Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Josef Žďárský

Derivace funkce exponenciální

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 57 (1928), No. 3-4, D39--D42

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121371

a je tedy

$$\varphi = \varphi_0 \cos\left(\sqrt{\frac{g \cos \alpha}{r}}\, t\right).$$

Rovnice dráhy jsou

$$x = \tfrac{1}{2} g \sin \alpha \,.\, t^2, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = r(1 - \cos \varphi),$$

kde φ má uvedenou hodnotu.

Dráha kuličky protíná osu x-ovou v době, kdy $\varphi = 0$, t. j.

$$\sqrt{\frac{g \cos \alpha}{r}}\, t = \tfrac{1}{2}(2n - 1)\pi, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

a časový interval mezi dvěma průchody rovnovážnou polohou jest

$$T = \pi \sqrt{\frac{r}{g \cos \alpha}};$$

pro $\alpha = 0$ máme tu vztah známý z jednoduchého pohybu kyvadlového, $\alpha > 0$ z pohybu kyvadla Machova.

Z 2. nebo 3. rovnice pohybové vyloučením y případně z a dosazením za φ' a φ'' obdržíme pro sílu pohyb omezující

$$2r\lambda = -mg \cos \alpha\, (3 \cos \varphi - 2 \cos \varphi_0);$$

dosahuje maxima v případě $\varphi = 0$ a minima $\varphi = \varphi_0$.

Měření provede se podobně, jako jest naznačeno u padostroje Lippichova — po jedné vlně —, osu vlnovky napíše kulička spuštěná tak, aby vyznačila přímku.

Panu prof. dru B. Macků srdečně děkuji za laskavé pokyny a rady při práci této mi udělené.

Fysikální ústav Masarykovy university v Brně.

Dr. JOS. ŽĎÁRSKÝ:

Derivace funkce exponenciální.

Ve svém článku navrhuji způsob, kterým dospěti lze v VII. tř. reálky k definici exponenciály e a derivaci exponenciální a logaritmické funkce; způsob tento zdá se vhodnějším pro účel středoškolský než ten, kterého se obvykle užívá. Při tom nechávám úplně stranou otázku, má-li se na střední škole jíti tak daleko, a rovněž otázku, do jaké až míry dbáti jest vědecké přesnosti při výkladu difer. počtu na střední škole.

Předpokládám dobu, kdy žáci znají již derivace algebr. a goniom. funkcí, derivaci funkce funkce, hlavní pravidla o nekonečných konverg. řadách, kriterium konvergence a rozvoj funkce v řadu podle věty Mac Laurinovy.

Vyjdeme-li za účelem definice exponenciály e (jak obvykle se děje) od určení limity

$$\lim_{n=\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

(viz Bydžovský-Vojtěch »Matem. pro nejv. třídu reálek« str. 40 a následující), musíme býti připraveni na to, že některý samostatněji myslící žák prohlásí za limitu výrazu jednotku, ježto limita výrazu v závorce $= 1$ a $1^n = 1$; nevím opravdu, jakým způsobem (žáku střední školy srozumitelným) bych přesvědčil žáka o jeho omylu (Lietzmann doporučuje za tím účelem počítati hodnotu výrazu postupně pro $n = 10, 100, 1000$, ale to není podle mého mínění dosti přesvědčující). Sledujme další postup výkladu v citované učebnici! »Ježto n má neomezeně růsti, lze je pokládati od počátku za tak veliké, že $\frac{x}{n}$ je (co do absolutní hodnoty) menší než 1. Pak lze užíti binomické řady i máme

$$(a)\qquad \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = 1 + x + \binom{n}{2}\left(\frac{x}{n}\right)^2 + \ldots + \binom{n}{k}\left(\frac{x}{n}\right)^k + \ldots$$

Lze však psáti pro každé k

$$(b)\qquad \binom{n}{k}\cdot\frac{1}{n^k} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!\; n^k} =$$

$$= \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\cdot\frac{1}{k!}.$$

Odtud plyne, že

$$\lim_{n=\infty}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = \frac{1}{k!},\quad \text{ježto } \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots \text{ se blíží s rostoucím } n \text{ nule}\ldots\text{«}$$

Proti tomuto postupu dá se namítati: Rovnice (a) jest zřejmě odvozena nejprve za předpokladu konečného n a pak provedeno limitování člen za členem zvlášť; zůstává otázkou, zda je přípustno takové limitování při nekonečně velikém počtu sčítanců. (V partii o nekonečných řadách bylo žákům častěji ukázáno, že pravidla platná pro součet s konečným počtem sčítanců nezůstávají vždy v platnosti, roste-li počet sčítanců do nekonečna.) Koeficient při k-té mocnině x jest upraven ve tvar součinu (b); při rostoucím k roste však počet činitelů neomezeně a zase jest otázkou, zda smíme v tomto součinu o nekonečně velikém počtu činitelů provésti limitování týmž způsobem (činitel za činitelem) jako při konečném počtu činitelů. Právě v tomto okamžiku mohl by žák namítnouti, proč máme nyní učiniti to, co jsme v původním součinu:

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \equiv \left(1+\frac{x}{n}\right).\left(1+\frac{x}{n}\right)\ldots\text{ in inf.}$$

učiniti nesměli.

Lietzmann (»Methodik des mathem. Unterrichts« II, str. 342 až 343) uvádí Schlömilchův doklad neoprávněnosti užitého postupu. Cituji:

»n-členná řada

$$\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\ldots, \tag{1}$$

kterou obdržíme podle binom. poučky, přejde pro $n=\infty$ v řadu

$$\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots \tag{2}$$

Stejnou hodnotu podává však také řada

$$\left[\frac{1}{1!}+\frac{1}{n^2}\right]+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{2}{n^2}\Big]+\left[\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\frac{3}{n^2}\right]+\ldots, \tag{3}$$

limitujeme-li člen za členem. Na druhé straně přesvědčíme se, sečteme-li členy přidané

$$\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n^2}+\ldots+\frac{n}{n^2}=\frac{1}{n^2}(1+2+\,+\ldots+n)=\tfrac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right),$$

že limita řady (3) jest o polovinu větší než limita řady (1), čímž neoprávněnost užitého postupu zdá se býti dostatečně prokázána.«

Způsob, který navrhuji k výpočtu derivace expon. funkce a^x a k definici exponenciály e, vyhýbá se tomuto nepříjemnému úskalí a má — podle mého názoru — jedinou slabinu, totiž nedoložený předpoklad existence derivace funkce a^x, s čímž se žák středoškolský spíše smíří než s nedostatky dříve uvedenými. Připustíme-li uvedený předpoklad existence, pak nebude v dalším výkladu mezer ani pochybností. Nyní k věci! Značí-li x nezávisle proměnnou, a konstantu a akcent derivaci, bude

$$(a^x)'=\lim_{\Delta x=0}\frac{a^{x+\Delta x}-a^x}{\Delta x}=a^x.\lim_{\Delta x=0}\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}.$$

Poslední limita nezávisí zřejmě na x čili jest konstantou závislou nejvýš na a (které se ve zlomku vyskytuje). Uvažujme nejprve určitě zvolené a a hodnotu příslušné limity označme písmenem k!

Pak můžeme psáti

$$(a^x)'=k\,.\,a^x \tag{4}$$

a tedy obecně

$$(a^u)'=k\,.\,a^u\,.\,u', \tag{5}$$

kde u značí libovolnou funkci proměnné x.

Označíme-li $a^{\frac{1}{k}}$ stručně písmenem e, bude podle (5)

$$(e^x)' \equiv (a^{\frac{1}{k}x})' = k \,.\, a^{\frac{1}{k}x} \,.\, \frac{1}{k}$$

čili

$$(e^x)' = e^x \tag{I}$$

t. j. e^x při postupném derivování zůstane nezměněno.

Rozvineme-li e^x v řadu podle Mac-Laurinovy věty, dostaneme řadu

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \ldots, \tag{II}$$

která jest konvergentní pro všechna x a která pro $x = 1$ definuje číslo

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots \tag{III}$$

Výraz $e = a^{\frac{1}{k}}$ představuje tedy určité číslo nezávislé na volbě základu a. Toto číslo e jest základem t. zv. přirozených logaritmů, a užijeme-li pro tyto logaritmy značky l, dostaneme z rovnice $e = a^{\frac{1}{k}}$ logaritmováním $\quad k = l\,a$

a tedy ze (4):

$$(a^x)' = a^x \,.\, l a. \tag{IV}$$

Tento způsob, kterým jsme dospěli nejen k definici exponenciály e, nýbrž také k odvození derivace exp. funkcí e^x, a^x jest, myslím, pro svoji stručnost dosti vhodným pro propedeutický výklad difer. počtu na střední škole.

Poznámka:

Podle předcházejícího výkladu jest

$$\lim_{\Delta x = 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = 1.$$

Položíme-li

$$\frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = A,$$

dostaneme

$$e = (1 + A \,.\, \Delta x)^{\frac{1}{\Delta x}}$$

a ježto pro $\Delta x = 0$ jest $\lim A = 1$, bude

$$e = \lim_{\Delta x = 0} (1 + \Delta x)^{\frac{1}{\Delta x}}$$

t. j. položíme-li $\Delta x = \frac{1}{n}$,

$$e = \lim_{n = \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$