ACO = \frac{1}{2}(b+c)\,r_a\,.$$

Že ale též

$$ABOC = ABC + BOC = p + \frac{1}{2}\,ar_a\,,$$

protož jest

$$p + \frac{1}{2}\,ar_a = \frac{1}{2}(b+c)\,r_a\,.$$

Tuto rovnici dle r_a řešíce nabýváme

$$r_a = \frac{2p}{b+c-a} = \frac{p}{s-a}\,. \qquad (1)$$

Týmže činem aneb cyklickou záměnou dokážeš, že jest

$$r_b = \frac{2p}{c+a-b} = \frac{p}{s-b}\,. \qquad (2)$$

$$r_c = \frac{2p}{a+b-c} = \frac{p}{s-c}\,. \qquad (3)$$

Odtud věta: *Poloměr vnějšího kruhu dotyčného rovná se ploskému obsahu trojúhelníka dělenému nadbytkem polovičného obměru nad dotknutou stranu.* Žeť

$$r = \frac{2p}{a+b+c} = \frac{p}{s} \qquad (4)$$

$$R = \frac{abc}{4p} \qquad (5)$$

$$p^2 = s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c) \qquad (6)$$

toho důkazy hledej v obvyklých knihách učebných.

2. Sečtouce (1), (2), (3) a od utvořeného součtu odečtouce (4), obdržíme

$$r_a + r_b + r_c - r = p\left(\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s-b} + \frac{1}{s-c} - \frac{1}{s}\right) = \frac{abc}{p}$$

Vzorec (5) vydá však $\frac{abc}{p} = 4R$, i jest tedy

$$4R = r_a + r_b + r_c - r$$

$$R = \frac{1}{4}(r_a + r_b + r_c - r)\,. \qquad (7)$$

Odtud plyne věta: *Poloměr kruhu opsaného rovná se čtvrtině součtu poloměrů vnějších kruhů dotyčných zmenšeného o poloměr kruhu vepsaného.*

3. Utvoříme-li ze vzorců (1), (2), (3) převratné hodnoty, obdržíme sečtouce

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{(s-a) + (s-b) + (s-c)}{p} = \frac{s}{p}\,.$$

Z rovnice (4) jde však

$$\frac{s}{p} = \frac{1}{r}\,;$$

pročež máme

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}\,. \qquad (8)$$

Odkudž věta: *Převratný poloměr kruhu vepsaného rovná se součtů převratných poloměrů vnějších kruhů dotyčných.*

4. Sečtouce rovnice (2) a (3) nabudeme

$$r_b + r_c = p\left(\frac{1}{s-b} + \frac{1}{s-c}\right) = \frac{ap}{(s-b)(s-c)}\,,$$

a odečteme-li (4) od (1), objeví se

$$r_a - r = p\left(\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s}\right) = \frac{ap}{s\,(s-a)}\,.$$

Násobíme-li tyto dvě rovnice a přihlížíme-li pak ke vzorci (6), vyjde

$$(r_b + r_c)(r_a - r) = \frac{a^2p^2}{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)} = a^2\,.$$

I jest tudíž

$$a = \sqrt{(r_b + r_c)\,(r_a - r)} \qquad (9)$$

Podobně se obdrží cyklickou záměnou

$$b = \sqrt{(r_c + r_a)(r_b - r)} \tag{10}$$

$$c = \sqrt{(r_a + r_b)(r_c - r)} \tag{11}$$

Z toho vážíme větu: *Každá strana trojúhelníka rovná se čtvercovému kořeni ze součinu, jejž obdržíme, znásobíme-li součet nepříslušných poloměrů z vnějších kruhů dotyčných s nadbytkem příslušného nad poloměr kruhu vepsaného.*

Důsledek. Ze všech kruhů trojúhelníka se dotýkajících jest vepsaný nejmenší, maje nejmenší poloměr.

5. Násobením rovnic (1), (2), (3), a (4) vyplývá

$$r\, r_a\, r_b\, r_c = \frac{p^4}{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \frac{p^4}{p^2} = p^2,$$

pročež

$$p = \sqrt{r\, r_a\, r_b\, r_c}, \tag{12}$$

to jest *ploský obsah trojúhelníka rovná se čtvercovému kořenu ze součinu poloměrů čtyr kruhů dotyčných.*

6. Známy jsou vzorce

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{s(s-a)}{bc}. \tag{13}$$

$$p = \frac{1}{2} bc \sin \alpha = bc \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}. \tag{14}$$

Majíce již zřetel k rovnici (4) nabýváme z (14)

$$bc = \frac{p}{\sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{rs}{\sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}.$$

Dosazením této poslední hodnoty do (13) vyplyne

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{r}(s-a) \sin \frac{\alpha}{2},$$

pročež

$$r = (s-a)\, tg \frac{\alpha}{2}. \tag{15}$$

Taktéž obdrží se dále

$$r = (s-b)\, tg \frac{\beta}{2}, \tag{16}$$

$$r = (s-c)\, tg \frac{\gamma}{2}. \tag{17}$$

Poučka v těch třech vzorcích obsažená zní: Poloměr kruhu vepsaného jest roveň nadbytku polovičky obvodové nad jednu stranu znásobenému tangentou polovičného úhlu proti té straně ležícího. Pomocí těchto rovnic lze určiti úhly trojúhelníkův.

7. Rovnice (15), (16) a (17) poskytují mimo to

$$s-a=r\cot\frac{\alpha}{2},\quad s-b=r\cot\frac{\beta}{2},\quad s-c=r\cot\frac{\gamma}{2}.$$

Ježto ale též $p=rs$, vynikne dosazením těchto hodnot do rovnic (1), (2), (3)

$$r_a=s\,tg\frac{\alpha}{2},\quad r_b=s\,tg\frac{\beta}{2},\quad r_c=s\,tg\frac{\gamma}{2}. \tag{18}$$

Z toho jde úměra:

$$r_a:r_b:r_c=tg\frac{\alpha}{2}:tg\frac{\beta}{2}:tg\frac{\gamma}{2},$$

to jest *poloměry vnějších kruhů dotyčných mají se k sobě jako tangenty polovičných úhlů trojúhelníkových.*

8. Násobíce rovnice (18) nabýváme

$$r_a r_b r_c=s^3\,tg\frac{\alpha}{2}\,tg\frac{\beta}{2}\,tg\frac{\gamma}{2}.$$

Ježto pak dle (12) a (4) $r_a r_b r_c=s^2 r$, jest

$$s^2 r=s^3\,tg\frac{\alpha}{2}\,tg\frac{\beta}{2}\,tg\frac{\gamma}{2},$$

pročež

$$r=s\;tg\frac{\alpha}{2}\,tg\frac{\beta}{2}\,tg\frac{\gamma}{2}, \tag{19}$$

$$s=r\cot\frac{\alpha}{2}\cot\frac{\beta}{2}\cot\frac{\gamma}{2}. \tag{20}$$

Pro ploský obsah $p=rs$ nabýváme tudy dvou následujících vzorců

$$p=r^2\cot\frac{\alpha}{2}\cot\frac{\beta}{2}\cot\frac{\gamma}{2}=s^2\,tg\frac{\alpha}{2}\,tg\frac{\beta}{2}\,tg\frac{\gamma}{2}, \tag{21}$$

čili: *Ploský obsah trojúhelníka rovná se čtverci poloměru kruhu vepsaného, vedenému do součinu cotangent polovičných úhlů trojúhelníkových.*

Ploský obsah trojúhelníka rovná se čtverci polovičného obměru vedenému do součinu tangent polovičných úhlů trojúhelníkových.

9. Z (21) vyvádíme

$$\frac{p}{tg\,\frac{\alpha}{2}} = s^2\, tg\,\frac{\beta}{2}\, tang\,\frac{\gamma}{2}$$

a z (18)

$$r_b\, r_c = s^2\, tg\,\frac{\beta}{2}\, tang\,\frac{\gamma}{2}\,.$$

I jest tedy

$$\frac{p}{tg\,\frac{\alpha}{2}} = r_b\, r_c\,,$$

pročež

$$p = r_b\, r_c\, tg\,\frac{\alpha}{2}\,. \tag{22}$$

Takž i

$$p = r_c\, r_a\, tg\,\frac{\beta}{2} = r_a\, r_b\, tg\,\frac{\gamma}{2}\,.$$

Z čehož věta: *Ploský obsah trojúhelníka rovná se součinu poloměrů dvou vnějších kruhů dotyčných znásobenému tangentou polovičného úhlu, jejž svírají dotknuté strany.*

10. Dosadíce výše nalezené hodnoty

$$s - a = r\cot\frac{\alpha}{2}\,, \quad s - b = r\cot\frac{\beta}{2}\,, \quad s - c = r\cot\frac{\gamma}{2}$$

do rovnic (1), (2), (3), obdržíme

$$r_a = \frac{p}{r\cot\frac{\alpha}{2}}\,, \quad r_b = \frac{p}{r\cot\frac{\beta}{2}}\,, \quad r_c = \frac{p}{r\cot\frac{\gamma}{2}}\,.$$

Odtud vážíme poznovu tři vzorce pro ploský obsah, totiž

$$p = r\, r_a\cot\frac{\alpha}{2} = r\, r_b\cot\frac{\beta}{2} = r\, r_c\cot\frac{\gamma}{2} \tag{23}$$

čili: *Ploský obsah trojúhelníka jest roveň poloměru kruhu vepsaného znásobenému součinem z poloměru vnějšího kruhu dotyčného a cotangentou polovičného úhlu protějšího.*

11. Postav v rovnici (5)

$$p = \frac{1}{2}\, ab\sin\gamma = \frac{1}{2}\, ac\sin\beta\,;$$

tehdy jest

$$R = \frac{c}{2\sin\gamma} = \frac{b}{2\sin\beta}\,,$$

pročež

$$b = 2R\sin\beta\,, \quad c = 2R\sin\gamma\,, \quad bc = 4R^2\sin\beta\sin\gamma\,.$$

Tato hodnota, byvši do (14) dosazena, vydá

$$p = 2R^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma\,, \qquad (24)$$

to jest: *ploský obsah trojúhelníka rovná se dvojnásobnému čtverci z poloměru kruhu opsaného vedenému do součinu sinusů všech tří úhlů.*

12. Vypočtěme nyní součet i součin stran v trojúhelníku ze známých rovnic

$$2p = av_a = bv_b = cv_c\,,$$

z nichž nejprv vyvádíme

$$a + b + c = 2p\left(\frac{1}{v_a} + \frac{1}{v_b} + \frac{1}{v_c}\right)$$

a dosadíme-li tu hodnotu do (4),

$$\frac{1}{r} = \frac{a+b+c}{2p} = \frac{1}{v_a} + \frac{1}{v_b} + \frac{1}{v_c}\,, \qquad (25)$$

to jest: *převratný poloměr kruhu vepsaného jest roveň součtu převratných výšek.*

Podobně vyvozujeme:

$$abc = \frac{8p^3}{v_a v_b v_c}\,,$$

a dosadíme-li tu hodnotu do (5),

$$R = \frac{8p^3}{4p\, v_a v_b v_c} = \frac{2p^2}{v_a v_b v_c}\,.$$

Z toho jde

$$p = \sqrt{\frac{1}{2} R\, v_a v_b v_c} = \frac{1}{2}\sqrt{2R\, v_a v_b v_c}\,. \qquad (26)$$

To nám podává větu: *Ploský obsah trojúhelníka rovná se polovičnému čtvercovému kořeni ze součinu tří výšek s průměrem kruhu opsaného.*

Porovnáním vzorce (8) s (25) vznikne

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{v_a} + \frac{1}{v_b} + \frac{1}{v_c}\,. \qquad (27)$$

Součet převratných poloměrů z vnějších kruhů dotyčných rovná se součtu převratných výšek.

13. Jak povědomo jest v každém trojúhelníku:

$$a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma\,.$$

I máme tudíž

$$\frac{a+b+c}{a} = \frac{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma}{\sin\alpha}$$

neboli za příčinou, že jest

$$a + b + c = 2s\,,\quad \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$$

a

$$\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\,,$$

jest

$$\frac{s}{a} = \frac{\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}\,.$$

Z toho jde

$$s = \frac{a\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}\,.$$

Taktéž najdeš pouhou cyklickou záměnou

$$s = \frac{b\cos\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}} = \frac{c\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}}\,. \qquad (28)$$

Odtud plyne věta: *V každém trojúhelníku rovná se polovina obměru jedné straně vedené do součinu cosinusů polovičných úhlů přílehlých a dělené sinusem polovičného úhlu protějšího.*

Dosadíce hodnoty veličiny s do (19) a (18), nabudeme upravíce

$$r = \frac{a\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{b\sin\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}} = \frac{c\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}}\,, \qquad (29)$$

$$r_a = \frac{a\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}\,,\; r_b = \frac{b\cos\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}}\,,\; r_c = \frac{c\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}}\,, \qquad (30)$$

to jest poloměry čtyr kruhů dotyčných lze vyznačiti stranami a úhly trojúhelníka.

14. V trojúhelníku jsou výšky v převráceném poměru stran. Jest totiž

$$v_a : v_b = \sin\beta : \sin\alpha\,,$$
$$v_b : v_c = \sin\gamma : \sin\beta\,,$$
$$v_c : v_a = \sin\alpha : \sin\gamma\,,$$

Z toho jde

$$\frac{1}{v_b} = \frac{1}{v_a} \cdot \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}, \quad \frac{1}{v_c} = \frac{1}{v_a} \cdot \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha},$$

pročež

$$\frac{1}{v_a} + \frac{1}{v_b} + \frac{1}{v_c} = \frac{1}{v_a} \cdot \frac{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma}{\sin\alpha} = \frac{1}{v_a} \cdot \frac{2\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

Dosadíce tuto hodnotu do (25), nabudeme

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{v_a} \cdot \frac{2\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}},$$

tedy

$$r = \frac{v_a \sin\frac{\alpha}{2}}{2\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}. \tag{31}$$

Rovněž i

$$r = \frac{v_a \sin\frac{\beta}{2}}{2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\gamma}{2}} = \frac{v_c \sin\frac{\gamma}{2}}{2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}}.$$

Dělíme-li pak rovnici (19) rovnicemi (18), nabýváme

$$r = r_a\, tg\frac{\beta}{2}\, tg\frac{\gamma}{2} = r_b\, tg\frac{\alpha}{2}\, tg\frac{\gamma}{2} = r_c\, tg\frac{\alpha}{2}\, tg\frac{\beta}{2},$$

aneb dosadíme-li za r hořejší hodnoty (31), obdržíme posloupně dle $r_b\, r_b\, r_c$ řešíce

$$r_a = \frac{v_a \sin\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}, \quad r_b = \frac{v_b \sin\frac{\beta}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}, \quad r_c = \frac{v_c \sin\frac{\gamma}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}.$$

Poloměry tří kruhů dotyčných jest trojúhelník dokonale určen. Za příklad vypočítej čtenář trojúhelník, pro který jest $r_a = 70$, $r_b = 55$, $r_c = 66$.

15. Ku posledu znamenejme ještě poloměry čtyr kruhů dotyčných výškami trojúhelníka.

Z rovnic $2p = av_a = bv_b = cv_c$ vyvozujeme

$$a = \frac{cv_c}{v_a}, \quad b = \frac{cv_c}{v_b}.$$

I jest tudy

$$a + b + c = 2s = \left(1 + \frac{v_c}{v_a} + \frac{v_c}{v_b}\right) c,$$

$$2s = \left(\frac{v_a v_b + v_b v_c + v_a v_c}{v_a v_b}\right) c.$$

Ježto pak

$$r = \frac{2p}{a + b + c} = \frac{cv_c}{2s},$$

jest

$$r = \frac{v_a v_b v_c}{v_a v_b + v_a v_c - v_b v_c}. \tag{33}$$

Dále jest

$$2(s-a) = \left(\frac{v_a v_b + v_a v_c - v_b v_c}{v_a v_b}\right) c,$$

$$2(s-b) = \left(\frac{v_a v_b + v_b v_c - v_a v_c}{v_a v_b}\right) c,$$

$$2(s-c) = \left(\frac{v_a v_c + v_b v_c - v_a v_b}{v_a v_b}\right) c.$$

I obdržíme tedy

$$r_a = \frac{2p}{2(s-a)} = \frac{c\,v_c}{2(s-a)} = \frac{v_a v_b v_c}{v_a v_b + v_a v_c - v_b v_e} \tag{34}$$

$$r_b = \frac{2p}{2(s-b)} = \frac{c\,v_c}{2(s-b)} = \frac{v_a v_b v_c}{v_a v_b + v_b v_c - v_a v_c} \tag{35}$$

$$r_c = \frac{2p}{2(s-c)} = \frac{c\,v_e}{2(s-c)} = \frac{v_a v_b v_c}{v_a v_c + v_b v_c - v_a v_b} \tag{36}$$

Ku cvičení vypočítej čtenář tímto návodem trojúhelník, v němž $v_a = 11\frac{1}{5}$, $v_b = 12\frac{12}{13}$, $v_c = 12$.

Dodavek. Úloha: vypočítati trojúhelník, dány-li jsou dvě výšky $v_a v_b$ a poloměr R kruhu opsaného, možno řešiti tím, že se vzorce (33), (34), (35), (36) do rovnice (7) dosadí a třetí výška v_c vyhledá. Povnice odtud vzniknoucí jest ale čtvrtého stupně. Zná-li čtenář jednodušší řešení této úlohy, nechť ji u veřejnost uvede v těchto listech.