Eduard Čech

Množství ireducibilně souvislá mezi n body

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 61 (1932), No. 4, 109--129

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121320

Množství ireducibilně souvislá mezi n body.

Eduard Čech.

(Došlo 4. listopadu 1931.)

I.

Topologie nedobyla si dosud v universitních přednáškách místa, které by jí náleželo vzhledem k jejímu stále rostoucímu významu v celku matematických věd; v českém jazyce pak žádná její partie nebyla dosud zpracována. Z toho důvodu pokládám za vhodné vlastnímu tématu (v. část II.) předeslati stručný výklad těch známých pojmů, kterých budu potřebovati.

1. Množství R (složené z jakýchkoli prvků) nazveme (*topologický*) *prostor*[1]) (a jeho prvky nazveme *body*), když podle nějakého pravidla π byly zvoleny určité části R, které nazveme *v R uzavřené*. Při tom pravidlo π musí býti takové, že jsou splněny následující *axiomy* (požadavky): 1·1: 0[2]) a R jsou v R uzavřená množství; 1·2: jednobodové množství[3]) jest v R uzavřené; 1·3: součet[4]) $A + B$ dvou v R uzavřených množství A, B je v R uzavřený; 1·4: průřez[5]) jakéhokoli (třeba i nekonečného) systému v R uzavřených množství je v R uzavřený. Množství $A \subset R$[6]) nazývá se v R *otevřené*, když *komplementární* množství $R - A$[7]) jest v R otevřené. V R otevřená množství mají tudíž následující vlastnosti: 1·5: 0 a R jsou v R otevřená množství; 1·6: je-li x libovolný bod z R,

---

[1]) Důkladné poučení věcné i historické o různých pojmech prostoru nalezne se v knize M. Fréchet, *Les espaces abstraits*, 1928. Prostory zde vyšetřované mají tam jméno *espaces accessibles*.

[2]) Symbol 0 značí *prázdné* množství (nemající žádného prvku).

[3]) Množství obsahující jediný bod x značíme (x).

[4]) Součet libovolného systému množství je množství těch bodů, které náležejí (aspoň) do jednoho množství daného systému; označení jako u sčítání čísel.

[5]) Průřez libovolného systému množství je množství těch bodů, které náležejí do všech daných množství; označení jako u násobení čísel.

[6]) $A \subset B$ nebo $B \supset A$ znamená, že množství A je část množství B.

[7]) $A - B$ je množství těch bodů, které jsou v A, ale nikoli v B.

pak $R - (x)$ jest v R otevřené množství; 1·7: průřez AB dvou v R otevřených množství je v R otevřený; 1·8: součet jakéhokoli systému v R otevřených množství je v R otevřený. K témuž pojmu prostoru můžeme také dospěti tak, že definujeme v R otevřená množství axiomaticky pomocí 1·5 — 1·8 a pak definujeme: množství $A \subset R$ nazývá se v R uzavřené, když $R - A$ je v R otevřené.

2. Nejdůležitější příklad prostoru je k-rozměrný euklidovský (nebo cartézský) prostor R_k, t. j. systém všech uspořádaných skupin $(x_1, \ldots, x_k)$ k reálních čísel. [Specielně R_1 je množství všech reálních čísel.] Aby to byl prostor v našem smyslu, je třeba definovati v R_k uzavřená (nebo v R_k otevřená) množství. Tuto definici najde čtenář ve spise V. Jarníka: *Úvod do teorie množství,*[8]) odd. 4., odst. 4. a 5., kde je také ukázáno, že naše axiomy 1·1—1·4 jsou splněny. Mnohem obecnější příklad udáme později (v odst. 5).

3. Nechť R, R^* jsou dané prostory. Nechť mezi R a R^* existuje jednojednoznačné zobrazení takové, že obrazem v R otevřeného[9]) množství jest v R^* otevřené množství a obráceně každé množství, jehož obraz je v R^* otevřený, jest v R otevřené. Pak pravíme, že R a R^* jsou *homeomorfní* prostory. Předmětem *topologie* (zvané někdy také analysis situs) je studium těch vlastností prostorů, které se nezmění při homeomorfním zobrazení.

4. Nechť $A \subset R$. Pak existují v R uzavřená množství $F \supset A$; průřez všech takových F podle axiomu 1·4 jest opět téhož typu; je to tedy *nejmenší* F. Nazývá se *uzavřený obal množství* A *v prostoru* R; budeme jej značiti $\overline{A}$.[10]) Z definice snadno následují věty: 4·1: $A = \overline{A}$, když a jen když A je v R uzavřené; 4·2: když $A \subset B$, pak $\overline{A} \subset \overline{B}$; 4·3: $\overline{A + B} = \overline{A} + \overline{B}$.

5. Nechť $S \subset R$. Pak v S uzavřeným množstvím rozumíme průřez S s libovolným v R uzavřeným množstvím. Snadno vidíme, že axiomy 1·1—1·4 platí pak i pro S, t. j. *každá část prostoru je prostor*. Zřejmě v S otevřené množství není pak nic jiného než průřez S s libovolným v R otevřeným množstvím.

Specielně libovolná část euklidovského R_k je prostor, což dává již velmi obecný příklad prostoru.

Je-li S uzavřené v R, pak každé v S uzavřené množství jest uzavřené v R. Je-li S otevřené v R, pak každé v S otevřené množství jest otevřené v R.

---

[8]) Dodatek ke II. vyd. Petrova *Integrálního počtu.*

[9]) Lehko vidíme, že v této definici můžeme slovo „otevřený" všude nahraditi slovem „uzavřený".

[10]) To je označení obvyklé ve Fundamenta Mathematicae; Jarník l. c. píše A^0.

6. Nechť $A \subset S \subset R$. Nechť $\overline{A}$ jest uzavřený obal množství A v prostoru R. Pak $\overline{A}S$ jest uzavřený obal množství A v prostoru S. *Důkaz.* Předně $\overline{A}S$ jest uzavřené v S a obsahuje A. Za druhé nechť $H \supset A$ jest uzavřené v S. Pak existuje v R uzavřené F takové, že $H = SF$, tedy $F \supset A$, takže (4·1 a 4·2) $F \supset \overline{A}$, tedy $H = SF \supset \overline{A}S$. Tedy $\overline{A}S$ je nejmenší v S uzavřené množství obsahující A.

7. Nechť $k = 2, 3, \ldots$ Pravíme, že součet $\sum_{r=1}^{k} A_r$ (A_r části daného prostoru R) má *oddělené sčítance*, když pro $1 \leq r \leq k$ A_r jest uzavřené v $\sum_{r=1}^{k} A_r$ a když pro $1 \leq r < s \leq k$ jest $A_r A_s = 0$. V této definici slovo „uzavřený“ můžeme nahraditi slovem „otevřený“. Vskutku, když třeba množství A_r jsou uzavřená v $\sum_{r=1}^{k} A_r$, pak každé $A_s = \sum_{r=1}^{k} A_r - \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq s}}^{k} A_r$ jest otevřené v $\sum_{r=1}^{k} A_r$.

8. Nechť součet $A + B$ má oddělené sčítance. Nechť $A_0 \subset A$, $B_0 \subset B$. Pak také součet $A_0 + B_0$ má oddělené sčítance. *Důkaz.* Ježto $AB = 0$, také $A_0 B_0 = 0$; mimo to $A_0 = A(A_0 + B_0)$; ježto A jest uzavřené v $A + B$, následuje, že A_0 jest uzavřené v $A_0 + B_0$. Podobně i B_0 jest uzavřené v $A_0 + B_0$.

9. Nechť součty $A + B$, $A + C$ mají oddělené sčítance. Pak součet $A + (B + C)$ má oddělené sčítance. *Důkaz.* Ježto A jest uzavřené v $A + B$ i v $A + C$, existují v R uzavřená F_1, F_2 taková, že $A = F_1(A + B) = F_2(A + C)$. Pak jest $A \subset F_1$, $A \subset F_2$, tedy

$$F_1 F_2 (A + B + C) = F_2 \,.\, F_1 (A + B) + F_1 \,.\, F_2 (A + C) =$$
$$= F_2 A + F_1 A = A + A = A;$$

avšak $F_1 F_2$ jest uzavřené v R, tedy $A = F_1 F_2 (A + B + C)$ jest uzavřené v $A + B + C$. Zcela stejně se dokáže, že A jest otevřené v $A + B + C$. Dále $AB = 0$, $AC = 0$, tedy $A(B + C) = 0$ a $B + C = (A + B + C) - A$; ježto A jest otevřené v $A + B + C$, $B + C$ je tedy uzavřené v $A + B + C$.

10. Množství $S \subset R$ nazývá se *souvislé*,[11]) když $S \neq 0$ a když rozklad $S = A + B$ s oddělenými sčítanci je možný pouze *tri-*

[11]) Tuto definici zavedl po prvé N. J. Lennes, *Curves in non- Metrical Analysis Situs with an Application in the Calculus of Variations*, Amer. Journal of Math., 33, 1911, str. 303. Nezávisle na Lennesovi zavedl stejnou definici znovu F. Hausdorff v knize *Grundzüge der Mengenlehre*, 1914, kap. VII, § 7. Následující jednoduché věty pocházejí od Hausdorffa.

viálně, t. j. tak, že $A = 0$ nebo $B = 0$.[12]) Zřejmě pak obecněji rozklad $S = \sum\limits_{r=1}^{k}{}' A_r$ s oddělenými sčítanci je možný pouze tak, že $A_r = 0$ s výjimkou jediného indexu r. Zřejmě jednobodové množství je souvislé, kdežto množství konečného počtu $k > 1$ bodů není souvislé.

11. Nechť $S = A + B$ s oddělenými sčítanci. Nechť T je souvislá část S. Pak $TA = 0$ nebo $TB = 0$. *Důkaz.* Podle 8 jest $T = AT + BT$ s oddělenými sčítanci.

12. Nechť $S_1, S_2 \subset R$ jsou souvislá množství; nechť $S_1S_2 \neq 0$. Pak $S_1 + S_2$ je souvislé. *Důkaz.* Nechť $S_1 + S_2 = A + B$ s oddělenými sčítanci napravo. Ježto $S_1S_2 \subset S_1 + S_2$, při vhodném označení $S_1S_2 A \neq 0$. Podle 11. je pak $S_1B = S_2B = 0$, tedy $B = (S_1 + S_2) B = 0$.

13. Nechť $S \neq 0$. Nechť každý pár a, b bodů z S jest obsažen v souvislé části S. Pak S je souvislé. *Důkaz.* Nechť $S = A + B$ s oddělenými sčítanci. Kdyby nebylo $A = 0$ ani $B = 0$, mohli bychom zvoliti bod a v A a bod b v B. Body a, b byly by v souvislém $T \subset S$, tedy by bylo $AT \neq 0 \neq BT$, což je spor proti 11.

14. Nechť $\mathfrak{M}$ je systém souvislých částí prostoru R, které všecky obsahují daný bod a. Pak součet S systému $\mathfrak{M}$ je souvislý. *Důkaz.* Nechť $S = A + B$ s oddělenými sčítanci. Při vhodném označení bod a je v A, tedy $A \neq 0$. Kdyby bylo $B \neq 0$, mohli bychom v B zvoliti bod b. Bod b (a ovšem i bod a) byly by v nějakém množství T systému $\mathfrak{M}$, tedy v souvislé části S, a bylo by tedy $AT \neq 0 \neq BT$, což je spor proti 11.

15. Nechť S je souvislá část prostoru R. Nechť $S \subset T \subset \overline{S}$. Pak T je souvislé. *Důkaz.* Nechť $T = A + B$ s oddělenými sčítanci. Podle 11. při vhodném označení $SB = 0$, tedy $S \subset A$, $A \neq 0$. Podle 4·1 a 6 jest $A = T\overline{A}$; podle 4·2 $\overline{S} \subset \overline{A}$, tedy $T \subset \overline{A}$, takže $A = T\overline{A} = T$, tedy $B = 0$.

16. Nechť $S \neq 0$ je dané množství. Množství A nazveme *komponentou* množství S, když je to souvislá část S, která není obsažena v žádné jiné souvislé části S.[13]) Nechť T je jakákoli souvislá část S; pak T je částí jedné komponenty S. Vskutku existují souvislé části U množství S obsahující T (totiž jistě $U = T$); ježto T je souvislé, je $T \neq 0$, takže podle 14. součet A *všech* U je souvislý. Zřejmě A je žádaná komponenta S. Ježto jednobodové množství je souvislé, vychází speciellně, že každý bod z S je v nějaké komponentě S. Na druhé straně pro dvě *různé*

[12]) Vidíme, že souvislost množství S je topologická vlastnost prostoru S nezávislá na volbě širšího prostoru R, do kterého prostor S je vnořen.

[13]) Pojem komponenty množství S je zřejmě závislý pouze na prostoru S, nikoli na širším prostoru R, do kterého S je vnořen.

komponenty A, B množství S je vždy $AB = 0$, neboť jinak by $A + B$ byla podle 12. souvislá část S.

Je-li S samo souvislé, má jedinou komponentu ($= S$). Když S ($\neq 0$) není souvislé, počet komponent S je > 1 (konečný nebo nekonečný).

17. Nechť A je komponenta množství S. Pak A jest uzavřené v S. *Důkaz.* Ježto $A \subset \bar{A} . S \subset \bar{A}$, množství $\bar{A} . S$ je souvislé podle 15. Ježto $A \subset \bar{A} . S \subset S$, je tedy $A = \bar{A} . S$ podle definice komponenty.

18. Nechť $S = \sum_{r=1}^{k} A_r$ s oddělenými sčítanci $\neq 0$. Nechť S nelze psáti jako součet více než k oddělených sčítanců $\neq 0$. Pak $A_1, \ldots, A_k$ jsou komponenty množství S (takže S má právě k komponent). *Důkaz.* Nechť $A_k = B_k + B_{k+1}$ s oddělenými sčítanci. Kladu-li $B_1 = A_1, \ldots, B_{k-1} = A_{k-1}$, jest $S = \sum_{r=1}^{k+1} B_r$. Pro $1 \leq r < < s \leq k + 1$ je pak $B_r B_s = 0$. Mimo to množství B_r jsou otevřená v S: to je zřejmé pro $r < k$; pro $r = k$ nebo $r = k + 1$ je B_r otevřené v A_k a A_k jest otevřené v S, takže podle 5. B_r jest otevřené v S. Tedy součet $\sum_{r=1}^{k+1} B_r = S$ má oddělené sčítance, takže aspoň jedno $B_r = 0$, t. j. $B_k = 0$ nebo $B_{k+1} = 0$. Tím je dokázáno, že A_k je souvislé. Nechť (v. 16.) A'_k je komponenta množství S obsahující A_k. Ježto $S = \sum_{r=1}^{k-1} A_r + A_k$ s oddělenými sčítanci, podle 11. $A'_k . \sum_{r=1}^{-1} A_r = 0$, t. j. $A'_k = A_k$. Tedy A_k je komponenta množství S. Stejně pro ostatní A_r.

19. Nechť S má konečný počet $k \geq 2$ komponent: $A_1 \ldots, A_k$. Pak $S = \sum_{r=1}^{k} A_r$ s oddělenými sčítanci. To následuje ze 16. a 17.

20. Nechť S je souvislá část souvislého prostoru R. Nechť $R - S = P + Q$ s oddělenými sčítanci. Pak $S + P$ je souvislé množství.[14] *Důkaz.* Nechť $S + P = A + B$ s oddělenými sčítanci napravo. Podle 11. při vhodném označení $SA = 0$, tedy $A \subset P$, takže podle 8. součet $A + Q$ má oddělené sčítance. Podle 9. tedy také součet $A + (B + Q)$ má oddělené sčítance. Avšak $A + B + Q = S + P + Q = S + (R - S) = R$ je souvislé, tedy buďto $A = 0$ nebo ($B + Q = 0$, tedy) $B = 0$.

---

[14]) B. Knaster et C. Kuratowski, *Sur les ensembles connexes*, Fundamenta Math., 2, 1921, str. 210 (théorème VI).

21. Podle 5. libovolná část množství R_1 všech reálních čísel je prostor. Specielně interval $\langle a, b\rangle$ (t. j. systém všech x, $a \leqq x \leqq b$; a, b daná reální čísla; $a < b$) je *souvislý* prostor. *Důkaz.* Nechť $\langle a, b\rangle = A + B$ s oddělenými sčítanci. Množství A, B jsou uzavřená v $\langle a, b\rangle$; $\langle a, b\rangle$ jest uzavřené v R_1 a ohraničené; tedy (5) množství AB jsou uzavřená v R_1. Máme uvésti ke sporu hypotésu $A \neq 0$, $B \neq 0$. Ježto $AB = 0$, existuje[15]) číslo $\alpha > 0$ takové, že když číslo x je v A, číslo y v B, jest vždy $|x - y| > \alpha$. Na druhé straně existuje zřejmě v $\langle a, b\rangle$ konečná posloupnost $x_0, x_1, \ldots, x_n$ taková, že $x_0 = x$, $x_n = y$, $|x_{r+1} - x_r| < \alpha$ pro $0 \leqq r \leqq n - 1$. Při vhodném r bude však x_r v A, x_{r+1} v B, takže nerovnost $|x_{r+1} - x_r| < \alpha$ odporuje definici čísla α.

22. Prostor homeomorfní s intervalem $\langle a, b\rangle$ nazývá se *jednoduchý oblouk*; obrazy bodů a, b jsou jeho *krajní body.*[16]) Ježto prostor homeomorfní se souvislým prostorem zřejmě je souvislý, vidíme, že každý jednoduchý oblouk je souvislý.

23. Jsme nyní s to udati všecky souvislé části prostoru R_1 čísel reálních. Jsou to především všecky jednobodové části, za druhé však podle 13. a 21. všecky intervaly. Jiných souvislých částí však R_1 nemá. Neboť když $S \subset R_1$, když S obsahuje více než jedno číslo a když S není interval, existuje v $R_1 - S$ číslo a takové, že $AS \neq 0 \neq BS$, kde A (B) znamená množství všech reálních čísel větších (menších) než a. Avšak množství A, B jsou otevřená v R_1, tedy $S = AS + BS$ s oddělenými sčítanci, takže S není souvislé.

II.

24. Nechť $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ($n = 2, 3 \ldots$) jsou různé body prostoru R. Pravíme, že R jest *ireducibilně souvislý mezi body* $a_1, a_2, \ldots, \ldots, a_n$ a píšeme, abychom to naznačili, $R = I(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, když: 1° R je souvislý prostor; 2° žádná část $S \neq R$ prostoru R obsahující všech n bodů $a_1, a_2, \ldots, a_n$ není souvislá. Pro $n = 2$ tento pojem byl zaveden Lennesem v pojednání citovaném v pozn. [11]) a byl podrobně studován Knasterem a Kuratowským.[17]) Případ $n > 2$ nebyl, pokud mi je známo, dosud vyšetřován. Podle 23. interval $\langle a, b\rangle$ jest ireducibilně souvislý mezi body a, b, ale nikoli mezi jiným párem svých bodů. Ježto souvislost je topologická vlastnost, jednoduchý oblouk jest ireducibilně souvislý mezi svými dvěma krajními body, ale nikoli mezi jiným párem svých bodů.

[15]) V. Jarník, l. c., str. 701, VI.

[16]) A priori krajní body mohly by se změniti při změně homeomorfního zobrazení na interval; z výsledku na konci odst. 24 je však zřejmé, že tomu tak není.

[17]) L. c. sub [14]). V. též L. Vietoris, *Stetige Mengen*, Monatshefte f. Math. u. Phys., 31, 1921, str. 173—204. Množství $I(a, b)$ mají tam název *Linienstück.*

25. Nechť $R = I(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ $(m = 2, 3, \ldots)$. Nechť $b_1, b_2, \ldots, b_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ jsou další body prostoru R. Zřejmě $R = I(a_1, a_2, \ldots, a_m, b_1, b_2, \ldots, b_n)$.

26. Nechť $R = S + T$. Nechť $ST = (x)$ jest jednobodové množství. Nechť $S = I(a_1, \ldots, a_m, x)$, $T = I(b_1, \ldots, b_n, x)$ $(m, n = 1, 2, 3, \ldots)$. Nechť S, T jsou uzavřená v R.[18]) Pak $R = I(a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n)$. *Důkaz.* Prostor R je souvislý podle 12. Nechť P je souvislá část R obsahující body $a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n$; máme dokázati, že $P = R$. Položme $SP = S_0$, $TP = T_0$, takže $S_0(T_0)$ obsahuje body $a_1, \ldots, a_m$ $(b_1, \ldots, b_n)$. Ježto S, T jsou uzavřená v R, jsou S_0, T_0 uzavřená v P. Ježto $P = S_0 + T_0$ je souvislé a $S_0 \neq 0$, $T_0 \neq 0$, jest $S_0T_0 \neq 0$. Avšak $S_0T_0 \subset ST = (x)$, tedy $S_0T_0 = (x)$. Nechť $S_0 = A + B$ s oddělenými sčítanci a nechť bod x náleží třeba do B. Množství A, B jsou uzavřená v S_0; S_0, T_0 jsou uzavřená v P; tedy A, $B + T_0$ jsou uzavřená v P. Dále $A(B + T_0) = AB + AT_0 = AT_0 \subset (S_0 - (x))\, T_0 = S_0T_0 - (x) = 0$. Tedy $P = A + (B + T_0)$ s oddělenými sčítanci; ježto $B + T_0 \neq 0$ a P je souvislé, jest $A = 0$. Tedy S_0 je *souvislá* část S obsahující body $a_1, \ldots, a_m, x$, takže $S_0 = S$. Podobně $T_0 = T$, tedy $P = R$.

27. Nechť $R = I(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Nechť x je další $(\neq a_1, a_2, \ldots, a_n)$ bod prostoru R. Množství $R - (x)$ má konečný počet k komponent; jest $2 \leq k \leq n$. Každá komponenta P množství $R - (x)$ obsahuje aspoň jeden z bodů $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Nechť $a_{\nu_1}, \ldots, a_{\nu_m}$ jsou ty a jen ty z bodů $a_1, a_2, \ldots, a_n$, které jsou v P. Pak jest $P + (x) = I(a_{\nu_1}, \ldots, a_{\nu_m}, x)$. Mimo to množství P jsou otevřená v R a množství $P + (x)$ jsou uzavřená v R. *Důkaz.* Ježto $R - (x)$ obsahuje všecky body $a_1, a_2, \ldots, a_n$, množství $R - (x)$ není souvislé. Tedy $R - (x)$ lze psáti jako součet dvou oddělených sčítanců $\neq 0$. Obecněji nechť $R - (x) = \sum_{r=1}^{k} P_r$ $(k = 2, 3, \ldots)$ s oddělenými sčítanci $\neq 0$. Množství P_r jsou otevřená v $R - (x)$, které jest otevřené v R, tedy P_r jsou otevřená v R. Tedy $P_r + (x)$ jsou uzavřená v R, neboť na př. $P_1 + (x) = R - \sum_{r=2}^{k} P_r$. Podle 20. $P_r + (x)$ jsou souvislá množství. Kdyby na př. P_1 neobsahovalo žádný z bodů $a_1, \ldots, a_n$, byla by $R - P_1 = \sum_{r=2}^{k} (P_r + (x))$ souvislá (podle 12.) část R obsahující všecky

[18]) Tento předpoklad je podstatný. Příklad (prostor R je částí euklidovské roviny R_2): S jest úsečka spojující body $x = (0, 1)$, $a = (0, -1)$; T skládá se z bodu x a z bodů $(t, \sin 1/t)$ $(0 < t \leq 1)$. Jest $S = I(a, x)$, $T = I(b, x)$ pro $b = (1, \sin 1)$, $ST = (x)$, nikoli však $R = S + T = I(a, b)$. Množství T není uzavřené v R.

body $a_1, \ldots, a_n$, takže by bylo $R - P_1 = R$, z čehož spor $P_1 = 0$. Nechť tedy na př. $a_{\nu_1}, \ldots, a_{\nu_m}$ $(m \geqq 1)$ jsou ty a jen ty z bodů $a_1, \ldots, a_n$, které jsou v P_1. Nechť S je souvislá část $P_1 + (x)$ obsahující všech $m + 1$ bodů $a_{\nu_1}, \ldots, a_{\nu_m}, x$. Pak $S + \sum_{r=2}^{k} (P_r + (x))$ je souvislá (opět podle 12.) část R obsahující všech n bodů $a_1, \ldots, a_n$, takže $S + \sum_{r=2}^{k} (P_r + (x)) = R$, z čehož $P_1 \subset S$, tedy $S = P_1 + (x)$. Tedy $P_1 + (x) = I\,(a_{\nu_1}, \ldots, a_{\nu_m}, x)$. Ježto každé z k oddělených množství P_r obsahuje aspoň jeden z bodů $a_1, \ldots, a_n$, jest $k \leqq n$. Volím-li k co největší, podle 18. P_r jsou komponenty množství $R - (x)$.

28. Specielně pro $n = 2$ máme tento výsledek: Nechť $R = I\,(a, b)$. Nechť x je další $(\neq a, b)$ bod z R. Pak $R - (x)$ má dvě komponenty $A(x)$, $B(x)$, z nichž prvá (druhá) obsahuje bod a (b). Množství $A(x)$, $B(x)$ jsou otevřená v R; množství $A(x) + (x)$, $B(x) + (x)$ jsou uzavřená v R. Mimoto $A(x) + (x) = I\,(a, x)$, $B(x) + (x) = I\,(x, b)$. Nechť nyní y je další $(\neq a, b, x)$ bod prostoru R. Pak jedno z obou souvislých množství $A(y) + (y)$, $B(y) + (y)$ je částí $R - (x)$ a tedy částí jedné z obou jeho komponent $A(x)$, $B(x)$. Není $A(y) \subset B(x)$, ježto $A(y)$ obsahuje bod a, který není v $B(x)$. Podobně není $B(y) \subset A(x)$. Tedy buďto $A(y) + (y) \subset A(x)$ nebo $B(y) + (y) \subset B(x)$, takže $R - (B(y) + (y)) \supset R - B(x)$, t. j. $A(y) \supset A(x) + (x)$. Tedy $A(x) \neq A(y)$ a buďto $A(y) \subset A(x)$ nebo $A(y) \supset A(x)$. To vede k následujícímu *uspořádání*[19]) množství R: 1° Bod a předchází každý jiný bod z R. 2° Bod b následuje za každým jiným bodem z R. 3° Jsou-li x, y dva různé další $(\neq a, b)$ body z R, pak x předchází y, když $A(x) \subset A(y)$. Zřejmě každý bod z $A(x)$ $(x \neq a, b)$ předchází x, kdežto každý bod x z $B(x)$ následuje za x.

29. Nechť prostor $R = I(a, b)$ jest uspořádán podle 28. Nazveme *intervalem* v R každou více než jednobodovou část S množství R, pro kterou platí: Když x, y, z jsou body z R, když x předchází y a y předchází z, když body x a z jsou v S, pak také y je v S. Nechť S je více než jednobodová část prostoru $R = I(a, b)$; pak S je souvislé, když a jen když je to interval v R.[20]) *Důkaz.* Nechť *předně* S jest interval v R mající první bod x a poslední bod y; jsou čtyři možné případy: 1° $x = a$, $y = b$, 2° $x = a$, $y \neq b$, 3° $x \neq a$, $y = b$, 4° $x \neq a$, $y \neq b$. V prvých třech případech jest resp. $S = R$, $S = A(y) + (y)$, $S = (x) + B(x)$, takže S je souvislé podle 28. Čtvrtý případ převede se snadno na třetí, neboť pak zřejmě S jest

[19]) L. c. sub [14]), str. 219, théorème XX.
[20]) L. c. sub [14]), str. 221, corollaire XXIV.

interval v $A(y) + (y) = I(a, y)$. Nechť *za druhé* S jest libovolný interval. Zvolme libovolně body x, y v S $(x \neq y)$. Když třeba x předchází y, pak *ten* interval v R, jehož prvním bodem jest x a posledním y, je souvislou částí S obsahující x i y; tedy S je souvislé podle 13. Nechť *za třetí* S není interval v R. Pak v $S - R$ existuje bod $x \neq a, b$ takový, že $S \,.\, A(x) \neq 0 \neq S \,.\, B(x)$. Ježto $S \subset R - (x) = A(x) + B(x)$, podle 11. S není souvislé.

Stejnou vlastnost má také *inversní* uspořádání množství R, které obdržíme, vyměníme-li roli bodů a, b. Zřejmě však žádné jiné uspořádání R nemůže míti také tuto vlastnost.

30. Ve 28. zavedené uspořádání prostoru $R = I\,(a, b)$ má také následující vlastnost:[21]) Nechť $R = S + T$; $ST = 0$. Nechť S, T jsou intervaly. Nechť bod a je v S a bod b je v T. Pak buďto existuje v S poslední bod α nebo existuje v T první bod β; ale z bodů α, β existuje jen jediný. *Důkaz.* Existuje-li α, zřejmě $S = A(\alpha) + (\alpha)$, takže (podle 28.) S jest uzavřené v R; neexistuje-li α, zřejmě S je součet všech $A(x)$, kde x probíhá S, takže S je součet množství (podle 28.) v R otevřených, tedy (1·8) S je v R otevřené. Podobně T jest uzavřené v R, existuje-li β, a otevřené v R, neexistuje-li β. Tedy, kdyby věta nebyla správná, součet $R = S + T$ měl by oddělené sčítance $\neq 0$ a prostor R by nebyl souvislý.

31. Nechť

$$a_1, a_2, \ldots, a_k \tag{1}$$

jsou různé body prostoru R $(k = 2, 3, \ldots)$. Body (1) tvoří část T prostoru R; nechť $S = R - T$. Nechť ke každému bodu a_ν z (1) existuje aspoň jeden jiný bod a_μ z (1) tak, že

$$S + (a_\nu) + (a_\mu) = I(a_\nu, a_\mu). \tag{2}$$

Pak lze body (1) rozděliti ve dvě (neprázdné) skupiny tak, že (2) platí, když a jen když body a_ν, a_μ jsou v různých skupinách. Jsou-li $b_1, \ldots, b_r$; $c_1, \ldots, c_s$ $(r + s = k)$ tyto dvě skupiny, píšeme

$$S = I^*\,(b_1, \ldots, b_r \,|\, c_1, \ldots, c_s).^{22})$$

Důkaz. Vyjděme od určitého páru a_ν, a_μ splňujícího podmínku (2) a uspořádejme $S + (a_\nu) + (a_\mu)$ podle 28. Tím je množství S také uspořádáno; věta dokázaná v odst. 29. platí pak také pro S. Máme ovšem k disposici dvě taková uspořádání S navzájem inversní. Poznámka na konci odst. 29. platí zřejmě také pro S, z čehož

---

[21]) L. c. sub [14]), str. 221, théorème XXIII.

[22]) Učiněné předpoklady dají se realisovati při libovolných r, s. Příklad: R je částí euklidovské roviny E_2. $b_\nu = (-1, \beta_\nu)$ pro $1 \leqq \nu \leqq r$, kde β_ν jsou libovolná mezi sebou různá čísla intervalu $\langle -1, 1\rangle$; $c_\nu = (1, \gamma_\nu)$ pro $1 \leqq \nu \leqq s$, kde γ_ν jsou mezi sebou různá čísla z $\langle -1, 1\rangle$; S je množství bodů $\left(t, \sin \dfrac{1}{1 - |t|}\right)$ pro $-1 < t < 1$.

snadno vychází, že pár navzájem inversních uspořádání množství S, ke kterému dospějeme takto pomocí bodů a_μ, a_ν, zůstane beze změny, když body a_μ, a_ν nahradíme jiným párem bodů z (1) splňujícím ovšem také podmínku (2). Rozhodněme se pro určité z těchto dvou navzájem inversních uspořádání množství S; to vyjádříme tím, že řekneme, že jsme S *orientovali*, což tedy lze právě dvěma způsoby. Zvolme nyní libovolný bod x v S a označme $P(x)$ ($Q(x)$) množství těch bodů z $S - (x)$, které předcházejí x (následují za x). Platí-li (2), podle 29. buďto množství

$$P(x) + (a_\nu),\ Q(x) + (a_\mu) \tag{*}$$

jsou souvislá a množství

$$P(x) + (a_\mu),\ Q(x) + (a_\nu) \tag{**}$$

nejsou souvislá nebo obráceně množství (*) nejsou souvislá a množství (**) jsou souvislá. Žádané rozdělení bodů (1) obdržíme pak zřejmě tak, že do první skupiny dáme ty a jen ty z bodů a_ν, pro něž $P(x) + (a_\nu)$ je souvislé, takže ve druhé skupině budou ty a jen ty z bodů a_ν, pro něž $Q(x) + (a_\nu)$ je souvislé. Řekneme pak, že body (1) z první skupiny jsou *počáteční* (*koncové*) body pro S; pro *všecky* body (1) zavedeme pak společný název: *krajní* body pro S. Změníme-li orientaci S, přejdou ovšem počáteční body v koncové a naopak.

Jsou-li $b_1, \ldots, b_r$ ($c_1, \ldots, c_s$) počáteční (koncové) body pro S, jest

$$\overline{P(x)} = P(x) + (x) + \sum_{\nu=1}^{r} (b_\nu); \quad \overline{Q(x)} = Q(x) + (x) + \sum_{\nu=1}^{s} (c_\nu). \tag{3}$$

Důkaz. Množství $P(x)$ jest otevřené v S, takže $S - P(x) = Q(x) + (x)$ jest uzavřené v S. Kdyby bod x nebyl v $\overline{P(x)}$, $P(x)$ bylo by uzavřené v S, takže by bylo $S = P(x) + (Q(x) + (x))$ s oddělenými sčítanci, což je nemožné. Můžeme se z důvodů symetrie omeziti na důkaz prvé formule (3). Máme tedy ještě dokázati, že body b_ν jsou a že body c_ν nejsou v $\overline{P(x)}$. Kdyby některý bod b_ν nebyl v $\overline{P(x)}$, bylo by $P(x)$ uzavřené v $P(x) + (b_\nu)$, takže součet $P(x) + (b_\nu)$ by měl oddělené sčítance, což je nemožné, neboť $P(x) + (b_\nu)$ je souvislé. Kdyby některý z bodů c_ν byl v $\overline{P(x)}$, podle 15. množství $P(x) + (c_\nu)$ bylo by souvislé, což je spor.

32. Nechť

$$v_1, v_2, \ldots, v_k \quad (k = 2, 3, \ldots) \tag{4}$$

jsou body prostoru R. Nechť

$$S_1, S_2, \ldots, S_l \quad (l = 1, 2, 3 \ldots) \tag{5}$$

jsou v R otevřená množství. Nechť

$$R = \sum_{\nu=1}^{k} (v_\nu) + \sum_{\nu=1}^{l} S_\nu, \tag{6}$$

při čemž každý bod z R náleží jen do *jediného* z $k + l$ sčítanců na pravo. Pro $1 \leq \lambda \leq l$ nechť

$$\overline{S_\lambda} = S_\lambda + \sum_{\nu=1}^{r} (a_\nu) + \sum_{\nu=1}^{s} (b_\nu) = I^*(a_1, \ldots, a_r \mid b_1, \ldots, b_s), \quad (r, s = 1, 2, 3 \ldots)$$

při čemž $a_1, \ldots, a_r, b_1, \ldots, b_s$ jsou různé body z řady (4). Jsou-li[23]) S_λ, S_μ dvě různá z množství (5), nechť existují indexy $\nu_0, \nu_1, \ldots, \nu_t$ $(t = 1, 2, 3 \ldots; \nu_0, \nu_1, \ldots = 1, 2, \ldots l)$ takové, že $\nu_0 = \lambda$, $\nu_t = \mu$ a že pro $1 \leq i \leq t$ jest $\overline{S}_{\nu_{i-1}} . \overline{S}_{\nu_i} \neq 0$. Ke každému μ $(1 \leq \mu \leq k)$ nechť existuje aspoň jedno λ $(1 \leq \lambda \leq l)$ takové, že bod v_μ náleží do $\overline{S_2}$. Je-li libovolně zvolen index λ $(1 \leq \lambda \leq l)$, platí-li (7), je-li bod a_ν (b_ν) libovolně zvolen mezi r body $a_1, \ldots, a_r$ (mezi s body $b_1, \ldots, b_s$), nechť není možné udati indexy $\nu_0, \nu_1, \ldots, \nu_t$ $(t = 0, 1, 2 \ldots; \nu_0, \nu_1, \ldots = 1, 2, \ldots, l)$ vesměs různé od indexu λ tak, aby bod a_ν náležel do S_{ν_0} a bod b_ν do S_{ν_t} a aby[24]) pro $1 \leq i \leq t$ bylo $\overline{S}_{\nu_{i-1}} . \overline{S}_{\nu_i} = 0$. Pak pravíme, že R jest *obecný strom*;[25]) body (4) jsou jeho *vrcholy*, množství (5) jeho *strany*.

33. Vrcholy a strany obecného stromu R nejsou *prostorem* R jednoznačně určeny, nýbrž záležejí na jeho *vytvoření*. Toto vytvoření můžeme vždy voliti tak, že dané body (v konečném počtu) prostoru R jsou vrcholy. Neboť když při daném vytvoření (6) obecného stromu R bod x prostoru R není vrcholem, nýbrž náleží třeba do strany S_λ, orientujme S_λ (podle 31.), označme $P(x)$ $(Q(x))$ množství těch bodů z S_λ, které předcházejí x (následují za x), připojme k vrcholům (4) nový vrchol x, ze stran (5) vypusťme S_λ a nahraďme ji novými stranami $P(x)$ a $Q(x)$. Čtenář snadno shledá, že při novém vytvoření prostoru R zůstanou v platnosti všecky podmínky pro obecný strom.

34. Strany (5) obecného stromu (6) lze psáti v takovém pořádku, že prostory $R_\lambda = \sum_{r=1}^{\lambda} \overline{S_r}$ $(1 \leq \lambda \leq l)$ jsou obecné stromy.[26]) *Důkaz:* Zřejmě R_1 jest obecný strom při libovolné volbě strany S_1. Nechť při určitém λ $(2 \leq \lambda \leq l)$ byly již strany $S_1, \ldots, S_{\lambda-1}$ tak voleny, že $R_1, \ldots, R_{\lambda-1}$ jsou obecné stromy. Je-li S_μ další strana

[23]) Tato podmínka odpadne pro $l = 1$.

[24]) Tato podmínka odpadne pro $t = 0$.

[25]) Jsou-li $\overline{S_\lambda}$ jednoduché oblouky a je-li v (7) (pro každé λ) $r = s = 1$, přejde mnou definovaný obecný strom v to, čemu v t. zv. kombinatorické topologii se říká *strom*.

[26]) Vrcholy a strany obecného stromu R_λ jsou v R_λ obsažené vrcholy a strany obecného stromu R.

(zvolená libovolně), existují strany $S_1 = S_{\nu_0}, S_{\nu_1}, \ldots, S_{\nu_t} = S_\mu$ takové, že $\overline{S_{\nu_{i-1}}} . S_{\nu_i} \neq 0$. Zvolme i tak, že $\nu_i \geq \lambda$ a že při tom ν_i jest co nejmenší; položme pak $S_\lambda = S_{\nu_i}$. Čtenář snadno dokáže, že při této volbě strany S_λ také R_λ jest obecný strom, čímž je důkaz dokončen. Ježto $\overline{S_\lambda} . \overline{S_{\nu_{i-1}}} \neq 0$, ježto $\overline{S_{\nu_{i-1}}} \subset R_{\lambda-1}$, ježto sčítanci v (6) nemají společných bodů, existuje v $R_{\lambda-1}$ vrchol a, který je krajním bodem pro S_λ. Orientujme S_λ tak, že a je počátečním bodem pro S_λ a označme b některý koncový bod pro S_λ. Pak b není v $R_{\lambda-1}$. V opačném případě by totiž existovaly v $R_{\lambda-1}$ strany S_μ, S'_μ takové, že pro prvou (druhou) bod a (b) je krajním bodem. Ježto $R_{\lambda-1}$ jest obecný strom, existovaly by indexy $\nu_0, \nu_1, \ldots, \nu_t$ vesměs $< \lambda$ a takové, že $\nu_0 = \mu$, $\nu_t = \mu'$ a mimo to[24]) $S_{\nu_{i-1}} . \overline{S_{\nu_i}} \neq 0$. Ježto však a (b) náleží do $\overline{S_{\nu_0}}$ ($\overline{S_{\nu_t}}$) a ježto a (b) je počáteční (koncový) bod pro S_λ a $\nu_0, \nu_1, \ldots, \nu_t \neq \lambda$, nebyl by R obecný strom.

35. Nechť bod x obecného stromu R není jeho vrcholem. Pak $R - (x)$ není souvislé množství. *Důkaz.* Označme S_λ tu stranu R, která obsahuje x a zaveďme označení (7). Orientujme S_λ tak, že body a_ν $(1 \leq \nu \leq r)$ jsou počáteční pro S_λ. Nechť množství A skládá se jednak z bodů a_ν $(1 \leq \nu \leq r)$, jednak ze všech těch $\overline{S_\mu}$ $(\mu \neq \lambda)$, pro které lze udati indexy $\nu_0, \nu_1, \ldots, \nu_t$ $(t \geq 0)$ vesměs $\neq \lambda$, tak, že některý z bodů a_ν $(1 \leq \nu \leq r)$ náleží do $\overline{S_{\nu_0}}$, že $\nu_t = \mu$ a že pro $1 \leq i \leq t$ jest[24]) $\overline{S_{\nu_{i-1}}} . \overline{S_{\nu_i}} \neq 0$. Podle definice obecného stromu R žádný b_ν $(1 \leq \nu \leq s)$ nenáleží do A, takže množství $B = (R - S_\lambda) - A$ obsahuje všecky body b_ν. Zřejmě A jest uzavřené v R. Je-li $v \neq a$ vrchol obecného stromu R a náleží-li v do A, zřejmě A obsahuje každou stranu S_μ $(\mu \neq \lambda)$, pro kterou v je krajním bodem; z toho následuje snadno, že A jest otevřené v $R - S_\lambda$, takže B jest uzavřené v $R - S_\lambda$, tudíž (v. 5) také v R. Označme $P(x)$ ($Q(x)$) množství těch bodů z S_λ, které předcházejí x (následují za x). Pak jest $R = (A + \overline{P(x)}) + (B + \overline{Q(x)})$, oba sčítanci jsou uzavření v R a nemají jiného společného bodu než x (v. 31 (3)). Tedy

$$R - (x) = [(A + \overline{P(x)}) - (x)] + [(B + \overline{Q(x)}) - (x)]$$

s oddělenými sčítanci $\neq 0$, takže $R - (x)$ není souvislé.

36. Zachovejme označení odst. 35. Modifikujme strany a vrcholy obecného stromu R podle 33.[27]). Čtenář snadno shledá, že

$$R_1 = A + \overline{P(x)}, \quad R_2 = B + \overline{Q(x)}$$

jsou obecné stromy; jejich vrcholy a strany jsou v R obsažené vrcholy a strany R. Obecné stromy R_1 a R_2 mají společný pouze

[27]) Symboly x, $P(x)$, $Q(x)$ ve 33 mají stejný význam jako ve 35.

bod x, který je pro oba vrcholem; každý z nich obsahuje jedinou stranu s krajním bodem x (jsou to strany $P(x)$ a $Q(x)$).

37. *Krajním bodem* obecného stromu R nazveme takový jeho vrchol, který je krajním bodem pro jedinou stranu.[28]) Každý obecný strom má aspoň dva různé krajní body. *Důkaz.* Když počet stran $l = 1$, je to zřejmé; nechť tedy $l > 1$. Pišme strany S_λ $(1 \leqq \lambda \leqq l)$ v takovém pořádku jako ve 34. Pak každý koncový bod pro S_l je krajním bodem pro R (neboť, jak ve 34. bylo ukázáno, není v R_{l-1}). Tedy existuje aspoň jeden krajní bod pro R. Avšak v konstrukci odst. 34. můžeme stranu S_1 voliti libovolně: tedy můžeme předpokládati, že $\overline{S}_1$ obsahuje krajní bod pro R. Ježto také $\overline{S}_l$ obsahuje krajní bod pro R, má R aspoň dva krajní body.

38. Každý obecný strom je souvislý. *Důkaz.* Každá strana S_λ je souvislá; tedy (podle 15.) také $\overline{S}_\lambda$ jsou souvislá množství. Jsou-li S_λ, S_μ dvě různé strany, existují indexy $\nu_0, \nu_1, \ldots, \nu_t$ $(t \geqq 1)$ takové, že $\nu_0 = \lambda$, $\nu_t = \mu$ a $\overline{S}_{\nu_{i-1}} . \overline{S}_{\nu_i} \neq 0$ pro $1 \leqq i \leqq t$. Tedy (podle 12.) $\sum_{i=0}^{t} \overline{S}_{\nu_i}$ je souvislé. Avšak každý vrchol v_μ $(1 \leqq \mu \leqq k)$ je v některém množství $\overline{S}_\lambda$ $(1 \leqq \lambda \leqq l)$. Tedy podle (6) $\sum_{r=1}^{l} \overline{S}_r = R$, takže R je souvislé podle 13.

39. Nechť v je krajní bod obecného stromu R. Pak $R - v$ je souvislé. *Důkaz* jako ve 36., jen místo $\overline{S}_\lambda$ se vezme $\overline{S}_\lambda - (v)$.[29])

40. Bod a obecného stromu R nazveme *singulárním bodem* pro R, když $R - (a)$ je souvislé. Podle 35. každý singulární bod je vrcholem, takže singulárních bodů je konečný počet. Podle 39. každý krajní bod je singulární,[30]) takže podle 37. každý obecný strom má aspoň dva singulární body.

41. Nechť R jest obecný strom; nechť $p_1, p_2, \ldots, p_n$ jsou všecky jeho singulární body (tedy $n = 2, 3, \ldots$). Pak $R = I(p_1, p_2, \ldots, p_n)$. Obecněji nechť $q_1, q_2, \ldots, q_m$ jsou různé body $(m \geqq 2)$ obecného stromu R. Pak $R = I(q_1, q_2, \ldots, q_m)$ tehdy a jen tehdy, když mezi body $q_1, \ldots, q_m$ vyskytnou se všecky body $p_1, \ldots, p_n$. *Důkaz.* Nechť S je souvislá část R obsahující všecky body p_1,

---

[28]) Uvidíme v odst. 49, že krajní body obecného stromu R jsou prostorem R jednoznačně určeny (nezávisle na jeho vytvoření).

[29]) Když $\overline{S}_{\nu_{i-1}} . \overline{S}_{\nu_i} \neq 0$, jest $[\overline{S}_{\nu_{i-1}} - (v)] . [\overline{S}_{\nu_i} - (v)] \neq 0$; jinak by v byl krajním bodem *obou* stran $S_{\nu_{i-1}}$, S_{ν_i}, což je spor.

[30]) Mohou existovati singulární body, které nejsou krajní. Příklad: R je částí euklidovské roviny R_2. R má čtyři vrcholy $a = (-1, -\sin 1)$, $b = (1, \sin 1)$, $c = (0, 1)$, $d = (0, -1)$ a dvě strany: prvá (druhá) je množství bodů $(t, \sin 1/t)$ pro $-1 < t < 0$ (pro $0 < t < 1$). Všecky body a, b, c, d jsou singulární, ale pouze a, b jsou krajní.

$p_2, \ldots, p_n$. Kdyby nebylo $S = R$, existoval by bod z v $R - S$. Ježto S obsahuje všecky singulární body, množství $R - (z) \subset S$ by nebylo souvislé. Tedy $R - (z) = A + B$ s oddělenými sčítanci $\neq 0$. Podle 11. při vhodném označení $BS = 0$. Množství $B + (z)$ je souvislé (podle 20.) a více než jednobodové, tedy obsahuje bod x, který není vrcholem pro R. Ježto $BS = 0$, bod x je $R - S$, takže $S \subset R - (x)$. Podle 35. a 36. jest $R - (x) = [R_1 - (x)] + [R_2 - (x)]$ s oddělenými sčítanci, kde R_1, R_2 jsou obecné stromy. Každý z obou obecných stromů R_1, R_2, má podle 37. aspoň dva krajní body, tedy aspoň jeden krajní bod $\neq x$. Každý takový bod je však zřejmě (krajním, tedy) singulárním pro R, tudíž náleží do S. Tedy $S \,.\, [R_1 - (x)] \neq 0$, $S \,.\, [R_2 - (x)] \neq 0$, což je spor proti 11. Tedy $S = R$, takže podle 38. $R = I\,(p_1, \ldots, p_n)$. Když mezi body $q_1, \ldots, q_m$ se vyskytnou všecky body $p_1, \ldots, p_n$, jest $R = I\,(q_1, \ldots, \ldots q_m)$ podle 25. Když na př. bod p_1 se nevyskytne mezi body $q_1, \ldots, q_m$, jest $R - (p_1)$ souvislá (ježto p_1 je singulární) část R obsahující $q_1, \ldots, q_m$, takže není $R = I\,(q_1, \ldots, q_m)$.

42. Nechť $R = \sum_{r=1}^{n} P_r$ $(n = 2, 3, \ldots)$. Každé P_r nechť jest uzavřené v R;[31]) každé P_r nechť jest obecný strom. Nechť x je bod prostoru R takový, že $P_r \,.\, P_s = (x)$ pro $1 \leq r \leq s < n$. Pak R jest obecný strom. Snadný důkaz přenechávám čtenáři.

43. Nechť $R = I\,(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ $(n = 2, 3, \ldots)$. Pak R jest obecný strom. *Důkaz.* Pro $n = 2$ je to zřejmé. Mohu tedy předpokládati, že $n > 2$ a že věta platí pro prostory ireducibilně souvislé mezi $m < n$ body. Za tohoto předpokladu podám důkaz v odstavcích 44.—48.

44. Hlavním prostředkem k důkazu ohlášené věty je výsledek odst. 27. Předpokládejme nejprve, že bod x lze zvoliti tak, že počet k komponent $P_1, P_2, \ldots, P_k$ množství $R - (x)$ je > 2. Ježto každé z množství P_r $(1 \leq r \leq k)$ obsahuje aspoň jeden z bodů $a_1, \ldots, a_n$, každé z nich může obsahovati nejvýš $n - 2$ z bodů $a_1, \ldots, a_n$. Jsou-li však $a_{\nu_1}, \ldots, a_{\nu_m}$ ty a jen ty z bodů $a_1, \ldots, a_n$, které náležejí do P_r, jest $1 < m < n - 1$ a podle 27. jest $P_r + (x) = I\,(a_{\nu_1}, \ldots, a_{\nu_m}, x)$, tedy podle předpokladu učiněného ve 43. $P_r + (x)$ $(1 \leq r \leq k)$ jsou obecné stromy. Avšak podle 27. $P_r + (x)$ jsou množství uzavřená v R a zřejmě $R = \sum_{r=1}^{k} (P_r + (x))$ a $(P_r + (x)) \,.\, (P_s + (x)) = (x)$. Tedy podle 42. R jest obecný strom. K témuž výsledku dospějeme stejnou cestou, když sice $k = 2$, avšak každá z obou komponent P_1, P_2 množství $R - (x)$ obsahuje více než jeden (tedy opět nejvýš $n - 2$) z bodů $a_1, \ldots, a_n$.

[31]) Tento předpoklad je podstatný, jak ukazuje příklad v pozn. [18])

45. Zbývá provésti důkaz za předpokladu, že při každé volbě bodu $x \neq a_1, a_2, \ldots, a_n$ v prostoru R množství $R - (x)$ má dvě komponenty, z nichž jedna — označme ji $P_1(x)$ — obsahuje právě jeden z n bodů $a_1, \ldots, a_n$ — nechť je to bod $a_{\nu(x)}$ — kdežto druhá komponenta $R - (x)$ — označme ji $P_2(x)$ — obsahuje body a_r $(1 \leqq r \leqq n;\ r \neq \nu(x))$. Vyšetřme nejprve ten případ, že při všech možných volbách bodu x index $\nu(x)$ nabude méně než n hodnot. Při vhodném označení bude pak stále $\nu(x) > 1$. Můžeme předpokládati, že není $R = I(a_2, \ldots, a_n)$, neboť jinak R jest obecný strom podle předpokladu učiněného ve 43. Tedy existuje souvislé $S \subset R$, $S \neq R$ obsahující všecky body $a_2, \ldots, a_n$. Není-li $S = R - (a_1)$, existuje v $R - S$ bod $x \neq a_1, a_2, \ldots, a_n$; pak $S \subset R - (x) = P_1(x) + P_2(x)$, tedy podle 11. a 19. buďto $S \subset P_1(x)$ nebo $S \subset P_2(x)$; ježto S obsahuje $n - 1 > 1$ z bodů $a_1, \ldots, a_n$, není $S \subset P_1(x)$, takže $S \subset P_2(x)$, ale ani to není možné, ježto $\nu(x) > 1$, takže bod $a_{\nu(x)}$ je v S, ale nikoli v $P_2(x)$. Tedy za učiněných předpokladů o S musí býti $S = R - (a_1)$, takže $R - (a_1) = I(a_2, \ldots, a_n)$. Tedy podle předpokladu učiněného ve 43. jest $R - (a_1)$ obecný strom. Nechť

$$v_1, v_2, \ldots, v_k \quad (k = 2, 3 \ldots) \tag{4}$$

jsou vrcholy a

$$S_1, S_2, \ldots, S_l \quad (l = 1, 2, 3 \ldots) \tag{5}$$

jsou strany obecného stromu $R - (a_1)$. Kdyby bylo $\overline{R - (a_1)} = R - (a_1)$, bylo by $R = (R - (a_1)) + (a_1)$ s oddělenými sčítanci $\neq 0$, což je nemožné; tedy $R = \overline{R - (a_1)}$, takže (v. 4·3) existuje aspoň jedno λ $(1 \leqq \lambda \leqq l)$ takové, že bod a_1 náleží do $\overline{S_\lambda}$ (tedy do $\overline{S_\lambda} - S_\lambda$).

46. Nechť S_λ je taková strana obecného stromu $R - (a_1)$, že bod a_1 náleží do $\overline{S_\lambda} - S_\lambda$. Orientujme S_λ (podle 31.). Je-li x libovolný bod z S_λ, označme $Q_1(x)$ $(Q_2(x))$ systém těch bodů z S_λ, které předcházejí x (následují za x). Pak jest $S_\lambda = Q_1(x) + (x) + Q_2(x)$, tedy $\overline{S_\lambda} = \overline{Q_1(x)} + (x) + \overline{Q_2(x)}$, takže bod a_1 náleží do $\overline{Q_1(x)}$ nebo do $\overline{Q_2(x)}$. Označme $T_1(T_2)$ systém těch x z S_λ, pro něž a_1 náleží do $\overline{Q_1(x)}$ $(\overline{Q_2(x)})$; pak $S_\lambda = T_1 + T_2$. Předpokládejme nejprve, že v S_λ existují body x, y takové, že x předchází y nebo $x = y$, že x je v T_1 a že y je v T_2. Podle 29. množství $Q_1(x)$, $Q_2(y)$ jsou souvislá; tedy podle 15. množství $Q_1(x) + (a_1)$, $Q_2(y) + (a_1)$ jsou souvislá, takže podle 12. množství $S'_\lambda = Q_1(x) + Q_2(y) + (a_1)$ je souvislé. Zřejmě $S'_\lambda \subset S_\lambda - (x)$. Podle (3) v odst. 31. a podle 15. množství S''_λ vzniklé z S'_λ připojením krajních bodů strany S_λ obecného stromu $R - (a_1)$ je také souvislé. Myslíme-li si v odst. 38. provedený důkaz souvislosti obecného stromu aplikován na $R - (a_1)$, vidíme

snadno, že zůstane v platnosti, když S_λ a jeho uzavřený obal v $R - (a_1)$ nahradíme resp. množstvími S'_λ, S''_λ, t. j. že množství $[(R - (a_1)) - S_\lambda] + S'_\lambda = R_1$ je souvislé. Avšak toto množství obsahuje všecky body $a_1, \ldots, a_n$, ale nikoli bod x, takže není souvislé, neboť $R = I(a_1, \ldots, a_n)$. Tedy učiněný předpoklad o bodech x, y je nemožný, takže $T_1 . T_2 = 0$ a každý bod z T_2 předchází každý bod z T_1. Je-li $T_1 \neq 0 \neq T_2$, označme b (c) některý počáteční (koncový) bod strany S_λ obecného stromu $R - (a_1)$, takže $S_\lambda + (b) + (c) = I(b, c)$. Předpoklady věty ve 30. jsou pak zřejmě splněny, když místo R, S, T vezmeme resp. $S_\lambda + (b) + (c)$, $T_2 + (b)$, $T_1 + (c)$. Tedy v S_λ existuje bod x, který je buďto posledním pro T_2 nebo prvním pro T_1. Modifikujme podle 33. vytvoření obecného stromu $R - (a_1)$ tak, že k vrcholům (4) přidáme jako nový vrchol právě určený bod x, kdežto stranu S_λ nahradíme novými stranami $Q_1(x)$, $Q_2(x)$. Pak shledáváme: Bod a_1 je v jednom a jen jednom z množství $\overline{Q_1(x)}$, $\overline{Q_2(x)}$; je-li a_1 v $\overline{Q_1(x)}$ a píšeme-li $Q_1(x) = T'_1 + T'_2$ analogicky s hořejším rozkladem $S_\lambda = T_1 + T_2$, je $T'_1 = 0$; je-li a_1 v $\overline{Q_2(x)}$ a píšeme-li obdobně $Q_2(x) = T''_1 + T''_2$, jest $T''_2 = 0$.[32])

47. Dospěli jsme k výsledku, že (za předpokladů učiněných ve 45.) lze vytvoření obecného stromu $R - (a_1)$ z vrcholů (4) a stran (5) voliti tak, že pro každou stranu S_λ takovou, že bod a_1 je v $\overline{S_\lambda} - S_\lambda$, jest $T_1 = 0$ nebo $T_2 = 0$ (v označení odst. 46.). Při vhodné orientaci S_λ bude $T_2 = 0$. Nechť $b_1, \ldots, b_r$ ($c_1, \ldots, c_s$) ($r, s = 1, 2 \ldots$) jsou počáteční (koncové) body takové strany S_λ. Ježto (podle 6.) uzavřený obal S_λ v prostoru $R - (a_1)$ jest $\overline{S_\lambda} - (a_1)$, jest

$$\overline{S_\lambda} - (a_1) = I^*(b_1, \ldots, b_r \mid c_1, \ldots, c_s) \,. \tag{8}$$

a

$$\overline{S_\lambda} = S_\lambda + (a_1) + \sum_{\nu=1}^{r} (b_\nu) + \sum_{s}^{\nu=1} (c_\nu).$$

Množství $S_\lambda + (a_1) + (c_1)$ je souvislé podle 15. Nechť U je souvislá část tohoto množství obsahující body a_1 a c_1. Je-li $U \neq S_\lambda + (a_1) + (c_1)$, existuje bod x v $S_\lambda - U$, tedy $U \subset (S_\lambda - (x)) + (a_1) + (c_1)$. Definujme $Q_1(x)$, $Q_2(x)$ jako ve 46., takže $S_\lambda - (x) = Q_1(x) + Q_2(x)$ s oddělenými sčítanci. Podle 31. (3) bod c_1 není v $\overline{Q_1(x)}$, takže (v. 6) $Q_1(x)$ jest uzavřené v $Q_1(x) + (c_1)$; tedy součet $Q_1(x) + (c_1)$ má oddělené sčítance. Ježto $T_2 = 0$, bod a_1 není v $\overline{Q_2(x)}$, takže součet $Q_2(x) + (a_1)$ má oddělené sčítance. Konečně $a_1 \neq c_1$, takže součet $(a_1) + (c_1)$ má oddělené sčítance. Tedy podle 9. také součet

[32]) Předpokládá se ovšem, že nové strany $Q_1(x)$, $Q_2(x)$ jsou orientovány souhlasně s S_λ.

$$[Q_1(x) + (a_1)] + [Q_2(x) + (c_1)] \supset U$$

má oddělené sčítance. Tedy podle 11. $U \, . \, [Q_1(x) + (a_1)] = 0$ nebo $U \, . \, [Q_2(x) + (c_1)] = 0$, což je spor, neboť U obsahuje body a_1 i c_1. Tím je dokázáno, že $S_\lambda + (a_1) + (c_1) = I\,(a_1, c_1)$. Z toho a z (8) následuje podle 31., že

$$\overline{S_\lambda} = I^*\,(a_1, b_1, \ldots, b_r \mid c_1, \ldots, c_s).$$

To platí pro všecky takové indexy λ, pro něž $(a_1) \subset \overline{S_\lambda}$. Pro ostatní indexy λ platí (8), kde $\overline{S_\lambda} - (a_1) = \overline{S_\lambda}$.

Z tohoto výsledku vychází snadno, že připojením bodu a_1 k vrcholům (4) obecného stromu $R - (a_1)$ při ponechání stran (5) vzniklý prostor R jest obecný strom. Neboť všecky ve 32. vyjmenované vlastnosti obecného stromu až na poslední jsou zřejmě splněny. Poslední vlastnost zní: Je-li a počáteční a b koncový bod strany S_λ, není možné udati indexy $\nu_0, \nu_1, \ldots, \nu_t$ $(t \geqq 0)$ vesměs různé od λ tak, aby bod a náležel do $\overline{S}_{\nu_0}$, bod b do $\overline{S}_{\nu_t}$ a aby[24]) pro $1 \leqq i \leqq t$ bylo $\overline{S}_{\nu_{i-1}} \, . \, \overline{S}_{\nu_i} \neq 0$. Předpokládejme naopak, že při určité volbě S_λ, a, b lze udati $\nu_0, \nu_1, \ldots, \nu_t$. Zvolme v S_λ bod x a definujme $Q_1(x)$, $Q_2(x)$ jako ve 46. Množství

$$(\overline{Q_1(x)} - (x)) + \sum_{i=0}^{t} \overline{S}_{\nu_i} + (\overline{Q_2(x)} - (x)) = S_\lambda^*$$

podle 31. (3) obsahuje všecky krajní body strany S_λ a podle 12. je souvislé. Z toho důvodu důkaz souvislosti provedený v odst. 38. platí, když množství $\overline{S_\lambda}$ (pro daný index λ) nahradíme množstvím S_λ^*. To znamená, že

$$R_1 = (R - \overline{S_\lambda}) + S_\lambda^*$$

je souvislé množství. To je však spor, neboť R_1 obsahuje všecky body $a_1, a_2, \ldots, a_n$, nikoli však x a $R = I\,(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

48. Zbývá provésti důkaz za předpokladu, že při ponechání předpokladů vyjmenovaných na počátku odst. 45. index $\nu(x)$ nabude (když x probíhá $R - \sum_{r=1}^{n} (a_r)$) všech hodnot $1, 2, \ldots, n$. Pro $1 \leqq r \leqq n$ označme A_r součet všech množství $P_1(x)$ (v označení zavedeném na počátku odst. 45.) příslušných těm x z $R - \sum_{\nu=1}^{n} (a_\nu)$, pro něž $\nu(x) = r$. Tedy bod a_r náleží do A_r pro $1 \leqq r \leqq n$. Mimo to A_r jsou v R otevřená množství podle 1·8, neboť $P_1(x)$ jsou v R otevřená podle 27. Tedy součet $\sum_{r=1}^{n} A_r$ má otevřené sčítance $\neq 0$;

ježto R je souvislý prostor, je tudíž $\sum_{r=1}^{n} A_r \neq R$, takže mohu zvoliti bod x v $R - \sum_{r=1}^{n} A_r$. Ježto bod a_r je v A_r, jest $x \neq a_1, \ldots, a_n$. Tedy podle našich předpokladů existuje rozklad $R - (x) = P_1(x) + P_2(x)$. Při vhodném označení jest $\nu(x) = 1$, takže podle 27. $P_1(x) + (x) = I(a_1, x)$, $P_2(x) + (x) = I(a_2, \ldots, a_n, x)$; množství $P_1(x) + (x)$, $P_2(x) + (x)$ podle 27. jsou uzavřená v R a jest

$$[P_1(x) + (x)] + [P_2(x) + (x)] = R;\ [P_1(x) + (x)] \,.\, [P_2(x) + (x)] = (x).$$

Ježto $P_1(x) + (x) = I(a_1, x)$, $P_1(x) + (x)$ jest obecný strom. Stačí dokázati, že také $P_2(x) + (x)$ jest obecný strom, neboť pak R jest obecný strom podle 42. Když v $P_2(x)$ existuje bod $y \neq a_2, \ldots, a_n$ takový, že buďto $(P_2(x) + (x)) - (y)$ má více než dvě komponenty, nebo že v každé komponentě tohoto množství jsou aspoň dva z bodů $x, a_2, \ldots, a_n$, pak $P_2(x) + (x)$ jest obecný strom podle 44. Nechť tedy při každé volbě y, $(y) \subset P_2(x) - \sum_{r=2}^{n} (a_r)$, množství $P_2(x) + (x)$ má právě dvě komponenty $S_1(y)$, $S_2(y)$, z nichž prvá obsahuje *jediný* z n bodů $x, a_2, \ldots, a_n$. Stačí dokázati, že při žádné volbě bodu y v $P_2(x) - \sum_{r=2}^{n} (a_r)$ není bod x v $S_1(y)$; neboť pak $P_2(x) + (x) = I(a_2, \ldots, a_n, x)$ jest obecný strom podle důkazu v odst. 45.—47. Kdyby však při nějaké volbě bodu y bod x náležel do $S_1(y)$, množství $S_1(y) + P_1(x) = S_1(y) + [P_1(x) + (x)]$ bylo by souvislé podle 12. Avšak

$$S_1(y) + S_2(y) + P_1(x) = [(P_2(x) + (x)) - (y)] + P_1(x) = [P_1(x) + (x) + P[_2(x)] - (y) = R - (y),$$

tedy

$$[S_1(y) + P_1(x)] + S_2(y) = P_1(y) + P_2(y).$$

Sčítanci na levo jsou souvislí, na pravo oddělení; tedy podle 11. buďto

$$S_1(y) + P_1(x) = P_1(y),\ S_2(y) = P_2(y)$$

nebo

$$S_1(y) + P_1(x) = P_2(y),\ S_2(y) = P_1(y).$$

Druhý případ je však nemožný, neboť $S_2(y)$ obsahuje body $a_2, \ldots, a_n$, kdežto $P_1(y)$ obsahuje jediný z bodů $a_1, \ldots, a_n$. Tedy $S_1(y) + P_1(x) = P_1(y)$. Avšak bod a_1 náležel by do $P_1(x)$ a bod x do $S_1(y)$; tedy by $P_1(y)$ obsahovalo body a_1, x, takže by bylo $\nu(y) =$

$= a_1$, $(x) \subset P_1(y)$, tedy $(x) \subset A_1$. To je spor, neboť bod x byl zvolen v $R - \sum_{r=1}^{n} A_r$.

49. Singulární body obecného stromu R byly definovány topologickou vlastností; naproti tomu krajní body byly v odst. 37. definovány pouze na základě určitého vytvoření obecného stromu. Lze však také krajní body obecného stromu definovati topologickou vlastností: Nechť v je bod obecného stromu R. Bod v je krajním bodem pro R tehdy a jen tehdy, když $S \subset R$, $S \neq 0$ je souvislé, kdykoli $S + (v)$ je souvislé. *Důkaz.* Nechť *předně* bod v není vrcholem pro R, nýbrž náleží třeba straně S_λ. Pak $S = S_\lambda - (v)$ není souvislé (v. 29.), avšak $S + (v) = S_\lambda$ je souvislé. Nechť *za druhé* bod v je vrcholem, nikoli však krajním bodem pro R. Pak existují dvě různé strany S_λ, S_μ obecného stromu R takové, že bod v je v $\overline{S}_\lambda . \overline{S}_\mu$. Množství S_λ, S_μ jsou otevřená v R, takže součet $S = S_\lambda + S_\mu$ má oddělené sčítance; tedy S není souvislé, avšak $S + (v) = [S_\lambda + (v)] + [S_\mu + (v)]$ je souvislé podle 15. a 12. Nechť *za třetí* bod v je krajním bodem pro R, tedy krajním bodem jediné strany S_λ. Orientujme S_λ tak, že v je koncový bod pro S_λ. Nechť $S \subset R$, $S \neq 0$ a nechť $S + (v)$ je souvislé; máme dokázati, že S je souvislé. Ježto $(R - S_\lambda) - (v) = \Sigma \overline{S}_\mu + \Sigma(v_\nu)$, kde S_μ probíhá od S_λ různé strany a v_ν od v různé vrcholy obecného stromu R, množství $(R - S_\lambda) - (v)$ jest uzavřené v R, takže součet $[(R - S_\lambda) - (v)] + (v)$ má oddělené sčítance. Kdyby bylo $S \subset R - S_\lambda$, podle 8. také součet $S + (v)$ měl by oddělené sčítance a množství $S + (v)$ nebylo by souvislé. Tedy $S . S_\lambda \neq 0$. Je-li x libovolný bod z S_λ, označme $P(x)$ ($Q(x)$) množství těch bodů z S_λ, které předcházejí x (následují za x). Mohli bychom podle 33. zavésti bod x jako nový vrchol; pak by (v. 31. (3)) $Q(x)$ byla jediná strana s krajním bodem v; z toho následuje, že jako bylo $SS_\lambda \neq 0$, je také $SQ(x) \neq 0$ při libovolné volbě bodu x v S_λ. Ježto $SS_\lambda \neq 0$, zvolme x v SS_λ. Dokážeme, že $Q(x) \subset S$. V opačném případě mohli bychom zvoliti $(y) \subset Q(x) - S$. Ježto $SQ(y) \neq 0$, zvolme $(z) \subset S . Q(y)$. Podle 33. můžeme zavésti body x, z jako nové vrcholy; bod x bude pak počáteční a bod z koncový bod nové strany $T = Q(x) - [Q(z) - (z)]$ a bude $(y) \subset T$. Podle důkazu ve 35. bude $R - (y) = A + B$ s oddělenými sčítanci, z nichž prvý (druhý) obsahuje x (z). Tedy $AS \neq 0 \neq BS$. To je spor proti 11., neboť $(y) \subset Q(x) + S$, takže $S + (v)$ je souvislá část $R - (y)$. Tím je dokázáno, že $Q(x) \subset S$. Viděli jsme, že, když bod x zavedeme jako nový vrchol, strana S_λ se nahradí stranou $Q(x)$; je to tedy pouze dovolená změna vytvoření obecného stromu R, budeme-li předpokládati, že $S_\lambda \subset S$. Nechť nyní $S = A + B$ s oddělenými sčítanci; při vhodném označení podle 11. $S_\lambda \subset A$. Tedy $B \subset (R -$

$-S_\lambda) - (v)$, takže součet $B + (v)$ má oddělené sčítance. Tedy podle 9. také součet $(A + (v)) + B$ má oddělené sčítance. Avšak $(A + (v)) + B = S + (v)$ je souvislé; tedy $B = 0$. Tedy S je souvislé.

*

Sur les ensembles connexes irréductibles entre n points.

(Extrait de l'article précédent.)

Soient

$$v_1, v_2, \ldots, v_k \; (k = 2, 3, \ldots) \tag{1}$$

des points et

$$S_1, S_2, \ldots, S_l \; (l = 1, 2, 3, \ldots) \tag{2}$$

des sousensembles ouverts d'un espace topologique R. Soit

$$R = \sum_{\mu=1}^{k} (v_\mu) + \sum_{\lambda=1}^{l} S_\lambda,$$

les $k + l$ sommandes à droite étant disjoints deux à deux. Pour $1 \leqq \lambda \leqq l$ soit

$$\bar{S}_\lambda = S_\lambda + \sum_{p=1}^{r} (a_p) + \sum_{q=1}^{s} (b_q), \tag{3}$$

les $r + s$ points a_p et b_q figurant dans la suite (1); en outre, supposons que, pour $1 \leqq \lambda \leqq l$, $1 \leqq p \leqq r$ et $1 \leqq q \leqq s$, l'ensemble $\bar{S}_\lambda$ soit connexe irréductible entre a_p et b_q. Supposons que, pour $1 \leqq \lambda < \mu \leqq l$, il existe des indices $\nu_0, \nu_1, \ldots, \nu_t$ $(t = 1, 2, \ldots)$ tels que $\nu_0 = \lambda$, $\nu_t = \mu$ et $\bar{S}_{\nu_{i-1}} \cdot \bar{S}_{\nu_i} \neq 0$ pour $1 \leqq i \leqq t$. Supposons que pour chaque μ $(1 \leqq \mu \leqq k)$ il existe au moins une valeur de λ $(1 \leqq \lambda \leqq l)$ telle que $(v_\mu) \subset \bar{S}_\lambda$. Enfin si, pour $1 \leqq \lambda \leqq l$, on choisit des points a_p et b_q (*voir* (3)), supposons qu'il soit impossible de déterminer des indices $\nu_0, \nu_1, \ldots, \nu_t$ $(t = 0, 1, 2, \ldots;$ $1 \leqq \nu_i \leqq l$ et $\nu_i \neq \lambda$ pour $0 \leqq i \leqq t)$ de manière que l'on ait $(a_p) \subset \bar{S}_{\nu_0}$, $(b_q) \subset \bar{S}_{\nu_t}$ et $\bar{S}_{\nu_{i-1}} \cdot \bar{S}_{\nu_i} \neq 0$ pour $1 \leqq i \leqq t$. Un point v de l'espace R soit appelé *singulier* lorsque l'ensemble $R - (v)$ est connexe. Tous les points singuliers de R figurent dans la suite (1). Le point v_μ $(1 \leqq \mu \leqq k)$ soit appelé une *extrémité* de R si l'inclusion $(v_\mu) \subset \bar{S}_\lambda$ n'est valable que pour une seule valeur de λ $(1 \leqq \lambda \leqq l)$. L'espace R possède au moins deux extrémités; chaque extrémité est nécessairement un point singulier; mais il peut arriver aussi qu'il existe des points singuliers qui ne sont pas des extrémités. Un point v de R en est une extrémité s'il n'existe aucun sousensemble S non connexe de R tel que l'ensemble $S + (v)$ soit connexe; et cette propriété est caractéristique pour les extrémités. Si $p_1, p_2, \ldots, p_n$ sont tous les points singuliers de R, l'espace R est *connexe irréductible entre les points* $p_1, p_2, \ldots, p_n$: ceci signifie que R est connexe et qu'aucun vrai sousensemble connexe de R ne peut contenir simultanément les n points $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Réciproquement, si un espace topologique R est connexe irréductible entre m points $q_1, q_2, \ldots, q_m$, alors R a la structure qui vient d'être décrite et tous les points singuliers de R figurent dans la suite $q_1, q_2, \ldots, q_m$.