Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Karel Dusl

O počtu funkcí Prymových

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 57 (1928), No. 3-4, 236--241

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121373

O počtu funkcí Prymových.

Napsal *Karel Dusl.*

1. Věta Riemann-Rochova[1]) pro funkce racionální na ploše Riemannově platí, vhodně upravená, také pro funkce multiplikativní, t. zv. funkce Prymovy.[2]) Nejobecnější tvar této věty odvodil jsem v Rozpravách II. tř. 1923.[3]) V tomto článku odvozuji důsledky speciální i obecné věty Riemann-Rochovy pro funkce Prymovy týkající se jednak počtu lineárně nezávislých těchto funkcí, jednak počtu lineárně nezávislých diferenciálů Prymových. — V literatuře[2]) uvedeny jsou tyto důsledky jen zčásti a neuspořádaně.

2. Budiž F funkce Prymova I. systému mající k singularit $c_1, c_2, \ldots c_k$ s příslušnými multiplikátory $e^{-2\pi i\lambda_\mu}$ $(\mu = 1, 2 \ldots k)$, na řezech a_ν, b_ν plochy Riemannovy $(\nu = 1, 2 \ldots p)$ budiž multiplikátory $e^{-2\pi i h_\nu}$, $e^{2\pi i g_\nu}$. Současně uvažujeme funkce F' II. systému s týmiž singularitami $c_1, c_2, \ldots, c_k$, avšak se systémem multiplikátorů $e^{-2\pi i\lambda'_\mu}$, $e^{-2\pi i h'_\nu}$, $e^{2\pi i g'_\nu}$, při čemž:

$$\lambda_\mu + \lambda'_\mu + 1 = 0, \quad g_\nu + g'_\nu = 0, \quad h_\nu + h'_\nu = 0,$$
$$\mu = 1, 2 \ldots k, \qquad \nu = 1, 2 \ldots p. \tag{1}$$

Znamenejme dále K a K' Prymovy funkce obou systémů, které, vyjímajíc body $c_1, c_2, \ldots, c_k$ jsou všady konečné na ploše Riemannově.

---

[1]) **Riemann**: Ges. Werke 1876.: Roch Crelle 64.
Autor: „O důkazu obecné věty Riemann-Rochovy". Rozpravy II. tř. 1921, č. 50.

[2]) **Prym F.**: Crellův journ. LXX. 1869. „Zur Integration der gleichzeitigen Differentialgleichungen: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v_u}{\partial x}$.
P. Appell: „Sur les intégrales des fonctions à multiplicateurs". Liouvillův journ. 1884.
Prym-Rost: Jubilejní spis „Theorie der Prymschen Functionen I. Ordnung."
H. F. Baker: Abels Theorem p. 252.
Krazer-Wirtinger: Abelsche Functionen. Encyklopädie II_2, 737.
Forsyth: Theory of Functions 531.

[3]) Autor: „O větě Riemann-Rochově pro funkce Prymovy". Rozpravy 1923, č. 27.

Uvažujme dále oba systémy integrálů Prymových I, I' a definujme je tak, aby derivace $\frac{dI}{dx}$ byla Prymova funkce s multiplikátory $e^{2\pi i\lambda'_\mu}, e^{-2\pi i h_\nu}, e^{2\pi i g_\nu}$, kdežto derivace $\frac{dI'}{dx}$ nechť přísluší multiplikátorům $e^{2\pi i\lambda_\mu}$, $e^{-2\pi i h'_\nu}$, $e^{2\pi i g'_\nu}$. Součiny:

$$F' \frac{dI}{dx}, \quad F \frac{dI'}{dx}$$

jsou pak *racionální funkce* na ploše Riemannově (majíce multiplikátory vesměs 1).

Integrály nemající jiných singularit nežli místa $c_1, c_2, \ldots, c_k$ na ploše Riemannově (obdobné Abelovým integrálům druhu prvního) označujeme V a V' podle toho, kterému systému přináležejí.

Má-li především kterákoli funkce Prymova P pólů (kromě míst $c_1, c_2, \ldots, c_k$) a N bodů nulových jest:

$$N - P = \sum_{\mu=1}^{k} \lambda_\mu = - \sum_{\mu=1}^{k} (\lambda'_\mu + 1) \tag{I}$$

se zřetelem ku (1).

Pro tyto funkce zní pak věta Riemann-Rochova:

a) speciální:
$$P + \Sigma\lambda - q = p - g \tag{II}$$

b) obecnější:
$$\Sigma\lambda + m - n - q = p - h. \tag{III}$$

Věta (II) platí, je-li všech P pólů dáno, věta (III) pak, je-li dáno m pólů a n nulových bodů funkce Prymovy prvního systému. Součtové znamení vztahuje se ke všem multiplikátorům λ. — Čísla g a h jsou t. zv. „přebytky", t. j. číslo g znamená počet lineárně nezávislých Prymových diferenciálů dV' *druhého* systému, majících v P pólech funkce F body nulové, číslo h pak znamená počet lineárně nezávislých diferenciálů dI' druhého systému, které v m daných pólech mají body nulové, v n nulových bodech funkce F pak póly, vždy téhož řádu, jako příslušné body nulové event. póly funkce F.

Podle věty Riemann-Rochovy existuje pak $q+1$ lineárně nezávislých funkcí $F(x)$ s *počtem q libovolně volitelných nulových bodů*, takže každou Prymovu funkci o těchže pólech resp. nulových bodech lze pak psáti jako libovolný násobek

$$\Delta(x) = \begin{vmatrix} F_1(x) & \ldots & F_{q+1}(x) \\ F_1(\beta_1) & \ldots & F_{q+1}(\beta_1) \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ F_1(\beta_q) & \ldots & F_{q+1}(\beta_q) \end{vmatrix}, \tag{2}$$

při čemž $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q$ jsou předepsané body nulové. — Obraťme se nyní k důsledkům věty Riemann-Rochovy.

3. Označme počet lineárně nezávislých Prymových diferenciálů dV a dV' písmeny ω a ω' pro oba systémy. Z věty Riemann-Rochovy pro racionální funkce:

$$K\frac{dV'}{dx}, \quad K'\frac{dV}{dx}$$

plyne:

$$\begin{aligned} \omega &= p - 1 + \Sigma(\lambda + 1) + \sigma \\ \omega' &= p - 1 + \Sigma(\lambda' + 1) + \sigma', \end{aligned} \tag{IV}$$

při čemž „přebytky" σ a σ' udávají počet lineárně nezávislých *Abelových* diferenciálů druhu prvního dv, které vymizejí v

$$N_V = 2p - 2 + \Sigma(\lambda + 1)$$

resp.

$$N_{V'} = 2p - 2 + \Sigma(\lambda' + 1) \tag{V}$$

nulových bodech diferenciálů dV resp. dV'. Jelikož pak každou funkci K' druhého systému lze vyjádřiti tvarem

$$K' = \frac{dv}{dV},$$

při čemž dv a dV mají tytéž body nulové a V znamená některý z ω integrálů prvního systému, tu, uvážíme-li, že poměr dvou diferenciálů dV téhož systému jest funkce racionální, je patrno, *že čísla σ a σ' udávají zároveň počet lineárně nezávislých funkcí K' resp. K druhého, resp. prvního systému.*

4. *Velikost čísel σ a σ'.* Především z rovnice (I) vychází, že každá Prymova funkce K nemající (kromě míst c_μ) pólů bude míti

$$N_K = s' = -\Sigma(\lambda' + 1) = \Sigma\lambda \tag{VI}$$

nulových bodů. Analogicky pro funkce K' jest:

$$N_{K'} = s = -\Sigma(\lambda + 1) = \Sigma\lambda'. \tag{VI$_1$}$$

Při tom vzhledem k (1) jest:

$$s = -(s' + k), \tag{VII}$$

při čemž k znamená počet singularit $c_1, c_2, \ldots, c_k$.

Jedno z čísel s a s' jest tudíž vždycky *negativní* (nejsou-li obě $= 0$ pro $k = 0$). Jelikož pak počet nulových bodů Prymových diferenciálů dV a dV' obou systémů jest podle (V) a (VII)

$$\begin{aligned} N_V &= 2p - 2 - s \\ N_{V'} &= 2p - 2 + s + k, \end{aligned} \tag{VIII}$$

jest jedno z obou čísel N_V, $N_{V'}$ vždycky *větší*, druhé *menší* nežli celkový počet $2p - 2$ nulových bodů Abelových diferenciálů dv druhu prvního.

Rozlišujme tyto případy:

α) Je-li $s = 0$, potom příslušné funkce K' nebudou míti nulových bodů ani pólů (kromě míst $c_1, c_2, \ldots, c_k$) tu jest $\sigma = 1$, neboť diferenciál Abelův druhu prvního dv má $2p - 2$ nulových bodů. Eksistuje tedy jedna funkce K'. Pokud se týče σ' tu z (VIII) je patrno, že pro $s = 0$ toliko pro $k = 0$ jest i $\sigma' = 1$. Jen tehdy není-li míst c_μ, eksistují současně všady konečné Prymovy funkce *obou* systémů. Funkce ty nemají polů, ani bodů nulových na ploše Riemannově.[4])

Taková funkce K' (pro $k > 0$) dá se eksplicitně vyjádřiti tvarem:

$$K' = A\, e^{\sum\limits_{\mu=1}^{k} (\lambda_n + 1)\, \Pi^{x,a}_{c_\mu, m} + 2\pi i \sum\limits_{\nu=1}^{p} (h_\nu + H_\nu)\, v^{x,a}_\nu} \qquad \text{(IX)}$$

v němž a, m jsou libovolná místa plochy Riemannovy, ostatní označení obvyklé v teorii funkcí Abelových; p konstant H_ν nutno voliti tak, aby bylo vyhověno p kongruencím při přechodu ν-tého řezu b_ν, $\nu = 1, 2 \ldots p$ plochy Riemannovy:

$$\sum_{\mu=1}^{k} (\lambda_\mu + 1)\, v_\nu^{c_\mu, m} + g_\nu + h_1 \tau_{\nu,1} + h_2 \tau_{\nu,2} + \ldots + h_p \tau_{\nu,p} \equiv 0,$$
$$\tau = 1, 2 \ldots p \qquad \text{(X)}$$

$\tau_{i,k}$ jsou moduly periodicity integrálů prvního druhu na řezech b_ν.

Avšak jen tenkrát, lze-li systémem multiplikátorů vyhověti kongruencím (X), existuje funkce K'. Není-li míst c_μ ($\lambda_\mu = 0$), jest také

$$K = \frac{1}{K'} \qquad \text{(XI)}$$

s p podmínkami (X).

Jestliže je $k > 0$, jest $\sigma' = 0$ a funkce K neeksistují vůbec.

β) Není-li $s = 0$, nýbrž $s > 0$, pak eksistují funkce K', tedy jest $\sigma > 0$, avšak neeksistují funkce K t. j. $\sigma' = 0$. Největší možný počet nulových bodů funkce K' jest $s = 2p - 2$. Pak jest $N_V = 0$ a $\sigma = p$. Je-li tedy obecně $s = 2p - 2 - r$, $r > 0$, jest σ počet Abelových diferenciálů prvního druhu, které v r nulových bodech dV vymizejí. Nejmenší počet lineárně nezávislých funkcí Prymových K, K' obou systémů jest tedy 0, největší $= p$, *nejsou však současně eksistentní funkce obou systémů vyjímaje pro* $\sigma = \sigma' = 1$, $k = 0$ *t. j. pro speciální funkce bez singularit* c_μ.

γ) Jestliže je $s = 0$ a nejsou-li splnitelny daným systémem multiplikátorů kongruence (X), jest $\sigma = \sigma' = 0$, t. j. neeksistují pak ani funkce K', ani K.

5. *Počet ω a ω' Prymových diferenciálů dV a dV'.*

Jelikož na základě (IV) a (VI) jest:

$$\left.\begin{aligned} \omega &= p - 1 - s + \sigma \\ \omega' &= p - 1 + s + k + \sigma', \end{aligned}\right\} \qquad \text{(XII)}$$

---

[4]) Forsyth: „Theory of Functions“ 531. H. Weyl: Die Idee der Riemannschen Fläche str. 128.

jest pro

$$\alpha)\ s = 0,\ \sigma = 1,\ \sigma' = 0,\ k > 0$$

$$\omega = p,\quad \omega' = p + k - 1 \tag{4}$$

$$\beta)\ s = 0,\ \sigma = 1,\ \sigma' = 1,\ k = 0$$

$$\omega = p,\quad \omega' = p$$

$$\gamma)\ s = 2p - 2,\ \sigma = p,\ \sigma' = 0,\ \omega = 1. \tag{6}$$

Rozdíly $\omega' - \sigma$ *resp.* $\omega - \sigma'$ *jsou vždy positivní, nebo rovny nule.* Počet Prymových funkcí K jednoho systému rovná se nejvýše počtu lineárně nezávislých integrálů V téhož systému. Je to přímo patrno z toho, že na př. každou funkci K'_i $(i = 1, 2 \ldots \sigma)$ lze lineárně vyjádřiti ω' lineárně nezávislými integrály téhož systému. Bude pak eksistovati σ lineárních rovnic tvaru:

$$K'_i = \lambda_{i,1} V'_1 + \lambda_{i,2} V'_2 + \ldots + \lambda_{i,\omega'} V'_{\omega'} + \lambda \qquad i = 1, 2, \ldots \sigma \tag{7}$$

a tudíž $$\omega' > \sigma.$$

5. *Nejmenší počet pólů funkce Prymovy prvního systému.* Uvažujme, jak souvisí počet daných pólů (P) Prymovy funkce prvního systému s přebytkem g v Riemann-Rochově rovnici (II) a s číslem ω'.

Celkem jest ω' lineárně nezávislých diferenciálů Prymových dV' druhého systému, číslo g znamená pak počet oněch, které vymizejí v P daných pólech Prymovy funkce F. Je-li tedy tento počet roven, anebo větší než ω', jest $g = 0$, t. j.

$$\begin{array}{llll} \text{pro} & P = \omega' + r & \text{jest} & g = 0 \\ ,, & P = \omega' & ,, & g = 0 \\ ,, & P = \omega' - r & ,, & g = r, \end{array} \tag{8}$$

při čemž r znamená kladné číslo celé. Jestliže

$$P = \omega' + 1$$

má příslušná funkce Prymova podle věty Riemann-Rochovy (II)

$$\omega' + 1 + \Sigma\lambda - p + 1$$

konstant, což podle (IV) dává hodnotu

$$q + 1 = \sigma' + 1 \tag{XIII}$$

konstant.

α) Jestliže je $\sigma' = 0$, t. j. neeksistují funkce K, bude jediná funkce (určená až na arbitrární multiplikativní konstantu) s předepsanými $\omega' + 1$ póly. Podle pouček (I) a (IV) bude tato funkce míti $\omega' + 1 + \Sigma\lambda = p$ bodů nulových. Funkce s $\omega' + r$ póly (i pro $r = 0$) bude podle těchže pouček obsahovati $\sigma' + r$ nezávislých konstant, avšak funkce s $\omega' - r$ póly bude míti toliko

$$\omega' - r + \Sigma\lambda - p + r + 1 = \sigma'$$

konstant. Pro $\sigma' = 0$ jest tedy nejmenší přípustný počet předepsaných pólů

$$P = \omega' + 1.$$

β) Je-li $\sigma' > 0$ jest nejmenší počet pólů roven nule (pro funkce K), avšak pak opět *eksistují funkce až s počtem $\omega' + 1$ pólů;* obsahujeť funkce s $\omega' - r$ danými póly toliko σ' konstant. Avšak Prymova funkce s předepsanými póly obsahuje nejméně $\sigma' + 1$ konstant, neboť funkci $c_1 K_1 + c_2 K_2 + \ldots c_{\sigma'} K_{\sigma'}$ lze vždy připočísti, aniž se počet předepsaných pólů změní.

Pro funkce bez singularit $c_1, c_2 \ldots c_k$ jest jednoduše pro $P = p + r$, $g = 0$ a $q = r$ a tedy pro $P = p$ jest $g = 0$, $q = 0$, *t. j. eksistuje jedna funkce s p danými póly a danými multiplikátory.* Jejích p nulových bodů jest určeno p kongruencemi tvaru (X) pro přechod řezů b_ν plochy Riemannovy.

6. *Přebytek h v obecné rovnici* (III) *Riemann-Rochově* udává počet Prymových diferenciálů dI' (lineárně nezávislých) majících v m pólech body nulové a v n nulových bodech póly. Konstruujeme-li racionální funkci:

$$R = K \frac{dI'}{dx}$$

tak, aby měla *body nulové* v m nulových bodech diferenciálů dI' a v s' nulových bodech funkce K *póly* v n předepsaných pólech diferenciálu dI' bude počet těchto racionálních funkcí udávati přebytek h. Konstrukce konečné funkce K bude závislá na poučkách odst. 4 tohoto článku.

Sur le nombre de fonctions à multiplicateurs.

(Extrait de l'article précédent.)

L'auteur considère, d'abord, les nombres σ et σ' de fonctions K, K' linéairement indépendantes, appartenant à deux systèmes de multiplicateurs λ, λ', g, g', h, h' de Prym et n'admettant pas d'autres singularités que les points c_1, c_2, . . ., c_k auxquels se rattachent les multiplicateurs λ, λ'. Il rappelle, dans la suite, les nombres ω et ω' d'intégrales V et V' de Prym qui ne sont infinies qu'aux points c_1, c_2, . . ., c_k de la surface de Riemann. Ces intégrales fournissent une analogie parfaite avec les intégrales d'Abel de la première espèce. En partant du théorème de Riemann-Roch pour de telles fonctions, l'auteur calcule le nombre de fonctions linéairement indépendantes, à deux systèmes de multiplicateurs, pour lesquelles:

1. tous les pôles $P = \omega' + r$ sont donnés;
2. les m pôles simples et les n zéros sont donnés sur la surface de Riemann.

L'auteur s'occupe, en particulier, des fonctions pour lesquelles les singulairités c_1, c_2, . . ., c_k ont disparu (λ, $\lambda' = 0$) et qui ont fait l'objet d'un mémoire de M. Appel („Sur les intégrales des fonctions à multiplicateurs", J. de Liouv. 1884).