Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Úlohy

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 18 (1889), No. 3, 137--142

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121338

Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1889

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://project.dml.cz

jest z prvu ku ose úseček, na niž nanesena jest intensita pole, konvexní, od intensity as 15000 abs. jedn. však lze extrapolovati dle zákona přímky. Rozumí se, že bedlivý zřetel při tom nutno míti k temperatuře, a nadto musí býti spirála kolmo postavena ku směru silokřivek, ve kterémž případě má maximum odporu.

(*Elektrotech. Zeitschrift*, *1888, str. 340—343.*)

Úlohy.

Řešení úlohy 1.

(Zaslal p. *Aug. hrabě Wodzicki* v Kościelnikách.)

Užijeme-li zkráceného označení

$$\sqrt[5]{x+a}=u,\quad \sqrt[5]{x-a}=v,\quad \sqrt[5]{2x}=t,$$

nabude rovnice daná podoby

$$u+v=t;$$

zmocnivše pěti a zjednodušivše, obdržíme

$$uv\,(u^3+2u^2v+2uv^2+v^3)=0$$

čili, po snadné úpravě,

$$uvt\,(t^2-uv)=0.$$

Kladouce $u=0$, najdeme $x_1=-a$;

„ $v=0$, „ $x_2=+a$;

„ $t=0$, „ $x_3=0$;

„ $t^2-uv=0$, „ $x_{4,5}=\pm\dfrac{ai\sqrt{3}}{3}$.

Správné řešení úlohy této zaslali pp.: *Jos. Nosek* z VIII. tř., *Arnošt Lilienfeld* a *J. Zámečník* ze VII. tř. g. v Jičíně, *Bohuslav Khom*, *Otakar Trnka* a *Karel Volný* ze VII. tř. r. v Pardubicích, *V. Dvořák*, *Boh. Novák* a *Em. Kopecký* z VIII. tř. v Táboře, *Emil Battík*, *Antonín Doležal*, *Vítězslav Kopista* z VIII. tř. a *Frant. Palata* ze VII. tř. g. v Chrudimi, *Lad. St. Rybka* ze VII. tř. r. v Brně, *Fr. Šoreys* ze VII. tř. g. v Ml. Boleslavi, *Richard Klenka* ze VI. tř. r. v Karlíně, *František Císař* ze VII. tř., *Vincenc Peřina* a *Karel Čekan* ze VI. tř, r. vyššího real. gym. na Malé Straně v Praze, *Josef Smrt* z VIII.

tř. v Písku, *Jan Stejskal* a *Josef Janele* z VIII. tř. v Jindř Hradci.

Řešení úlohy 2.

(Zaslal p. *Emil Battík*, stud. VIII. tř. v Chrudimi.)

V trojúhelníku ABC budiž $CD = p$ příčka půlící úhel γ sevřený stranami $BC = a$, $AC = b$. Harmonický průměr těchto stran jest

$$h = \frac{2ab}{a+b}.$$

Prodloužíme-li stranu BC o délku $CE = AC$, bude $AE \parallel CD$, a tedy

$$CD : EA = BC : BE$$

čili

$$p : 2b \cos\frac{\gamma}{2} = a : (a+b);$$

protož jest

$$p = \frac{2ab}{a+b} \cos\frac{\gamma}{2}$$

a tudíž, jak tvrzeno, $p < h$.

Jelikož harmonický průměr dvou veličin jest menší než jich průměr geometrický i arithmetický, jest p menší také než geometrický i než arithmetický průměr stran a, b.

Správné řešení úlohy této zaslali pp.: *Emil Červinka* a *Karel Čekan* ze VI. tř. r. vyšš. r. g. na Malé Straně v Praze, *Aug. hrabě Wodzicki* v Kościelnikách, *Jan Stejskal* z VIII. tř. v Jindř. Hradci, *Bohuslav Khom* a *Otakar Trnka* ze VII. tř. r. v Pardubicích, *Josef Smrt* z VIII. tř. v Písku a *Frant. Šoreys* ze VII. tř. g. v Mladé Boleslavi.

Řešení úlohy 3.

(Zaslal p. *Bohuslav Khom*, stud. VII. tř. r. v Pardubicích.)

V lichoběžníku ABCD označme půdice $AB = a$, $DC = b$, ramena $AD = c$, $BC = d$ a úhlopříčny $AC = m$, $BD = n$, dále budiž $\sphericalangle BAD = \alpha$, $\sphericalangle ABC = \beta$. I jest pak

$$m^2 = b^2 + c^2 + 2bc \cos\alpha$$
$$n^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos\alpha,$$

z čehož po vyloučení úhlu α plyne

(1) $$am^2 + bn^2 = (a + b)(ab + c^2).$$

Podobně vyloučivše β z rovnic

$$m^2 = a^2 + d^2 - 2ad \cos \beta$$
$$n^2 = b^2 + d^2 + 2bd \cos \beta,$$

obdržíme

(2) $$bm^2 + an^2 = (a + b)(ab + d^2).$$

Z rovnic (1) a (2) nalezneme

$$m = \sqrt{ab + \frac{ac^2 - bd^2}{a - b}}, \qquad n = \sqrt{ab + \frac{ad^2 - bc^2}{a - b}},$$

čímž úloha řešena.

Poznámka. Odečtením rovnice (2) od (1) vyjde jednoduchá relace

$$\frac{a - b}{a + b} = \frac{c^2 - d^2}{m^2 - n^2}. \text{*)}$$

Správné řešení úlohy této zaslali pp.: *Jan Stejskal* a *Josef Janele* z VIII. tř. v Jindř. Hradci, *Josef Smrt* z VIII. tř. v Písku, *Lad. St. Rybka* ze VII. tř. r. v Brně, *Aug. hrabě Wodzicki* v Kościelnikách, *Karel Volný* a *Otakar Trnka* ze VII. tř. r. v Pardubicích, *Jos. Nosek* z VIII. tř. v Jičíně, *Fr. Šoreys* ze VII. tř. g. v Ml. Boleslavi, *František Císař* ze VII. tř. r. vyššího real. gymn. na Malé Straně v Praze, *Bohumil Fukala* ze VII. tř. g. ve Val. Meziříčí, *Bohumil Novák* a *V. Dvořák* z VIII. tř. v Táboře, *Antonín Doležal*, *Vítězslav Kopista* a *Emil Battík* z VIII. tř. a *Arnošt Rosa* ze VI. tř. g. v Chrudimi.

Řešení úlohy 4.

Budiž O střed pravidelného osmistěnu, jehož osy jsou

$$A_1A_2 = B_1B_2 = C_1C_2 = 2m.$$

Zvolme kdekoli bud P a označme $OP = n$; mimo to buď

$$A_1P = a_1, \quad B_1P = b_1, \quad C_1P = c_1,$$
$$A_2P = a_2, \quad B_2P = b_2, \quad C_2P = c_2,$$
$$\sphericalangle A_1PA_2 = \alpha, \quad \sphericalangle B_1PB_2 = \beta, \quad \sphericalangle C_1PC_2 = \gamma.$$

Z trojúhelníka A_1A_2P, ve kterém znamenejme $\sphericalangle A_1OP = \alpha'$, obdržíme

$$a_1^2 = m^2 + n^2 - 2mn \cos \alpha'$$
$$a_2^2 = m^2 + n^2 + 2mn \cos \alpha'$$

*) Viz: *Šanda*, Měřictví pro vyšší třídy středních škol. II. vyd. Díl. I. Str. 213.

čili v jiné úpravě

$$a_1^2 + a_2^2 = 2(m^2 + n^2)$$
$$a_1^2 - a_2^2 = -4mn\cos\alpha'.$$

Odvodivše obdobné rovnice z trojúhelníků B_1B_2P a C_1C_2P, najdeme z nich relace

(1) $(a_1^2 + a_2^2)^2 + (b_1^2 + b_2^2)^2 + (c_1^2 + c_2^2)^2 = 12(m^2 + n^2)^2$,

(2) $(a_1^2 - a_2^2)^2 + (b_1^2 - b_2^2)^2 + (c_1^2 - c_2^2)^2 = 16m^2n^2$,

jichž sečtením plyne

(3) $a_1^2a_2^2 + b_1^2b_2^2 + c_1^2c_2^2 = 3m^4 + 2m^2n^2 + 3n^4$.

Z trojúhelníka A_1A_2P vysvítá dále rovnice

$$4m^2 = a_1^2 + a_2^2 - 2a_1a_2\cos\alpha,$$

odkud se zřetelem k vztahům dřívějším ustanovíme

$$\sec\alpha = \frac{a_1a_2}{n^2 - m^2}.$$

Obdobné hodnoty mají $\sec\beta$ a $\sec\gamma$, tak že jest

$$\sec^2\alpha + \sec^2\beta + \sec^2\gamma = \frac{a_1^2a_2^2 + b_1^2b_2^2 + c_1^2c_2^2}{(u^2 - m^2)^2}$$

čili dle vzorce (3)

(4) $$\sec^2\alpha + \sec^2\beta + \sec^2\gamma = \frac{3m^4 + 2m^2n^2 + 3n^4}{(n^2 - m^2)^2}.$$

Je-li bod P na vepsané v osmistěn ploše kulové, jest

$$n = \frac{m}{\sqrt{3}}$$

a tudíž $\sec^2\alpha + \sec^2\beta + \sec^2\gamma = 9$

čili $\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{tg}^2\beta + \operatorname{tg}^2\gamma = 6.$

Řešení úlohy této zaslal p. *Rudolf Kricner,* stud. v Curychu.

Úloha 19.

Má se dokázati vzorec

$$\sum_{\alpha=0}^{n}\binom{x-\alpha}{m-\alpha} = \binom{x+1}{m} - \binom{x-n}{m-n-1},$$

v němž x značí libovolnou veličinu, m a n pak čísla celistvá kladná, při čemž zároveň dlužno symbol $\binom{z}{\beta}$ nahraditi nullou, je-li β záporné.

Docent M. Lerch.

Úloha 20.

Do daného trojúhelníka ABC má se vepsati lichoběžník MNPQ, jsou-li dány jeho strany MN $= a$, PQ $= b$, směr základen MQ, NP, a spočívá-li strana MN na základně AB.

Prof. *V. Jeřábek.*

Úloha 21.

V trojúhelníku ABC protíná osa souměrnosti mediany CD $= m$ jdoucí vrcholem C prodlouženou základnu AB v bodu E. Je-li $m^2 = a^2 - b^2$, kdež a značí větší stranu BC a b menší stranu AC, jest ED = AB = c. *Týž.*

Úloha 22.

Jest dána kružnice středu O a v jejím bodu D stálá tečna CD. Vrchol C proměnlivého trojúhelníka ABC, jehož jedna strana AC jest tečnou kruhu v bodu A a druhá AB kolmou tetivou ku OD, jest bodem tečny CD. Má se vyšetřiti měř. místo těžiště M trojúhelníka ABC. *Týž.*

Úloha 23.

Tetiva MN a tečna T daného kruhu K v bodu A jsou spolu rovnoběžny. Tečna kruhu v bodu M protíná tečnu T v bodu P, a průsečík spojnice NP s kružnicí budiž B. Kolmice vztýčená v bodu B ku NP protíná prodloužený poloměr OA v bodu C. Dokázati jest: 1. že AC = OA, 2. že NP jest tečnou hyperboly určené středem O, vrcholem A a ohniskem C.

Týž.

Úloha 24.

V dané ellipse jest střed O vrcholem a tětiva MN přeponou trojúhelníka pravoúhlého MNO. Vyšetřiti jest:

1. geom. místo průmětu P středu O v tetivě MN,
2. geom. místo bodu L, který tětivu MN rozpoluje. *Týž.*

Úloha 25.

Vyšetřiti jest geom. místo bodu M, který rozpoluje část tečny kruhu omezené pevným průměrem OA a tečnou v bodu A.

Týž.

Úloha 26.

Jest dán trojúhelník ABC, jehož strany AB a BC jsou sobě rovny. V přímkách AB a BC jsou položeny krajní body P a Q proměnlivé úsečky PQ tak, že její průmět MN v přímce AC se stále rovná polovině základny AC. Má se vyšetřiti geom. místo průsečíku R přímek MQ a NP. *Prof. V. Jeřábek.*

Úloha 27.

Jsou dány dva kruhy soustředné K, K' a v nich pevné body A, B. Přímka jdoucí středem O těchto kruhů protíná kružnici K v bodu M a kružnici K' v bodu N, body tyto leží v přímce MN buďto po téže, nebo na protivných stranách středu O.

1. Přímky AN, MN a tečna kružnice K v bodu M určují trojúhelník pravoúhlý MNP. Vyšetřiti jest geom. místo vrcholu P.

2. Přímky BN, MN a tečna kružnice K v bodu M omezují trojúhelník pravoúhlý MNL. Nalézti jest geometrické místo vrcholu L.

Ve kterém případě jest měřické místo bodu P kardioida, geometrické místo bodu L trisektorie a strophoida, a kdy každé z nich cissoida Diokleova? *Týž.*

Úloha 28.

(Z deskriptivní geometrie.)

Zobraziti jest přímý kužel s kruhovou podstavou, jenž se oblinou svou obou průměten dotýká (polom. podst. $r = 4{\cdot}3$ *cm*, výška kužele $v = 7$ *cm*).

Vyhledati jest několik různých způsobův, jimiž úlohu tuto řešiti lze. Prof. *Fl. Pohl.*

Věstník literární.

A. Hlídka programů.

Dvacátá první výroční zpráva o obecním gymnasii realním spojeném s vyššími třídami gymnasialními