Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Zdeněk Horák

Tření v hmotných systémech

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 57 (1928), No. 3-4, 260--266

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121377

Tření v hmotných systémech.

Napsal Dr. *Zdeněk Horák.*

Zákony tření tuhých těles jsou dosti přesně známy v jistých jednoduchých případech, chceme-li však uvažovati tření při pohybu obecného dynamického systému, musíme elementární zákony nahraditi obecnějšími hypotesami o závislosti tření na stavu systému i na silách působících. Tím zabývám se v této práci. Tření zavedu do počtu odstraněním předpokladu, že vazbové síly nekonají práci při virtuálním pohybu shodném s vazbami. Pak lze vazbové síly rozložiti na síly od tření a síly reakční. Tyto síly dají se i pro obecný systém jednoduše stanoviti, kdežto síly od tření jsou neznámé funkce stavu systému a reakčních sil. Na základě některých předpokladů o těchto funkcích došel jsem k matematickému vyjádření sil od tření, jehož lze užíti k řešení konkrétních úloh. Příkladem uvádím aplikaci na pohyb hmotného bodu po drsné pohyblivé ploše.

1. Vazbové síly. Uvažujme dynamický systém o n stupních volnosti, kterému předepíšeme r nezávislých kinematických relací obecně neholonomních a reonomních. Omezím se na systém, který byl před zavedením vazeb holonomní, a označím nezávislé holonomní parametry určující jeho polohu x^λ $(\lambda = 1, 2, \ldots n)$. Předepsané vazby buďte vyjádřeny r nezávislými diferenciálními vztahy

$$\sum_\lambda \Phi^k_\lambda\, dx^\lambda + \Phi^k\, dt = 0, \quad k = 1, 2, \ldots r, \tag{1}$$

v nichž Φ^k_λ, Φ^k jsou funkce parametrů a času t. Na systém nechť působí dané síly o složkách X_λ. Mimo to působí na systém jistými silami tělesa, která fysikálně realisují vazby (1). Tyto síly, jež shrnují v e š k e r é dynamické účinky oněch těles, nazvu *silami vazbovými* a nepředpokládám o nich zatím nic jiného, než že za jejich působení jsou splněny všechny podmínky (1). Zvláště budiž zdůrazněno, že *nevyžaduji, aby virtuální práce těchto sil byla rovna nule.* Pak ovšem vazbové síly konají práci, která může býti také záporná. V tomto případě nastává *disipace energie,* kterou fysikálně vysvětlujeme *třením.*

V dalším musíme rozlišovati *síly vazbové,* které nahrazují c e l k o v é působení vazeb — jak jsou fysikálně realisovány —

od sil *reakčních*, které mají za úkol pouze splnění kinematických relací.[1]) Označíme-li vazbové síly V_λ, mají pohybové rovnice systému tvar:

$$A_\lambda = X_\lambda + V_\lambda, \tag{2}$$

kde A_λ jsou známé funkce parametrů x^λ a derivací x'^λ, x''^λ *). Zaveďme nyní místo dx^λ $r + s = n$ diferenciálů nových parametrů, obecně anholonomních: p^k $(k = 1, 2, \ldots r)$ a q^α $(\alpha = 1, 2, \ldots s)$ diferenciálními vztahy

$$dp^k = \sum_\lambda \Phi^k_\lambda dx^\lambda + \Phi^k dt, \tag{3}$$

$$dq^\alpha = \sum_\lambda \Psi^\alpha_\lambda dx^\lambda + \Psi^\alpha dt, \tag{4}$$

při čemž matice $\left\| \Psi^\alpha_\lambda \right\|$ má hodnost s. Parametry q^α jsou tedy nezávislé a rovnice (1) zní

$$dp^k = 0. \tag{5}$$

Řešíme-li (3) a (4) podle dx^λ, obdržíme

$$dx^\lambda = \sum_k L^\lambda_k dp^k + \sum_\alpha M^\lambda_\alpha dq^\alpha + N^\lambda dt, \tag{6}$$

pro libovolný virtuální posuv

$$\delta x^\lambda = \sum_k L^\lambda_k \delta p^k + \sum_\alpha M^\lambda_\alpha \delta q^\alpha$$

a pro virtuální práci vazbových sil

$$V_\lambda \delta x^\lambda = \sum_{k,\lambda} V_\lambda L^\lambda_k \delta p^k + \sum_{\alpha,\lambda} V_\lambda M^\lambda_\alpha \delta q^\alpha.$$

Tím jsme rozložili vazbové síly na dva druhy: na síly

$$R_k = \sum_\lambda V_\lambda L^\lambda_k, \tag{7}$$

které nekonají práci při virtuálním pohybu shodném s vazbami $(\delta p^k = 0)$, takže lze je ve smyslu Hamelovy definice nazvati silami reakčními, a na síly

$$F_\alpha = \sum_\lambda V_\lambda M^\lambda_\alpha, \tag{8}$$

---

[1]) Názvosloví týkající se sil realisujících vazby je v literatuře málo jednotné. Často se užívá slova reakce ve smyslu zde užitého názvu síla vazbová a dělí se na r. normální a tangenciální. Tyto pojmy nejsou obecně definovány, proto přiklonil jsem se k terminologii Hamelově (viz na př. Geiger-Scheel: Handbuch der Physik, V, str. 14, 16), který definuje reakční sílu tím, že obstarává pouze splnění vazeb.

*) Z technických příčin píšeme x'^λ a x''^λ místo obvyklejšího $\dot{x}^\lambda$ a $\ddot{x}^\lambda$ a podobně.

které nekonají práci, když posuv systému ve směrech vazbami dovolených je roven nule ($\delta q_\alpha = 0$). Tyto síly můžeme tedy interpretovati jako *síly od tření*, které jsou takto definovány pro libovolný dynamický systém a pro libovolné parametry.

2. Pohybové rovnice. Odvoďme nyní pohybové rovnice v parametrech p^k, q^α. Obdržíme je, násobíme-li rovnice (2) koeficienty L_k^λ resp. M_α^λ a sečteme pro všechna λ:

$$\sum_\lambda A_\lambda L_k^\lambda = \sum_\lambda X_\lambda L_k^\lambda + R_k, \quad k = 1, 2, \ldots r, \tag{9}$$

$$\sum_\lambda A_\lambda M_\alpha^\lambda = \sum_\lambda X_\lambda M_\alpha^\lambda + F_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \ldots s. \tag{10}$$

Rovnice (10) jsou pohybové rovnice systému v nezávislých parametrech a neobsahují explicite sil reakčních. Vzhledem k známým zákonům tření je však nutno připustiti, že na nich budou záviseti síly od tření. Síly reakční jsou určeny složkami R_k, které můžeme vypočítati z (9). Výhodnější je zavésti místo nich jiné veličiny. Rovnice (9) jsou lineární v x''^λ a vzhledem k (6) jsou také lineární v p''^k a q''^α. Řešíme-li je podle p''^k, obdržíme

$$p''^k = B^k - R^k, \tag{11}$$

kde R^k značí výrazy lineární a homogenní v R_k a B^k jsou jisté funkce parametrů, jich prvních a druhých derivací a sil daných. Je patrno, že k stanovení sil reakčních můžeme zavésti místo R_k výrazy R^k. Vzhledem k (5) plyne pro ně z (11)

$$R^k = B^k. \tag{12}$$

Funkce B^k lze však určiti přímo z pohybových rovnic pro volný systém. Tyto rovnice v parametrech p^k dostaneme kladouce v rovnicích (11) $R^k = 0$, takže B^k jsou výrazy plynoucí pro p''^k řešením rovnic pro volný systém. Píšeme-li tedy p''^k_0 místo B^k, jest

$$R^k = p''^k_0. \tag{12'}$$

Položíme-li v rovnicích (2) $V_\lambda = 0$, získáme řešením podle x''^λ vztahy, které pišme ve tvaru

$$x''^\lambda = x''^\lambda_0.$$

Vzhledem k (3) jest nyní

$$p''^k = \sum_\lambda \Phi_\lambda^k x''^\lambda + \sum_\lambda \Phi'^k_\lambda x'^\lambda + \Phi'^k$$

a v důsledku (12'), jak se snadno přesvědčíme,

$$R^k = \sum_\lambda \Phi_\lambda^k x''^\lambda_0 + \sum_\lambda \Phi'^k_\lambda x'^\lambda + \Phi'^k. \tag{13}$$

Tedy: *složky R^k reakčních sil obdržíme, derivujeme-li levé strany kinematických relací podle t a za druhé derivace parametrů dosadíme* *výrazy plynoucí pro ně z rovnic pro volný systém.* Při tom x''^{λ}_0 jsou funkce parametrů, jich prvních derivací a daných sil.

O silách od tření, stanovených s složkami $F_{\mathfrak{a}}$ předpokládejme, že závisí na parametrech, jejich prvních derivacích a na reakčních silách. $F_{\mathfrak{a}}$ jsou tedy vzhledem k (5) a (6) funkce veličin: $x^{\lambda}, q'^{\mathfrak{b}}$ a R^k:

$$F_{\mathfrak{a}} = F_{\mathfrak{a}}(x^{\lambda}, q'^{\mathfrak{b}}, R^k) \tag{14}$$

a vypočteme-li R^k podle (13),

$$F_{\mathfrak{a}} = {}'F_{\mathfrak{a}}(x^{\lambda}, q'^{\mathfrak{b}}), \tag{14'}$$

závisí-li dané síly na stavu systému. U reonomního systému může ovšem vystupovati ve funkcích (14), (14') také čas t. Celkem docházíme k výsledku, že síly od tření jsou funkce okamžitého stavu systému. Známe-li závislost tření na rychlostech systému a na reakčních silách, známe také funkce (14') a dosazením do (10) získáme rovnice, které spolu s (1) stanoví pohyb systému.

3. Závislost tření na stavu systému. Je zřejmo, že pro obecný systém a v obecných parametrech nemají funkce (14) jednoduchý tvar, přece však se pokusím blíže je stanoviti. Podle Coulombových zákonů je velikost tření úměrna velikosti kolmého tlaku. V obecných parametrech je čtverec velikosti síly dán kvadratickou formou jejích obecných složek. Budu tedy předpokládati, že síly $F_{\mathfrak{a}}$ *jsou úměrny odmocninám z jistých kvadratických forem složek reakčních sil* R^k, jichž koeficienty jsou funkce parametrů. Tyto formy označím $\varphi_{\mathfrak{a}}$. Dále víme, že směr tření závisí na směru relativního pohybu troucích se ploch (nejčastěji má tření až na znaménko směr stejný). Směr rychlosti v obecných parametrech je dán poměry jejích složek k velikosti, čímž jsme vedeni k předpokladu, že $F_{\mathfrak{a}}$ jsou *lineární formy derivací* $q'^{\mathfrak{b}}$, *jichž koeficienty jsou nepřímo úměrny odmocninám z jistých kvadratických forem derivací* $q'^{\mathfrak{b}}$, které označím $\psi_{\mathfrak{a}}$. K těmto dvěma předpokladům připojme třetí, podle něhož *celková práce vykonaná silami od tření je pro všechny pohyby záporná.* Z prvních dvou předpokladů plynou rovnice

$$F_{\mathfrak{a}} = -\sqrt{\frac{\varphi_{\mathfrak{a}}}{\psi_{\mathfrak{a}}}} \sum_{\mathfrak{b}} f_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} q'^{\mathfrak{b}}, \quad \mathfrak{a} = 1, 2, \ldots, s, \tag{15}$$

v nichž $f_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}$ jsou funkce x^{λ}. Podle třetího předpokladu je práce

$$\sum_{\mathfrak{a}} F_{\mathfrak{a}}\, dq^{\mathfrak{a}} = -\sum_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \sqrt{\frac{\varphi_{\mathfrak{a}}}{\psi_{\mathfrak{a}}}} f_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} q'^{\mathfrak{b}}\, dq^{\mathfrak{a}} \tag{16}$$

záporná pro libovolný pohyb, tedy $f_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}$ musí býti koeficienty kladně definitní formy (odmocninu bereme kladně). Také formy $\varphi_{\mathfrak{a}}$ a $\psi_{\mathfrak{a}}$ musí býti kladně definitní, neboť jsou to čtverce reálných veličin.

Rovnice (15) platí za předpokladu, že žádná z forem $\psi_{\mathfrak{a}}$ není rovna nule, a souhlasí v prvém přiblížení se zákony o *kinetickém tření* tuhých těles. Je-li na př. $\psi_{\mathfrak{c}} = 0$, musí býti všechny derivace $q'^{\mathfrak{b}}$

vystupující v ψ_c rovny nule a příslušná složka tření stává se neurčitou. Pak se jedná o *tření statické*, které skutečně je neurčité. Jeho velikost je ovšem omezena, takže pro tento případ místo (15) platí pouze vztah:

$$|\overset{0}{F}_c| \leq \overset{0}{f}_c \sqrt{\varphi_c}. \tag{17}$$

Podrobnější diskusí bychom seznali, že rovnice (15) platí beze změn znamení, pokud $r, s > 1$. Je-li r nebo s rovno jedné, musíme připustiti v (15) změny znamének, čehož docílíme zavedením faktoru $\varepsilon = \pm 1$.

4. Disipace energie. Dělíme-li výraz (16) $-dt$, získáme funkci

$$D = \sum_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \sqrt{\frac{\varphi_\mathfrak{a}}{\psi_\mathfrak{a}}} f_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} q'^\mathfrak{a} q'^\mathfrak{b}, \tag{18}$$

jež udává časovou ztrátu energie způsobenou třením. Nazvu ji podle Rayleigha *disipační funkcí* či krátce *disipací*. Je to kladně definitní kvadratická forma derivací parametrů, jejíž koeficienty závisí na parametrech i na derivacích, kdežto koeficienty Rayleighovy disipační funkce závisí pouze na parametrech.[2]) Síly od tření nelze obecně derivovati z funkce D. Jsou-li však všechny formy $\psi_\mathfrak{a}$ rovny formě

$$\psi = \sum_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} f_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} q'^\mathfrak{a} q'^\mathfrak{b}$$

a všechny formy $\varphi_\mathfrak{a}$ stejné (rovny φ), jest

$$D = \sqrt{\varphi\psi}.$$

φ obsahuje však $q'^\mathfrak{b}$ jen pokud vystupují v R^k. Pokládáme-li tedy D za funkci proměnných R^k a $q'^\mathfrak{b}$, plyne derivací

$$\frac{\partial D}{\partial q'^\mathfrak{a}} = \sqrt{\varphi} \frac{\sum_\mathfrak{b} f_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} q'^\mathfrak{b}}{\sqrt{\psi}} = -F_\mathfrak{a}.$$

Za těchto předpokladů můžeme tedy síly od tření derivovat z disipační funkce:

$$F_\mathfrak{a} = -\frac{\partial D}{\partial q'^\mathfrak{a}}.$$

5. Hmotný bod na drsné ploše. Odvozených výsledků lze s výhodou užíti ke studiu pohybu hmotného bodu na pohyblivé drsné ploše. Hmota jeho budiž rovna jedné, souřadnice v pevné pravoúhlé soustavě x, y, z a složky dané síly X, Y, Z, takže pohybové rovnice pro volný pohyb zní:

$$x'' = X, \quad y'' = Y, \quad z'' = Z. \tag{19}$$

---

[2]) Viz na př. Whittaker-Mittelstenscheid: Analytische Dynamik u. s. w., § 93.

Podmínky (1) pišme v tvaru

$$\Phi_x x' + \Phi_y y' + \Phi_z z' + \Phi_t = 0, \tag{20}$$

kde Φ_x, Φ_y, Φ_z jsou směrové kosiny normály a $-\Phi_t$ je rychlost bodu ve směru kladné normály. Jediná složka reakční síly jest podle (13)

$$R = \Phi_x x''_0 + \Phi_y y''_0 + \Phi_z z''_0 + \Phi'_x x' + \Phi'_y y' + \Phi'_z z' + \Phi'_t.$$

Z (19) však plyne $x''_0 = X$, $y''_0 = Y$, $z''_0 = Z$, takže

$$R = P - \frac{\omega}{dt^2} + \Phi'_t,$$

značí-li P normální složku dané síly a ω druhou fundamentální formu teorie ploch. Ježto pak poměr této formy ke čtverci lineárního elementu ds je roven křivosti příslušného normálního řezu, jest

$$R = P + \Phi'_t - \frac{s'^2}{\varrho}, \quad (\varrho = \text{poloměr křivosti}).$$

Zvolme nyní za parametry q^α křivočaré souřadnice na ploše u, v a předpokládejme, že obě formy ψ jsou rovny s'^2. Ale $r = 1$, tedy φ má tvar konst. R^2 a složky tření ve směrech parametrických křivek na ploše jsou podle (15)

$$F_u = -\varepsilon \frac{f_{uu} u' + f_{uv} v'}{s'} \left(P + \Phi'_t - \frac{s'^2}{\varrho}\right),$$

$$F_v = -\varepsilon \frac{f_{vu} u' + f_{vv} v'}{s} \left(P + \Phi'_t - \frac{s'^2}{\varrho}\right),$$

při čemž volíme ε tak, aby $\varepsilon R \geqq 0$. Pohybové rovnice nelze obecně integrovati, můžeme však udati diferenciální rovnici trajektorie, leží-li kolmý průmět dané síly ve směru tření. Je-li mimo to *plocha ve všech směrech stejně drsná,* bod se pohybuje po *geodetické čáře.*[3]) Snadno lze seznati, že koeficienty f_{uu}, f_{uv}, f_{vv} jsou pak úměrny základním veličinám 1. řádu teorie ploch (konst. úměrnosti f = koef. tření) a tření má směr opačný pohybu. V tomto případě dá se tření derivovati z disipace:

$$D = \varepsilon R s', \quad F_u = -\varepsilon R \frac{\partial s'}{\partial u'}, \quad F_v = -\varepsilon R \frac{\partial s'}{\partial v'}.$$

*

[3]) Srovn.: J. H. Jellet: Die Theorie der Reibung, 1890, Leipzig.

Sur le frottement dans les systèmes matériels.

(Extrait de l'article précédent.)

Je considère un système matériel à liaisons réalisées avec frottement. Les forces de liaisons se décomposent en forces R_k dont le travail virtuel est nul, pour tous les déplacements compatibles avec les liaisons, et en forces de frottement. Pour calculer les R_k, je donne une formule bien simple et générale, tandis que la détermination des forces de frottement exige des hypothèses nouvelles. Par des considérations simples, j'arrive à supposer que ces forces peuvent être exprimées comme fonctions linéaires des derivées des paramètres par rapport au temps dont les coefficients dépendent encore de ces dérivées et des forces R_k. Les résultats acquis contiennent comme cas spéciaux les lois empiriques du frottement. Comme application, j'étudie le mouvement avec frottement d'un point matériel sur une surface mobile.