Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Josef Zahradníček
Několik poznámek k padostrojům. [II.]

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 57 (1928), No. 3-4, D37--D39

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121370

Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1928

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://project.dml.cz

proximationen, Teubner, Leipzig, 1911). Možno ji dobře doporučiti jako dobrou vyučovací pomůcku těm, kdo nechtí se pustiti do studia uvedených větších děl. Také cenou je přístupná (asi 20 Kč).

Ostatně studium uvedených spisů je velmi vděčné a i snaživý středoškolský student, chce-li samostatně studovati, najde tam mnoho, co mu bude snadno přístupné a také dobrou přípravou ke studiu dalšímu.

JOSEF ZAHRADNÍČEK:

Několik poznámek k padostrojům.

(Dokončení.)

Duffova[6]) nakloněná rovina.

Řezem kolmým k délce »roviny« této jest oblouk kruhový. Mezi dvěma lištami 1 *cm* tlustými, 5 *cm* širokými, spojenými ve tvaru obdélníka o rozměrech vnitřních 100 × 10 *cm*, takže delší příčky připevněny jsou nad kratšími, jest upevněn pruh tmavého hladkého papíru, tak aby mezi příčkami byla vytvořena část plochy válcové. Posypeme-li nakloněnou »rovinu« takto upravenou práškem plavuňovým a mírně ji na jednom konci podložíme, pohybuje se kulička ocelová v ose roviny spuštěná po přímce, mimo ni pak spuštěná, po křivce — protáhlá vlnovka. Dráha kuličky ukazuje zřejmě, že pohyb po nakloněné rovině není rovnoměrný. Jedná se tu o výslednici dvou pohybů vyjádřených přibližně vztahy:

$$x = \tfrac{1}{2} g \sin \alpha \,.\, t^2, \quad y = a \sin \frac{2\pi}{T} t,$$

kde osa x je položena do směru roviny, povrchové přímky válce, osa y do směru kolmého k x a poloměru válce za předpokladu malých výchylek tímto směrem.

Přesněji provedeme matematický rozbor tohoto pohybu takto: Osy souřadné mysleme si s »rovinou« pevně spojeny. Rovnice plochy jest:

$$x = \text{libovolné}, \quad y^2 + (z - r)^2 = r^2,$$

kde r je poloměr válcové plochy, osa z pak směřuje směrem poloměru. Duffova »rovina« ať jest odkloněna — osa x — od roviny vodorovné o úhel α. Složky tíže působící na hmotný bod m na rovině se nalézající jsou

$$mg \sin \alpha, \quad 0, \quad -mg \cos \alpha,$$

---

6) School of science 147, 1909, Hahn, Leitfaden für physikalische Schülerübungen 107, Berlin 1909.

složky síly pohyb omezující ve smyslu Lagrangeovu

$$\lambda\frac{\partial f}{\partial x},\quad \lambda\frac{\partial f}{\partial y},\quad \lambda\frac{\partial f}{\partial z},$$

kde

$$f \equiv y^2 + (z - r)^2 - r^2 = 0$$

je svrchu uvedená rovnice plochy, po níž se pohyb děje.

Jsou tedy pohybové rovnice bodu m

$$\begin{aligned} mx'' &= mg \sin \alpha, \\ my'' &= 2\lambda y, \\ mz'' &= - mg \cos \alpha + 2\lambda (z - r). \end{aligned}$$

Integrálem první rovnice jest

$$x = \tfrac{1}{2} g \sin \alpha \,.\, t^2$$

při počátečních podmínkách

$$t = 0, \ldots \quad x = 0, \quad x' = 0;$$

z dalších dvou rovnic plyne vyloučením λ

$$yz'' - (z - r)\, y'' = - gy \cos \alpha;$$

zavedeme-li sem

$$y = r \sin \varphi, \quad r - z = r \cos \varphi,$$

dostáváme rovnici

$$r\varphi'' = - g \cos \alpha \sin \varphi.$$

Odtud obdržíme integrací

$$\tfrac{1}{2} r \varphi'^2 = g \cos \alpha \cos \varphi + C.$$

V čase $t = 0$ budiž

$$\varphi = \varphi_0, \quad \varphi' = 0,$$

pak jest

$$C = - g \cos \alpha \cos \varphi_0$$

a tedy

$$t = \sqrt{\frac{r}{2g \cos \alpha}} \int_{\varphi}^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \varphi_0}}.$$

V případě malých výchylek

$$\cos \varphi = 1 - \tfrac{1}{2} \varphi^2, \quad \cos \varphi_0 = 1 - \tfrac{1}{2} \varphi_0^2,$$

zjednoduší se tento eliptický integrál na

$$\sqrt{\frac{g \cos \alpha}{r}}\, t = \int_{\varphi}^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{\varphi_0^2 - \varphi^2}} = \tfrac{1}{2}\pi - \arc \sin \frac{\varphi}{\varphi_0}$$

a je tedy

$$\varphi = \varphi_0 \cos\left(\sqrt{\frac{g\cos\alpha}{r}}\,t\right).$$

Rovnice dráhy jsou

$$x = \tfrac{1}{2} g \sin\alpha \,.\, t^2, \quad y = r\sin\varphi, \quad z = r(1 - \cos\varphi),$$

kde φ má uvedenou hodnotu.

Dráha kuličky protíná osu x-ovou v době, kdy $\varphi = 0$, t. j.

$$\sqrt{\frac{g\cos\alpha}{r}}\,t = \tfrac{1}{2}(2n-1)\pi, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

a časový interval mezi dvěma průchody rovnovážnou polohou jest

$$T = \pi\sqrt{\frac{r}{g\cos\alpha}};$$

pro $\alpha = 0$ máme tu vztah známý z jednoduchého pohybu kyvadlového, $\alpha > 0$ z pohybu kyvadla Machova.

Z 2. nebo 3. rovnice pohybové vyloučením y případně z a dosazením za φ' a φ'' obdržíme pro sílu pohyb omezující

$$2r\lambda = -mg\cos\alpha\,(3\cos\varphi - 2\cos\varphi_0);$$

dosahuje maxima v případě $\varphi = 0$ a minima $\varphi = \varphi_0$.

Měření provede se podobně, jako jest naznačeno u padostroje Lippichova — po jedné vlně —, osu vlnovky napíše kulička spuštěná tak, aby vyznačila přímku.

Panu prof. dru B. Macků srdečně děkuji za laskavé pokyny a rady při práci této mi udělené.

Fysikální ústav Masarykovy university v Brně.

Dr. JOS. ŽĎÁRSKÝ:

Derivace funkce exponenciální.

Ve svém článku navrhuji způsob, kterým dospěti lze v VII. tř. reálky k definici exponenciály e a derivaci exponenciální a logaritmické funkce; způsob tento zdá se vhodnějším pro účel středoškolský než ten, kterého se obvykle užívá. Při tom nechávám úplně stranou otázku, má-li se na střední škole jíti tak daleko, a rovněž otázku, do jaké až míry dbáti jest vědecké přesnosti při výkladu difer. počtu na střední škole.

Předpokládám dobu, kdy žáci znají již derivace algebr. a goniom. funkcí, derivaci funkce funkce, hlavní pravidla o nekoneč-