Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Karel Zahradník

Geometrie kruhu. [II.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 5 (1876), No. 2, 67--77

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/121226`

Geometrie kruhu.

Pro žáky středních škol sestavil

Dr. Karel Zahradník.

(Pokračování.)

X. Pol a polára.

16. V článku 9. jsou (1) a (2) rovnice tečen bodu $(x_1 y_1)$ na kruhu, udávajíce nám vztah mezi souřadnicemi proměnného bodu na tečně a jejím bodem styku. Předpokládejme nyní, že (xy) nejsou souřadnice proměnlivého, nýbrž pevného bodu na tečně a co také označme je $x'y'$; a podobně pišme x, y místo x_1, y_1 za souřadnice nyní neznámého bodu styku; tu značiti budou rovnice (1) a (2) čl. 9. relaci mezi souřadnicemi bodů styku tečen vedených z pevného bodu $x'y'$ ku kruhu, t. j. rovnici přímky spojující oba body styku. Tuto přímku nazýváme *polárou* bodu $x'y'$ a bod tento sám *polem*.

17. Volme nyní jinou cestu, kteráž nás povede k nejhlavnější vlastnosti poláry. Rovnice kruhu budiž tvaru

$$x^2 + y^2 = r^2 \tag{1}$$

a $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ dva body (obr. 7.) v rovině kruhu.

I položme si otázku: V jakém poměru seče kruh danou délku AB? Za tou příčinou stanovme si na délce AB nějaký bod C. Poměr, ve kterém bod C dělí délku danou AB, budiž λ, tedy

$$\lambda = \frac{AC}{BC}, \tag{2}$$

následkem toho budou souřadnice [1]) bodu C

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{x_1 - \lambda x_2}{1 - \lambda} \\ y &= \frac{y_1 - \lambda y_2}{1 - \lambda}. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Leží-li bod C na kruhu, musí souřadnice jeho rovnici kruhu vyhověti, což nám dá

$$(x_1 - \lambda x_2)^2 + (y_1 - \lambda y_2)^2 - r^2 (1 - \lambda)^2 = 0,$$

[1]) Zahradník: „O symbolech analytické geometrie". Časop. III. d. pg. 95.

aneb spořádáme-li rovnici tuto dle mocnosti λ

$$\lambda^2(x_2{}^2+y_2{}^2-r^2)-2\lambda(x_1x_2+y_1y_2-r^2)+(x_1{}^2+y_1{}^2-r^2)=0. \quad (4)$$

Rovnice tato určuje nám hodnoty poměrů λ, v jakých kruh O seče (obr. 5.) délku AB.

18. Je-li přímka AB tečnou kruhu, tu rovnají se oba poměry, neb body C, D' splynou. Musí tudíž rovnice (4) míti v tomto případě dva stejné kořeny, t. j. musí býti

$$(x_1x_2+y_1y_2-r^2)^2-(x_1+y_1{}^2-r^2)(x_2{}^2+y_2{}^2-r^2)=0\,.$$

Uvážíme-li v této rovnici x_2, y_2 za proměnné a x_1, y_1 za pevné, podá nám

$$(x^2+y^2-r^2)(x_1{}^2+y_1{}^2-r)-(xx_1+yy_1-r)^2=0 \quad (5)$$

vztah mezi souřadnicemi libovolného bodu (xy) tečen vedených z bodu A ku kruhu. Značí tudíž rovnice (5) rovnici tečen, vedených z bodu $(x_1\,y_1)$ ku kruhu.

Kdyby však rovnice (4) měla oba kořeny λ_1, λ_2 stejné sice co do velikosti, avšak znaménka opačného, tedy

$$\lambda_1+\lambda_2=0, \quad (6)$$

bude dle rovnice (2)

$$\frac{AC}{BC}+\frac{AD}{BD}=0, \quad (7)$$

aneb dělením

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2}=-1, \quad (8)$$

tedy

$$\frac{AC}{BC}:\frac{AD}{BD}=-1, \quad (8)$$

což jak známo zkrátka

$$(ABCD)=-1$$

píšeme.

I vysvítá, že tu body A, B, C, D tvoří harmonickou čtveřinu aneb že body C, D rozdělují délku AB harmonicky. [2])

Avšak rovnice (4) má takové dva kořeny, když

$$x_1x_2+y_1y_2-r^2=0$$

a uvážíme-li $(x_2\,y_2)$ za proměnné, obdržíme

$$x_1x+y_1y-r^2=0. \quad (9)$$

---

[2]) Weyr: Základové vyšší geometrie (I. díl pg. 21. Živa) a „O symbolech anal. geometrie". Časop. math. díl III. pag. 153.

Rovnice (9) jest tudíž místem bodu B harmonicky sdružených k bodu A vzhledem k oněm dvěma bodům, v nichž přímka AB kruh protíná.

Připomeneme-li si článek 16., shledáme, že zmíněné místo bodu B, vyjádřené rovnicí (9), jest přímkou spojující body styku tečen vedených z bodu $(x_1 y_1)$ ku kruhu, tedy *polárou* bodu $(x_1 y_1)$.

19. Rovnicím (7) neb (9) článku předcházejícího můžeme uděliti též tvar

$$\frac{1}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD}, \tag{1}$$

neb vyjdeme-li od rovnice (7) totiž

$$\frac{AC}{BC} + \frac{AD}{BD} = 0, \tag{2}$$

tu můžeme členy BC a BD vyloučiti pomocí rovnic

$$BC = BA + AC$$
$$BD = BA + AD.$$

Dosadíme-li hodnoty tyto do rovnice (2), bude

$$AC(BA + AD) + AD(BA + AC) = 0,$$

z čehož

$$BA = -\frac{2AC \, . \, AD}{AC + AD}$$

a uvážíme-li, že $BA = -AB$, obdržíme

$$\frac{2}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD} \tag{3}$$

jak již svrchu uvedeno.[3])

Vraťme se nyní opět k rovnici (4) článku 12., totiž

$$s^2 + 2s[(x_1 - a)\cos\alpha + (y_1 - b)\sin\alpha] + t^2 = 0, \tag{4}$$

i porovnejme obrazec (6) s obrazcem (9) co označení.

Z rovnice (4) plyne

$$\frac{1}{s^2} + 2\frac{(x_1 - a)\cos\alpha + (y_1 - b)\sin\alpha}{t^2} \, . \, \frac{1}{s} + 1 = 0, \tag{5}$$

tudíž dle známé souvislosti kořenů rovnice s jejími koefficienty

$$\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} = -2\frac{(x_1 - a)\cos\alpha + (y_1 - b)\sin\alpha}{t^2}. \tag{4}$$

[3]) Ostatně jest tato proměna podána ve: Weyr: Základové vyšší geometrie. Živa pg. 11 a od téhož: Zpráva I. pg. 5.

Jest pak $s_1 = AC$, $s_2 = AD$ a volíme-li na této sečně bod B, jenž by s bodem A harmonicky sdružen byl bodům C, D, bude, položíme-li $AB = s$ dle (3)

$$\frac{2}{s} = \frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2},$$

a vzhledem k rovnici (4)

$$(x_1 - a)\, s \cos\alpha + (y_1 - b)\, s \sin\alpha + t^2 = 0. \qquad (5)$$

Zavedeme-li za $s \cos\alpha$ a $s \sin\alpha$ hodnoty (2) z čl. 12., obdržíme

$$(x_1 - a)(x - x_1) + (y_1 - b)(y - y_1) + t^2 = 0. \qquad (6)$$

Rovnice (6) jest na směru sečny nezávislá, podává nám tudíž místo všech bodů, jejichž vzdálenost od bodu A kruhem harmonicky jest dělena, a z rovnice vysvítá, že místo toto jest přímka, jak jsme již dvakráte svrchu shledali. Provedeme-li násobení v rovnici (6), a zavedeme-li za t^2 známou hodnotu, obdržíme

$$xx_1 + yy_1 - a(x + x_1) - b(y + y_1) + c^2 = 0 \qquad (7)$$

co hledaný tvar rovnice poláry.

Za $a = 0$, $b = 0$, přejde patrně (7) v rovnici (9) čl. 18. Leží-li bod $A\,(x_1\, y_1)$ na kruhu, přejde polára bodu A, v tečnu bodu A, což jak z rovnice poláry, tak i z jejího odvození vysvítá.

XI. Sestrojení poláry.

20. Sestrojení poláry vysvítá z výměru jejího buď co přímky spojující body styku tečen z bodu A ke kruhu vedených, aneb co místa bodů harmonicky sdružených k bodu A vzhledem ke kruhu.

Prvé sestrojení plyne z následující úvahy. Předpokládejme střed kruhu O za počátek souřadnic, tu bude rovnice přímky $\overline{OA}$

$$yx_1 - xy_1 = 0. \qquad (1)$$

a porovnáme-li rovnici tuto s rovnicí poláry bodu A, totiž

$$xx_1 + yy_1 = r^2,$$

shledáme, že OA kolmo stojí na poláře.

Jest pak (obr. 9.)

$$OA' = \frac{r^2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}$$

$$OA = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}\,,$$

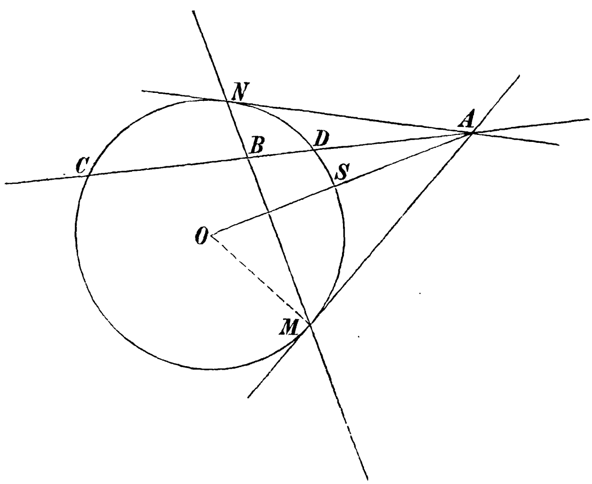
tedy

$$OA \,.\, OA' = r^2\,. \qquad (2)$$

Z této rovnice plyne:

Leží-li bod A mimo kruh, tu seče jeho polára kruh (obr. 7.) neb je-li $OA' > r$, musí $OA < r$ býti. Leží-li však A uvnitř kruhu, tu polára kruh neprotíná; neb je-li $OA' < r$, musí $OA > r$ dle rovnice (2) býti.

Obr. 9.

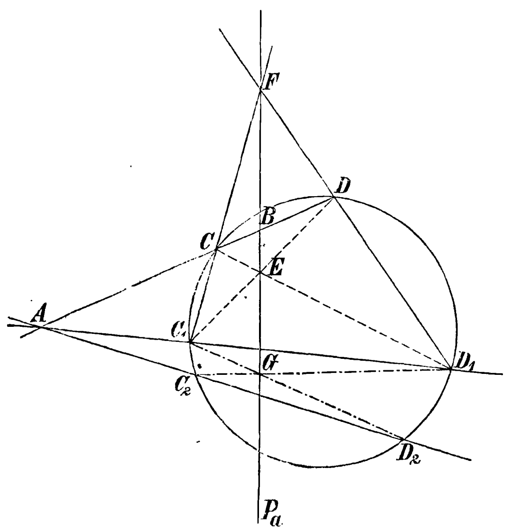


Ostatně plyne rovnice (2) již z pravoúhlého trojúhelníka OMA, a sestrojení tudíž bude toto: Spojíme střed kruhu O s bodem A, rozpůlíme délku $\overline{OA}$ v bodě S a opíšeme poloměrem $\frac{1}{2}\overline{OA}$ z bodu S kruh, jenž protne daný kruh ve dvou bodech M, N, spojující přímka $\overline{MN}$ jest hledaná polára bodu A. Druhé sestrojení lze provésti na základě druhého výměru poláry pomocí pouhého pravídka. Vedeme aspoň dvě sečny $\overline{DD_1}$ a $\overline{CC_1}$, obdržíme takto úplný čtyrúhelník.[4]) Veďme $\overline{C_1D}$ a $\overline{CD_1}$, průsek jejich bude E a průsek přímek $\overline{CC_1}$ a $\overline{DD_1}$ budiž F, tu je FE polárou bodu A (obr. 10.)

[4]) Viz „Harmonické vlastnosti čtyřúhelníka“ ve článku: „O symbolech analytické geometrie“. Časopis II. díl, pg. 276.

Kdybychom tětivu C_1D_1 vedli nekonečně blízko tětivě CD, tu by byly body C, C_1 a D, D_1 sousednými na kruhu a splynuly by, a přímky $\overline{CC_1}$, $\overline{DD_1}$ byly by tečnami kruhu v bodech C a D. Tečny tyto protínají se dle uvedeného na poláře bodu A a jelikož jsme tětivu CD libovolně vedli, soudíme, že tečny sestrojené v bodech průsečných přímky, bodem A procházející, s kruhem, protínají se na poláře bodu A.

Obr. 10.



Druhé sestrojení je sice velmi jednoduché, mnohému však bude se zdáti následující sestrojení ještě snadnějším, ač v podstatě se svrchu uvedeným se shoduje.

Vedeme bodem A libovolnou sečnu, ta protíná kruh v bodech C, D; sestrojme čtvrtý harmonický bod B k bodu ACD a tu bude

$$(CD\,AB) = -1,$$

neb bod ten musí dle výměru na poláře ležeti. Potom spusťme z bodu B kolmici na AO a kolmice tato bude hledanou polárou. Že si můžeme při sestrojení rozličným spůsobem počínati, vysvítá již z několika uvedených spůsobů.

Je-li bod A úběžným, prochází jeho polára středem kruhu, a naopak polára středu kruhu jest přímkou úběžnou, což již z výměru a sestrojení vysvítá.

XII. Další vlastnosti poláry.

21. Budiž dán kruh rovnicí středovou a bod A souřadnicemi x_1, y_1, tu zní, jak známo, rovnice poláry bodu A:

$$x x_1 + y y_1 = r^2. \tag{1}$$

Volme na poláře bod $B(x_2, y_2)$, tu musí souřadnice tohoto bodu rovnici poláry vyhověti. Máme tedy

$$x_2 x_1 + y_2 y_1 = r^2. \tag{2}$$

Polára bodu B jest

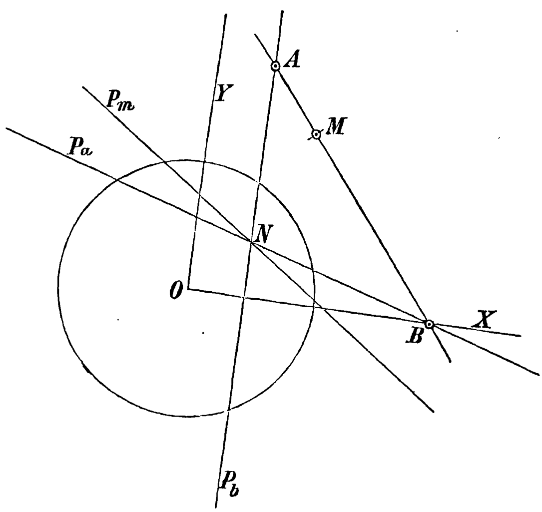
$$x x_2 + y y_2 = r^2, \tag{3}$$

tu porovnáme-li rovnici poláry bodu B s rovnicí (2), shledáme, že prochází tato bodem $(x_1\, y_1)$ t. j. bodem A, což nám podává větu:

„*Prochází-li polára bodu A bodem B, prochází polára bodu B bodem A.*

Body A, B takové vlastnosti nazýváme harmonickými póly.

Obr. 11.



22. Pro stručnost dovolíme si následující označení. Poláru bodu ku př. A označíme P_a a rovnice poláry bodu A bude $P_a = 0$. Kdyby dán byl bod M na přímce AB (obr. 11.) souřadnicemi svými, totiž

$$x = \frac{x_1 - \lambda x_2}{1 - \lambda}$$

$$y = \frac{y_1 - \lambda y_2}{1 - \lambda},$$

tu patrně každé hodnotě za λ určitý bod M na přímce AB přísluší a tak označíme poláru bodu M, jenž jest dán parametrem λ, zkrátka $P\lambda$, a rovnici polary $P\lambda = 0$.

Volme si nyní na přímce AB více bodů, ku př. bod M, jehož souřadnice pak jsou:

$$x^1 = \frac{x_1 - \lambda x_2}{1 - \lambda}$$

$$y^1 = \frac{y_1 - \lambda y_2}{1 - \lambda} \qquad (4)$$

a rovnice $P\lambda$ bude

$$x \frac{x_1 - \lambda x_2}{1 - \lambda} + y \frac{y_1 - \lambda y_2}{1 - \lambda} = r^2, \qquad (5)$$

aneb po krátké redukci

$$x x_1 + y y_1 - r^2 - \lambda (x x_2 + y y_2 - r^2) = 0. \qquad (6)$$

Rovnici tuto však můžeme dle udaného označení psáti

$$P_a - \lambda P_b = 0. \qquad (7)$$

Porovnáme-li nyní rovnici (4) a rovnici (7), shledáme, že

Každému bodu M na přímce $\overline{AB}$ odpovídá určitá polára procházející průsekem polár P_a, P_b a pohybuje-li se bod M na přímce $\overline{AB}$, otáčí se polára jeho kolem bodu $(P_a P_b)$, průseku to polár P_a, P_b, jenž jest pólem přímky $\overline{AB}$.

Můžeme tuto větu též obrátiti a tu obdržíme:

Otáčí-li se přímka kolem pevného bodu, popisuje pól její přímku, poláru to onoho pevného bodu.

Na základě těchto vět můžeme snadno sestrojiti pól dané přímky: volíme na ní dva body, a průsek polár těchto bodů bude polára přímky.

Z rovnice (4) a (7) mimo to vysvítá, že dvojpoměr čtyř bodů na přímce AB rovná se dvojpoměru jejich tečen a že řada bodová (4), jejíž spojnicí jest AB, nachází se ve stavu involutorním se svazkem polár (7).

23. Dány buďtež dva body $A(x_1, y_1)$ a $B(x_2, y_2)$. Spusťme z bodu B $\perp$ na P_a, a z bodu A $\perp$ na P_b. Označíme-li paty kolmic B_1, A_1, bude

$$BB_1 = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 - r^2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} \quad AO = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$$

$$AA_1 = \frac{x_2 x_1 + y_2 y_1 - r^2}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2}} \quad BO = \sqrt{x_2^2 + y_2^2}\,,$$

tedy

$$BB_1 \,.\, AO = AA_1 \,.\, BO$$

aneb

$$\frac{AO}{BO} = \frac{AA_1}{BB_1}\,,$$

to jest: *Poměr vzdálenosti dvou bodů od středu kruhu rovná se poměru vzdálenosti těchto bodů od jich nestejnojmenných polár.*

XIII. Sdružený trojúhelník.

24. Dán-li trojúhelník ABC, odpovídá jemu vzhledem ke kruhu nový trojúhelník $A'B'C'$, jenž má tu vlastnost, že vrchol A' polem jest strany BC atd. Trojúhelník $A'B'C'$ jmenujeme sdruženým trojúhelníku ABC. Takové dva trojúhelníky mají tu vlastnost (obr. 12.), že spojivé přímky $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$ probíhají týmž bodem.

Rovnice poláry bodu $B(x_2, y_2)$ budiž $P_2 = 0$, bodu $C(x_3, y_3)$ $P_3 = 0$, tu bude rovnice polu A'

$$P_2 - \lambda\, P_3 = 0\,. \tag{1}$$

Souřadnice polu A' plynou sice řešením rovnic $P_2 = 0$, $P_3 = 0$, avšak pohodlnější jest nám tvar (1).

Rovnice (1) vyjadřuje mimo to přímku probíhající průsekem přímek P_2 a P_3, tedy bodem A'. Stanovme si λ tak, aby přímka tato procházela též bodem A. Souřadnice bodu A musí tudíž rovnici (1) vyhověti, a tak obdržíme

$$P_{1,2} - \lambda\, P_{1,3} = 0\,,$$

z čehož

$$\lambda = \frac{P_{1,2}}{P_{1,3}} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 - r^2}{x_1 x_3 + y_1 y_3 - r^2}\,. \tag{2}$$

Zavedeme-li hodnotu tuto za λ do rovnice (2), obdržíme rovnici přímky

$$AA_1 \ldots . P_2\, P_{1,3} - P_3\, P_{1,2} = 0$$

podobně obdržíme

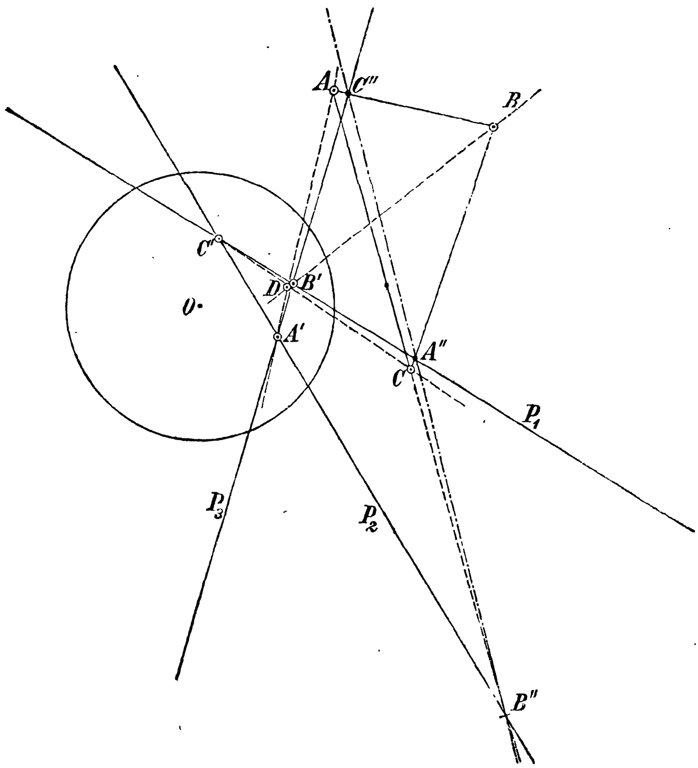
[5]) Viz „O symbolech analytické geometrie“. Časop. II. díl, pg. 175.

$$\overline{BB_1} \ldots . P_4 P_{1,2} - P_1 P_{2,3} = 0$$

$$\overline{CC_1} \ldots . P_3 P_{2,3} - P_2 P_{1,3} = 0$$

Součet těchto tří rovnic rovná se identicky nulle, tudíž protínají se přímky $\overline{AA_1}$, $\overline{BB_1}$, $\overline{CC_1}$ v jediném bodě.

Obr. 12.



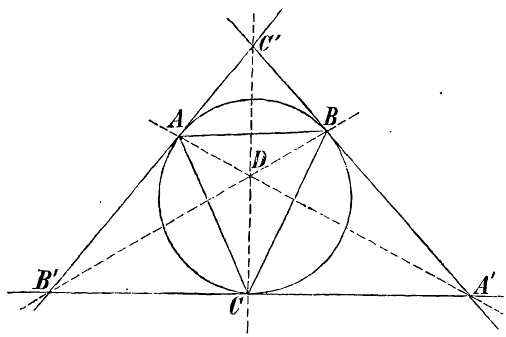
Takové dva trojúhelníky jsou perspektivné, tudíž platí o nich též následující věta:

Příslušné strany dvou, vzhledem ke kruhu sdružnných trojúhelníků protínají se v bodech téže přímky.

Je-li trojúhelník ABC v daný kruh vepsaný (obr. 13.), bude $A'B'C'$ trojúhelník témuž kruhu opsaný a sice budou strany tohoto trojúhelníka tečnami vrcholů A, B, C. V případě tomto přejde svrchu uvedená věta v následující:

Přímky, které v trojúhelníku $A' B' C'$ kruhu opsanému vrchole s body styku protilehlých stran spojují, probíhají jedním bodem.[6])

Obr. 13.



Je-li v trojúhelníku ABC každá strana polárou protilehlého svého vrchole vzhledem k danému kruhu, tu splyne trojúhelník ABC se svým sdruženým trojúhelníkem. Takový trojúhelník nazýváme samodružným.

(Pokračování.)

O vědeckých základech umění kreslitelského
od jeho počátku až do poloviny 15. století.

Podává

M. Kuchynka.

(Pokračování.)

Věda perspektivná či krátce perspektiva, dělí se na *dvě* části: *Prvá* část, přihlížející pouze k stanovení oněch bodů obrazu, jejichž spojením vznikne *nákres* obrazu, sluje *perspektiva lineární, měřická čili kvantitativní;* druhá část, mající za před-

---

[6]) Tyto vlastnosti sdružených trojúhelníků nemění se promítáním, tudíž platí obecně pro každou kůželosečku.