Matyáš Lerch

Příspěvky k theorii některých transcendent počtu integrálního. [V.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 49 (1920), No. 2-3, 81–91

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121360

Příspěvky k theorii některých transcendent počtu integrálního.

Píše **M. Lerch**.

(Pokračování.)

Vraťme se k integrálu $M(s, \omega)$; klaďme ux za x a pišme $\omega = uv$:

$$M(s, uv) = u^{s-1} \int_0^\infty e^{-ux} \frac{x^s dx}{v^2 + x^2};$$

vložíme

$$\frac{x}{v^2 + x^2} = -\sum_1^\infty \frac{\mathfrak{b}_\nu(v)}{\nu!} \left(e^{-x} - 1\right)^\nu,$$

a vyjde

$$M(s, uv) = -u^{s-1} \sum_{\nu=1}^\infty \frac{\mathfrak{b}_\nu(v)}{\nu!} \int_0^\infty e^{-ux} \left(e^{-x} - 1\right)^\nu x^{s-1}\, dx; \quad (23^a)$$

dosadíme hodnotu

$$\int_0^\infty e^{-ux} \left(e^{-x} - 1\right)^\nu x^{s-1}\, dx = \Gamma(s)\, \Delta^\nu \frac{1}{u^s} \qquad (23^b)$$

a obdržíme rozvoj

$$\frac{M(s, uv)}{\Gamma(s)} = -u^{s-1} \sum_1^\infty \frac{\mathfrak{b}_\nu(v)}{\nu!} \Delta^\nu u^{-s}; \qquad (23^c)$$

podobně se obdrží

$$\frac{M(s-1, uv)}{\Gamma(s)} = u^{s-2} \sum_0^\infty \frac{\mathfrak{a}_\nu(v)}{\nu!} \Delta^\nu u^{-s}. \qquad (23^d)$$

V trigonometrickém rozvoji (18) $(0 < \xi < 1)$

$$R(w + \xi, s) = A_0 + 2 \sum_1^\infty (A_\nu \cos 2\nu\xi\pi + B_\nu \sin 2\nu\xi\pi) \quad (18^1)$$

mají součinitelé A_ν a B_ν hodnoty $A(2\nu\pi, w)$ a $B(2\nu\pi, w)$, při čemž

$$A(\lambda, w) = \frac{M(s, \lambda w)}{w^{s-1}\Gamma(s)}, \quad B(\lambda, w) = \frac{\lambda w M(s-1, \lambda w)}{w^{s-1}\Gamma(s)},$$

tedy

$$A(\lambda, w) = -\left(\frac{u}{w}\right)^{s-1} \sum_{1}^{\infty} \frac{\mathfrak{b}_\nu(v)}{\nu!} \Delta^\nu u^{-s},$$

$$B(\lambda, w) = \lambda \left(\frac{u}{w}\right)^{s-2} \sum_{0}^{\infty} \frac{\mathfrak{a}_\nu(v)}{\nu!} \Delta^\nu u^{-s},$$

$$u = \frac{\lambda w}{v}; \quad A(0) = \frac{1}{s-1} w^{1-s},$$

při čemž v je pomocná veličina mezi $\frac{\pi}{3}$ a $\frac{5\pi}{3}$, na př. $v = 1{\cdot}05$.

Ježto λ je brzy veliké, hodí se tyto rozvoje k výpočtům i pro nevelká w. Totéž platí o rozvoji poloukonvergentním, jenž vychází z identity

$$\frac{M(s, \omega)}{\Gamma(s)} =$$

$$\sum_{0}^{n-1} (-1)^\nu \frac{(s, 2\nu+1)}{\omega^{2\nu+2}} + (-1)^n \frac{1}{\Gamma(s)\,\omega^{2n}} \int_0^\infty e^{-x} \frac{x^{s+2n} dx}{\omega^2 + x^2}, \tag{24}$$

neboť zde $\omega = \lambda w$.

Tato identita ukazuje, že $\frac{M(s, \omega)}{\Gamma(s)}$ je celistvá funkce transcendentní s, podobně $\frac{M(s-1)}{\Gamma(s)}$. Pro záporné celistvé $s = -m$ je

$$\left\{\frac{M(s, \omega)}{\Gamma(s)}\right\}_{s=-m} = \sum_{\nu=0,1,2,\ldots} (-1)^{\nu+1} \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-2\nu)}{\omega^{2\nu+2}} =$$

$$= -\frac{m}{\omega^2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{\omega^4} - \ldots$$

a z identity

$$\frac{M(s-1, \omega)}{\Gamma(s)} =$$

$$\sum_{0}^{n-1} (-1)^\nu \frac{(s, 2\nu)}{\omega^{\nu+2}} + (-1)^n \frac{1}{\Gamma(s)\,\omega^{2n}} \int_0^\infty e^{-x} \frac{x^{s+2n-1} dx}{\omega^2 + x^2} \tag{24^0}$$

plyne

$$\left\{\frac{M(s-1,\omega)}{\Gamma(s)}\right\}_{s=-m}=\underset{0,1,2,\dots}{\Sigma}(-1)^{\nu}\frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-2\nu+1)}{\omega^{2\nu+2}}=$$

$$=\frac{1}{\omega^2}-\frac{m(m-1)}{\omega^4}+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{\omega^6}-\dots$$

Píšeme-li $A(\lambda, w\,|\,s)$ atd. v případě obecném, máme tedy pro $s=-m$

$$A(\lambda, w\,|-m)=\underset{\nu=0,1,2,\dots}{\Sigma}(-1)^{\nu+1}(2\nu+1)!\binom{m}{2\nu+1}\frac{w^{m-2\nu-1}}{\lambda^{2\nu+2}},$$

$$B(\lambda, w\,|-m)=\underset{0,1,2,\dots}{\Sigma}(-1)^{\nu}(2\nu)!\binom{m}{2\nu}\frac{w^{m-2\nu}}{\lambda^{2\nu+1}}.$$

Řady (23) se v tomto případě $s=-m$ zakončí, čímž vycházejí další identity. Rovnice (18′) tu přejde v rozvoj Bernoulliova polynomu, ježto

$$R(w+\xi,-m)=-S_m^{*\prime}(w+\xi).$$

Dále nám rovnice (17′)

$$A(\lambda, w\,|\,s)=\int_0^\infty\frac{\cos\lambda x}{(w+x)^s}\,dx,\quad B(\lambda, w\,|\,s)=\int_0^\infty\frac{\sin\lambda x}{(w+x)^s}\,dx$$

dávají integrací po částech

$$\left.\begin{aligned}A(\lambda, w\,|\,s)&=\frac{s}{\lambda}B(\lambda, w\,|\,s+1),\\ B(\lambda, w\,|\,s)&=\frac{1}{\lambda w^s}-\frac{s}{\lambda}A(\lambda, w\,|\,s+1),\end{aligned}\right\}\qquad(25^a)$$

tedy při označení

$$B_s=B(\lambda, w\,|\,s),\quad A_s=A(\lambda, w\,|\,s)$$

$$A_s=\frac{s}{\lambda^2 w^{s+1}}-\frac{s(s+1)}{\lambda^2}A_{s+2},\quad B_s=\frac{1}{\lambda w^s}-\frac{s(s+1)}{\lambda^2}B_{s+2},\qquad(25^b)$$

z čehož vycházejí rozvoje poloukonvergentní (24) přímo

$$A_s=\frac{s}{\lambda^2 w^{s+1}}-\frac{(s,3)}{\lambda^4 w^{s+3}}+\frac{(s,5)}{\lambda^6 w^{s+5}}-\dots,$$

$$B_s=\frac{1}{\lambda w^s}-\frac{(s,2)}{\lambda^3 w^{s+2}}+\frac{(s,4)}{\lambda^5 w^{s+4}}-\dots$$

čili s udáním zbytků

$$\left.\begin{aligned} A(\lambda, w \mid s) &= \sum_0^{n-1} (-1)^\nu \frac{(s, 2\nu+1)}{\lambda^{2\nu+2} w^{s+2\nu+1}} + \\ &+ (-1)^n \frac{(s, 2n)}{\lambda^{2n}} A(\lambda, w \mid s+2n), \\ B(\lambda, w \mid s) &= \sum_0^{n-1} (-1)^\nu \frac{(s, 2\nu)}{\lambda^{2\nu+1} w^{s+2\nu}} + \\ &+ (-1)^n \frac{(s, 2n)}{\lambda^{2n}} B(\lambda, w \mid s+2n). \end{aligned}\right\} \quad (24^1)$$

Definice (17*) funkce $M(s, \omega)$ dává přímo

$$M(s+2) + \omega^2 M(s) = \Gamma(s+1). \quad (26)$$

V rovnicích (25^b) volme $\lambda = 1$, a položme

$$A_s \cos w \quad B_s \sin w = \int_{w}^{\infty} \frac{\cos x}{x^s} dx = J(s),$$

vyjde pak, píše-li se σ za s:

$$J(\sigma) + \sigma(\sigma+1) J(\sigma+2) = \frac{\sigma \cos w - w \sin w}{w^{\sigma+1}}.$$

Znamenejme

$$J(1-s) = \Phi(s)$$

a vložme $\sigma + 2 = 1 - s$; obdržíme

$$(\alpha) \quad s(s+1)\Phi(s) + \Phi(s+2) = - w^s [(s+1)\cos w + w \sin w].$$

Avšak

$$\Phi(s) = \int_0^\infty \cos x \,.\, x^{s-1} dx \quad \mathfrak{F}_1(s) = \Gamma(s) \cos \frac{s\pi}{2} - \mathfrak{F}_1(s),$$

$$\mathfrak{F}_1(s) = \int_0^w x^{s-1} \cos x \, dx = \sum_0^\infty (-1)^\nu \frac{w^{s+2\nu}}{(2\nu)!(s+2\nu)}; \quad (27)$$

vložíme-li to do (α), obdržíme

$$s(s+1)\mathfrak{F}_1(s) + \mathfrak{F}_1(s+2) = w^s [(s+1)\cos w + w \sin w].$$

Zde píši $s + 2\nu$ za s (funkce (27) je definována pro $s > 0$), násobím

$$\frac{(-1)^\nu}{(s, 2\nu+2)}$$

a sečtu pro $\nu = 0, 1, \ldots n-1$:

$$(-1)^\nu \frac{\mathcal{S}_1(s+2\nu)}{(s, 2\nu)} = (-1)^{\nu+1} \frac{\mathcal{S}_1(s+2\nu+2)}{(s, 2\nu+2)} +$$

$$+ (-1)^\nu \frac{w^{s+2\nu}}{(s, 2\nu+2)} [(s+2\nu+1)\cos w + w \sin w];$$

vyjde

$$\mathcal{S}_1(s, w) = \sum_{\nu=0}^{n-1} (-1)^\nu w^{s+2\nu} \frac{(s+2\nu+1)\cos w + w \sin w}{s(s+1)\ldots(s+2\nu+1)} +$$

$$+ (-1)^n \frac{\mathcal{S}_1(s+2n)}{(s, 2n)}, \tag{27*}$$

$$\lim_{n=\infty} \frac{\mathcal{S}_1(s+2n)}{(s, 2n)} = 0.$$

Podobně vyjde pro funkci

$$\mathcal{S}_2(s, w) = \int_0^w x^{s-1} \sin x \, dx = \sum_0^\infty (-1)^\nu \frac{w^{s+2\nu+1}}{(2\nu+1)!(s+2\nu+1)} \tag{28}$$

vyjádření

$$\mathcal{S}_2(s, w) = \sum_0^\infty (-1)^\nu w^{s+2\nu} \frac{(s+2\nu+1)\sin w - w\cos w}{s(s+1)\ldots(s+2\nu+1)}. \tag{28*}$$

Rozvinutí funkcí $A_s(w)$ a $B_s(w)$ pro malá w obsaženo je ve vzorcích

$$\left.\begin{aligned} H \equiv A_s(w)\cos w - B_s(w)\sin w &= \Gamma(1-s)\sin\frac{s\pi}{2} - \\ &\quad - \mathcal{S}_1(1-s, w), \\ K \equiv A_s(w)\sin w + B_s(w)\cos w &= \Gamma(1-s)\cos\frac{s\pi}{2} - \\ &\quad - \mathcal{S}_2(1-s, w), \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

při čemž $\mathcal{S}_1$ a $\mathcal{S}_2$ se určí řadami (27) a (28), při záporných s pak s výhodou řadami (27*) a (28*);

$$A_s(w) = \int_0^\infty \frac{\cos x \, dx}{(w+x)^s}, \qquad B_s(w) = \int_0^\infty \frac{\sin x \, dx}{(w+z)^s}.$$

Pro celistvá kladná s se pravé strany jeví v neurčitém tvaru $\infty - \infty$ a sice (ξ značí veličinu nekonečně malou) pro

$$s = 2n + 1 - \xi,$$

$$H = (-1)^n \Gamma(-2n + \xi) \cos\frac{\xi\pi}{2} - (-1)^n \frac{w^\xi}{\xi\,(2n)!} -$$

$$- \sum_{\nu \gtreqless n} (-1)^\nu \frac{w^{2\nu-2n}}{(2\nu)!\,2(\nu - n)}.$$

První dva členy

$$\sim \frac{(-1)^n}{\xi}\left\{\frac{\cos\frac{\xi\pi}{2}\,\Gamma(1+\xi)}{(1-\xi)(2-\xi)\ldots(2n-\xi)} - \frac{w^\xi}{(2n)!}\right\}$$

$$\sim \frac{(-1)^n}{(2n)!}\left\{\Gamma'(1) - \log w + 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2n}\right\};$$

podobně jeví se K pro $s = 2n + 2 - \xi$ ve tvaru

$$K = (-1)^{n+1}\Gamma(-2n - 1 + \xi) \cos\frac{\xi\pi}{2} - (-1)^n \frac{w^\xi}{(2n+1)!\,\xi} -$$

$$- \sum_{\nu \gtreqless n} (-1)^\nu \frac{w^{2(\nu-n)}}{(2\nu+1)!\,2(\nu - n)},$$

jenž se určí týmž způsobem:

$$\left.\begin{aligned}
\int_w^\infty \frac{\cos x\,dx}{x^{2n+1}} &= (-1)^n \frac{\psi(2n+1) - \log w}{(2n)!} - \\
&\quad - \sum_{\nu \gtreqless n}^{(0,1,2,\ldots)} (-1)^\nu \frac{w^{2(\nu-n)}}{(2\nu)!\,2(\nu - n)}, \\
\int_w^\infty \frac{\sin x\,dx}{x^{2n+2}} &= (-1)^n \frac{\psi(2n+2) - \log w}{(2n+1)!} - \\
&\quad - \sum_{\nu \gtreqless n}^{(0,1,2,\ldots)} (-1)^\nu \frac{w^{2(\nu-n)}}{(2\nu+1)!\,2(\nu - n)},
\end{aligned}\right\} \quad (30)$$

$$\psi(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}.$$

Tak obdržíme

$$\int_{0\cdot 3}^{\infty}\frac{\cos x\,dx}{x^5}=\frac{\psi(5)-\log 0\cdot 3}{24}-\left\{\frac{1}{0\cdot 3^4.(-4)}-\frac{1}{0\cdot 3^2.2(-2)}-\right.$$

$$\left.-\frac{0\cdot 3^2}{720\cdot 2}+\frac{0\cdot 3^4}{8!4}-\frac{0\cdot 3^6}{10!6}+\ldots\right\}=$$

$$=\frac{\psi(5)-\log 0\cdot 3}{24}+\frac{10^4}{4.3^4}-\frac{10^2}{4.3^2}+0\cdot 0000625,$$

$$\psi(5)=\frac{25}{12}-0\cdot 57721566.$$

Naproti tomu je zcela jednotný tvar pro

$$\lim_{s=2n}\left\{\Gamma(1-s)\sin\frac{s\pi}{2}\right\}=\lim_{s=2n}\frac{\pi\sin\frac{s\pi}{2}}{\Gamma(s)\sin s\pi}=(-1)^n\frac{\pi}{2(2n-1)!},$$

$$\lim_{s=2n+1}\left\{\Gamma(1-s)\cos\frac{s\pi}{2}\right\}=\lim_{s=2n+1}\frac{\pi\cos\frac{s\pi}{2}}{\Gamma(s)\sin s\pi}=(-1)^n\frac{\pi}{2(2n)!},$$

a tedy

$$\left.\begin{aligned}\int_w^{\infty}\frac{\cos x}{x^{2n}}dx&=(-1)^n\frac{\pi}{2(2n-1)!}-\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{\nu}\frac{w^{2\nu-2n+1}}{(2\nu)!(2\nu-2n+1)},\\ \int_w^{\infty}\frac{\sin x}{x^{2n+1}}dx&=(-1)^n\frac{\pi}{2(2n)!}-\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{\nu}\frac{w^{2\nu-2n+1}}{(2\nu+1)!(2\nu-2n+1)}.\end{aligned}\right\}\quad(31)$$

Řady (30) a (31) pro střední hodnoty n a w, kdy ostatní výrazy nejsou výhodny, se velmi dobře hodí. Na př.

$$\int_4^{\infty}\frac{\sin x}{x^5}dx=\frac{\pi}{48}-\frac{4^{-3}}{-3}+\frac{4^{-1}}{6(-1)}-\frac{4^1}{120.1}-\frac{4^3}{5040.3}-$$

$$-\frac{4^5}{9!5}+\ldots$$

Poslední člen $=-0\cdot 000564$, následující člen $\frac{56}{10^6}$, a potřebí tedy jen ještě člen $\frac{4^9}{13!9}=\frac{4}{10^6}$.

Též pro $w=6$ vystačíme již se členem $\frac{6^{15}}{19!\,15}$.

9.

Ve své práci *O hlavních vlastnostech integrálů Eulerových**) podal jsem jako zobecnění Raabeova integrálu vzorec platný pro celistvá kladná m, jenž se v užívané zde symbolice píše

$$\int_0^1 \log\Gamma(u+x)\cos 2m\pi(u+x)\,dx = \\ = \frac{1}{2m\pi}\left\{\frac{\pi}{2} + \sin 2mu\pi \log u - Si(2mu\pi)\right\}. \tag{32a}$$

Zde hodlám určiti analogický integrál, v němž funkce cos nahrazena funkcí sin:

$$J = \int_0^1 \log\Gamma(u+x)\sin 2m\pi(u+x)\,dx = \\ = \int_u^{u+1} \log\Gamma(x)\sin 2mx\pi\,dx.$$

Patrně

$$\frac{dJ}{du} = \log u \sin 2mu\pi,$$

tedy

$$J = \int \log u \sin 2mu\pi\,du = -\frac{\cos 2mu\pi}{2m\pi}\log u + \int\frac{\cos 2mu\pi}{2mu\pi}\,du;$$

vložíme-li sem hodnotu (20)

$$\int\frac{\cos 2mu\pi}{2mu\pi}\,du = \frac{1}{2m\pi}\int_\infty^{2mu\pi}\frac{\cos x}{x}\,dx + C = C + \frac{1}{2m\pi}\,Ci\,(2mu\pi),$$

vyjde

$$J = C - \frac{\cos 2mu\pi}{2m\pi}\log u + \frac{1}{2m\pi}\,Ci\,(2mu\pi),$$

---

*) Věstník král. čes. Spol. nauk r. 1889, str. 216.

a zbývá jen určiti konstantu C. Limitní přechod $u = 0$ dává vzhledem k okolnosti $Ci(\xi) - \log \xi \sim E$

$$\int_0^1 \log \Gamma(x) \sin 2mx\pi \, dx = C + \frac{E + \log(2m\pi)}{2m\pi},$$

kde E jest Eulerova konstanta.

Integrál na levé straně je znám (na př. z řady Kummerovy) a má hodnotu

$$\frac{\log m}{2m\pi} + \frac{E + \log(2\pi)}{2m\pi},$$

takže vychází $C = 0$, a tím

$$\int_0^1 \log \Gamma(u + x) \sin 2m\pi (u + x) \, dx = \frac{1}{2m\pi} \{Ci(2mu\pi) - \cos 2mu\pi \log u\}. \tag{32b}$$

Ze vzorců (32^a) a (32^b) plyne bezprostředně při zkrácení

$$\omega = 2mu\pi$$

$$\int_0^1 \log \Gamma(u + x) \cos 2mx\pi \, dx = \frac{1}{2m\pi} \left\{\frac{\pi}{2} \cos \omega + \sin \omega \, Ci(\omega) - \cos \omega \, Si(\omega)\right\} \tag{33a}$$

$$\int_0^1 \log \Gamma(u + x) \sin 2mx\pi \, dx = \frac{1}{2m\pi} \left\{-\frac{\pi}{2} \sin \omega - \log u + \sin \omega \, Si(\omega) + \cos \omega \, Ci(\omega)\right\}. \tag{33b}$$

Je však dle vzorců ($20'$)

$$\left[\frac{\pi}{2} - Si(\omega)\right] \sin \omega - Ci(\omega) \cos \omega = A(\omega),$$

$$\left[\frac{\pi}{2} - Si(\omega)\right] \cos \omega + Ci(\omega) \sin \omega = B(\omega),$$

kde A a B jsou dány vzorci (19[1]) a (18[2]); tedy máme

$$\int_0^1 \log \Gamma(u+x) \cos 2mx\pi\, dx = \frac{B(2mu\pi)}{2m\pi},$$

$$\int_0^1 \log \Gamma(u+x) \sin 2mx\pi\, dx = -\frac{A(2mu\pi)+\log u}{2m\pi};$$

připojíme-li ještě integrál Raabeův

$$\int_0^1 \log \Gamma(u+x)\, dx = u \log u - u + \log \sqrt{2\pi},$$

obdržíme Fourierovu řadu $(0 < x < 1)$

$$\log \Gamma(u+x) = u \log u - u + \log \sqrt{2\pi} - \log u \sum_1^\infty \frac{\sin 2mx\pi}{m\pi} +$$
$$+ \sum_1^\infty \left(\frac{B(2mu\pi)}{m\pi} \cos 2mx\pi - \frac{A(2mu\pi)}{m\pi} \sin 2mx\pi \right),$$

takže vzhledem k identitě

$$\sum_1^\infty \frac{\sin 2mx\pi}{m\pi} = \frac{1}{2} - x$$

vychází

$$\log \Gamma(u+x) = \left(u + x - \frac{1}{2}\right) \log u - u + \log \sqrt{2\pi} +$$
$$+ \sum_{m=1}^\infty \left(\frac{B(2mu\pi)}{m\pi} \cos 2mx\pi - \frac{A(2mu\pi)}{m\pi} \sin 2mx\pi \right), \tag{33}$$
$$0 < x < 1.$$

Klademe-li $x = v$, podruhé $x = 1 - v$, a sečteme-li výsledky, při čemž dlužno předpokládati $0 < v < 1$, vyjde

$$\log \{\Gamma(u+v)\Gamma(u+1-v)\} = 2u \log u - 2u + 2 \log \sqrt{2\pi} +$$
$$+ \frac{2}{\pi} \sum_1^\infty \frac{\cos 2mv\pi}{m} B(2mu\pi),$$

$$B(2mu\pi) = \int_0^\infty e^{-2mu\pi x} \frac{dx}{1+x^2},$$

kterýžto vzorec přichází v naší práci čís. 37 z VIII. ročníku Rozprav české Akademie.

Podobně vychází z (33)

$$\log \frac{\Gamma(u+1-x)}{\Gamma(u+x)} = (1-2x)\log u + \frac{2}{\pi}\sum_{1}^{\infty} \frac{\sin 2m x\pi}{m} A(2mu\pi),$$

$$A(2mu\pi) = \int_0^{\infty} e^{-2mu\pi x} \frac{x\,dx}{1+x^2}.$$

Nahradí-li se v (33^a) a (33^b) funkce $\log \Gamma(u+x)$ poloukonvergentní řadou, již uvažovali Sonin a Hermite, vyjdou hořejší poloukonvergentní řady pro funkce $A(\omega)$ a $B(\omega)$; v nich $\omega = 2mu\pi$, tedy ve zvl. případě $m = 1$, $\omega = 2u\pi$, takže již $u = 4$ vyžaduje $\omega > 24$. To vysvětluje, že v řadách těch bylo dlužno se omeziti na ω značně veliká. (Pokračování.)

O uzavřených konvexních křivkách.

Napsal **Bohuslav Hostinský**.

(Dokončení.)

9. Plošný obsah uzavřené konvexní křivky definované rovnicí $p = f(\alpha)$ ustanovíme jakožto limitu součtu; sečítati jest nekonečně malé trojúhelníky, jež mají za základnu element oblouku ds, za výšku p a vrchol v počátku O (jenž jest uvnitř křivky). Vychází

$$P = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} p\,ds = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} f(f+f'')\,d\alpha = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (f^2 - f'^2)\,d\alpha$$

poněvadž částečná integrace dává

$$\int_0^{2\pi} f f''\,d\alpha = [f.f']_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} f'^2 d\alpha = -\int_0^{2\pi} f'^2 d\alpha.$$

Vyjádříme-li pak funkci $f(\alpha)$ trigonometrickou řadou jako v odstavci 3., obdržíme

$$P = \pi a_0^2 - \frac{\pi}{2}\sum_{2}^{\infty}(n^2-1)(a_n^2+b_n^2).$$