Alois Strnad

O přímce Simsonově

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 15 (1886), No. 3, 114--119

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121439

více razí sobě přesvědčení dráhu, že především nutno, vedle nejjednodušších úkonů, zejmena goniometrických, posud výhradně užívaných, sáhnouti k jiným, na oko nepřístupnějším, problemu danému však přiměřenějším; že nutno studovati úkony differencialnými rovnicemi definované a obeznámiti se s jejich vlastnostmi. Podobné myšlénky pronáší Gyldén v nejnovější práci své o problemu tří těles (Acta mathematica, v. I), když byl dříve již s jinými se přičinil o zavedení elliptických úkonů do mechaniky nebeské (v. str. 104). Doufejme, že se spojenému úsilí tolika vynikajících mathematiků a astronomů podaří nalézti novou bohatou žílu hojně se prýštících vědomostí v době, kdy starší přese všechno úsilí nenese již užitek tak bohatý jako při prvním objevení svém!

O přímce Simsonově.

Napsal

A. Strnad,
professor v Hradci Králové.

Ku vlastnostem přímky Simsonovy obsaženým ve drobných zprávách na str. 125. dodávám tuto některé další, které snad jsou nové; nemohl jsem zvěděti, zda kde byly uveřejněny.

1. Užívajíce téhož označení jako na místě uvedeném, mějme přímku Simsonovu M příslušnou bodu m, který jest na kružnici K o trojúhelník abc opsané.*) Úhel, jejž tato přímka se stranou $\overline{ab}$ tvoří, jmenujme λ; jelikož o čtyrúhelník $ab'mc'$ lze opsati kružnici, jest patrně

$$R-\lambda = \sphericalangle b'c'm = \sphericalangle cam,$$

t. j. úhel utvořený přímkou M a některou stranou základního trojúhelníka jest doplňkem úhlu obvodového sestrojeného v kruhu K nad obloukem obsaženým mezi bodem m a vrcholem ležícím proti oné straně.

Jsou-li tedy dány na kružnici K dva libovolné body m_1, m_2, a tvoří-li příslušné přímky M_1, M_2 se stranou $\overline{ab}$ úhly λ_1, λ_2, jest

$$R-\lambda_1 = \sphericalangle cam_1, \quad R-\lambda_2 = \sphericalangle cam_2$$

---

*) Čtenář račiž sobě sestrojiti příslušný obrazec.

a tudíž úhel přímek M_1M_2

$$\varphi = \lambda_1 - \lambda_2 = \sphericalangle\, m_1 c\, m_2.$$

Úhel dvou přímek Simsonových M_1, M_2 *rovná se úhlu obvodovému nad obloukem obsaženým mezi body* m_1, m_2 *k přímkám těm příslušnými.*

Rozumí se, že obě přímky vztahujeme k témuž trojúhelníku a že úhel obvodový stanovíme v kruhu opsaném o tento trojúhelník. V odvozené tuto větě obecné obsažena jest známá věta zvláštní, že přímky M_1, M_2 na sobě kolmo stojí, je-li $\overline{m_1m_2}$ průměrem kružnice K.

2. Přímky M_1, M_2 protínají se v určitém bodě k. Abychom polohu tohoto bodu blíže seznali, sestrojme v trojúhelníku abc průsečík výšek v a spojme jej s body m_1, m_2; přímky M_1, $\overline{vm_1}$ určují bod n_1, M_2 a $\overline{vm_2}$ bod n_2. Dle známé vlastnosti přímky Simsonovy jest $\overline{vn_1} = \overline{n_1m_1}$, $\overline{vn_2} = \overline{n_2m_2}$, a body n_1, n_2 leží na kružnici L devíti bodů trojúhelníka abc. Jelikož kružnice tato půlí veškeré průvodiče bodem v ke kružnici K uvedené, jest bod v středem podobnosti obou kružnic a proto oblouky $\overset{\frown}{m_1m_2}$, $\overset{\frown}{n_1n_2}$ měřeny jsou stejným počtem stupňů. Jak jsme dříve dokázali, rovná se úhel přímek M_1, M_2 úhlu obvodovému nad obloukem $\overset{\frown}{m_1m_2}$ v kruhu K; z předešlého vysvítá, že týž úhel rovná se úhlu obvodovému v kruhu L nad obloukem $\overset{\frown}{n_1n_2}$.

Z toho soudíme, že bod k buď náleží kružnici L, aneb že s body n_1, n_2 určuje kružnici L′ shodnou s L; poněvadž však případ prvý obecně nastati nemůže, nezbývá než druhý a proto:

Průsečík přímek M_1, M_2 *a body* n_1, n_2 *stanoví kružnici shodnou s* L.

Kdybychom k bodu k určili bod souměrný dle přímky $\overline{n_1n_2}$, ležel by tento na kružnici L. Kružnice L′ sjednotí se s L, jsou-li body m_1, m_2 konci průměru kružnice L; neboť pak jest $\overline{n_1n_2}$ průměrem kružnice L′. V tomto případě leží tedy průsečík přímek M_1, M_2 na kružnici devíti bodů, jak již odjinud známo.

Sjednocují-li se body m_1, m_2, sjednotí se též přímky M_1, M_2, a průsečík jich k jest pak bodem, ve kterém se přímka M_1 dotýká křivky obalové všech přímek Simsonových daného trojúhelníka. Bod ten snadně obdržíme, přeneseme-li tětivu, na přímce M_1 uvnitř L obsaženou, od bodu n_1 ve směru opačném.

3. Vytkneme-li na kružnici K tři body m_1, m_2, m_3, omezují příslušné k nim přímky M_1, M_2, M_3 trojúhelník $k_1k_2k_3$. Potom jest

$$\sphericalangle k_2k_3k_1 = \sphericalangle m_2am_1 = \sphericalangle m_2m_3m_1$$

a podobně

$$\sphericalangle k_3k_1k_2 = \sphericalangle m_3m_1m_2, \quad \sphericalangle k_1k_2k_3 = \sphericalangle m_1m_2m_3;$$

jest tedy

$$\triangle k_1k_2k_3 \sim \triangle m_1m_2m_3.$$

Tři přímky Simsonovy M_1, M_2, M_3 *omezují trojúhelník podobný trojúhelníku určenému body* m_1, m_2, m_3 *k nim příslušnými.*

Bod m může splynouti v jedno s některým vrcholem trojúhelníka základního; náležející k němu přímkou M jest pak výška vrcholem tím procházející. Stanovíme-li tedy ku př. k bodům a, b, m příslušné přímky Simsonovy, budou to přímky V_a, V_b, M, o nichž lze prosloviti větu:

Přímka Simsonova M *a dvě výšky* V_a, V_b *trojúhelníka abc omezují trojúhelník podobný trojúhelníku abm.*

Netřeba dokládati, že dle obdoby platí tato věta pro kterékoli dvě výšky. Též každá ze stran trojúhelníka abc jest vzhledem k němu přímkou Simsonovou; příslušným k ní bodem jest bod kružnice K souměrný s protějším vrcholem. Značíme-li a_0, b_0, c_0 body souměrné k a, b, c, a je-li $\overline{bc} \equiv A$, $\overline{ca} \equiv B$, $\overline{ab} \equiv C$, můžeme říci:

Přímka Simsonova M *omezuje s dvěma stranami* A, B *trojúhelníka základního trojúhelník podobný trojúhelníku* a_0b_0m.

Obdobně při jiných dvou stranách.

4. Body $k_1n_2n_3$, $k_2n_3n_1$, $k_3n_1n_2$ stanoveny jsou kružnice L'_1, L'_2, L'_3 shodné s kružnicí L, opsanou o trojúhelník $n_1n_2n_3$. Jest však známo, že sestrojíme-li nad stranami trojúhelníka kružnice shodné s kružnicí opsanou, procházejí kružnice tyto průsečíkem výšek onoho trojúhelníka; protož:

Kružnice L'_1, L'_2, L'_3 *protínají se v průsečíku výšek trojúhelníka* $n_1n_2n_3$.

Bod tento q jest i jinak ještě význačný. Jest totiž

$$\triangle k_1k_2k_3 \sim \triangle m_1m_2m_3 \sim \triangle n_1n_2n_3;$$

vrcholy trojúhelníka posledního leží ve stranách prvého a jest tedy $\triangle n_1 n_2 n_3$ vepsán trojúhelníku $k_1 k_2 k_3$. *Jeřábek**) ukázal, že všechny trojúhelníky, které jsou danému trojúhelníku vepsány a jemu podobny, mají společný průsečík výšek, který jest středem kružnice opsané o daný trojúhelník. (Mathesis, tome V. p. 135.). Z této věty vysvítá v případě námi uvažovaném:

Průsečík výšek trojúhelníka $n_1 n_2 n_3$ *jest středem kružnice* Q *opsané o trojúhelník* $k_1 k_2 k_3$.

Zvolíme-li na kružnici K na místě tří bodů libovolných body a, b, m, přísluší jim přímky V_a, V_b, M a délky $\overline{va}$, $\overline{vb}$, $\overline{vm}$ půleny jsou body a_3, b_3, n. Užitím věty poslední dospějeme za těchto podmínek k výsledku:

Kružnice opsaná o trojúhelník omezený přímkami V_a, V_b, M *má střed v průsečíku výšek trojúhelníka* $a_3 b_3 n$.

Kružnice tohoto druhu lze sestrojiti tři, totiž opsané o trojúhelníky $V_a V_b M$, $V_b V_c M$, $V_c V_a M$; jmenujeme je po řadě kružnicemi U_c, U_a, U_b, a povšimněme si jich souvislosti.

5. Bod m určuje s vrcholy základního trojúhelníka trojúhelníky abm, bcm, cam; průsečík výšek prvého budiž v_c, druhého v_a a třetího v_b. Snadně lze dokázati, že čtyrúhelník $cmv_c v$ jest rovnoběžníkem a bod n, délku $\overline{vm}$ půlící, jeho středem. Z toho jde, že bod v_c jest souměren s vrcholem c dle středu n; rovněž souměrnými jsou body v_a, a — v_b, b. Jest tedy

$$\triangle abc \equiv \triangle v_a v_b v_c,$$

a oba trojúhelníky jsou v poloze souměrné dle středu n. Při tom jsou s výškami trojúhelníka abc souměrně sdruženy kolmice, bodem m ku stranám jeho spuštěné; paty kolmic těchto a', b', c' souměrny jsou k bodům a'', b'', c'', ve kterých přímka M protíná výšky V_a, V_b, V_c. Jest pak odtud zřejmo, že

$$\overline{a'b'} = \overline{a''b''},\quad \overline{b'c'} = \overline{b''c''},\quad \overline{c'a'} = \overline{c''a''}:$$

Část přímky Simsonovy M *omezená kterýmikoliv dvěma stranami trojúhelníka* abc, *rovna jest části obsažené mezi příslušnými k nim výškami.* —

Přímka M omezuje s výškami V_a, V_b, V_c trojúhelníky $a''b''v$, $b''c''v$, $c''a''v$; každý z nich shoduje se s určitým trojúhelníkem při bodě m a jest souměren s ním vzhledem ku n.

---

*) Professor vyšší real. šk. v Brně. *Red.*

Tak jest ku př. $\triangle a''b''v \equiv \triangle a'b'm$. Kružnice opsaná o trojúhelník posléze jmenovaný prochází též vrcholem c a má $\overline{cm}$ průměrem; proto kružnice U_c opsaná o $\triangle a''b''v$ jde průsečíkem v_c, a střed její u_c půlí délku $\overline{vv_c}$. Dle obdoby soudíme, že střed u_a kružnice U_a půlí délku $\overline{vv_a}$, střed u_b kružnice U_b půlí délku $\overline{vv_b}$. Z důvodů těchto jest $\triangle u_a u_b u_c \sim \triangle v_a v_b v_c$, a jelikož trojúhelník tento souměren jest ku abc, můžeme říci:

Středy kružnic U_a, U_b, U_c jsou vrcholy trojúhelníka, kterýž jest dle poměru — $\frac{1}{2}$ podoben trojúhelníku abc a s ním dle středu n souměrně položen.

Kružnice V opsaná o trojúhelník $v_a v_b v_c$ souměrna jest s kružnicí K opsanou o trojúhelník základní, a ježto bod m souměren jest ku v, jde kružnice ona tímto bodem v. Opíšeme-li kružnici U body u_a, u_b, u_c, bude tato dle středu v a dle poměru $\frac{1}{2}$ podobna kružnici V, čili jinými slovy:

Kružnice U opsaná o trojúhelník $u_a u_b u_c$ jde bodem v a shodna jest s kružnicí L.

6. Dána buď přímka Simsonova M_1 příslušná bodu m_1, a v přímce té bod k; mějme stanoviti přímku Simsonovu M_2, která prvou v bodě k seče. Rozpůlivše $\overline{vm_1}$ bodem n_1, sestrojíme nad tětivou $\overline{kn_1}$ kružnici L'_3 shodnou s L a protínající L v bodě n_2; přímka $\overline{vn_2}$ určuje v K bod m_2, k němuž příslušná přímka M_2 jde bodem k. Nad tětivou $\overline{kn_1}$ možno však sestrojiti ještě druhou takovou kružnici L'_2 určující bod n_3 a tudíž přímku M_3, jdoucí též bodem k. Ze sestrojení tohoto, které odstavcem 4. jest odůvodněno, plyne, že každým bodem dané přímky Simsonovy M_1 procházejí ještě dvě jiné takové přímky M_2, M_3. Poněvadž tyto tři přímky jsou tečnami křivky obalové všech přímek Simsonových, náležejících trojúhelníku danému, a poněvadž mimo ně nelze jiných tečen bodem k stanoviti, přesvědčili jsme se o správnosti známé věty, že ona křivka obalová jest třídy třetí.

Jest patrno, že v případě právě uvažovaném zastupuje bod k tři sjednocené průsečíky k_1, k_2, k_3, a poněvadž jest průsečíkem kružnice L'_2, L'_3, musí býti dle věty dříve vyložené průsečíkem výšek v trojúhelníku $n_1 n_2 n_3$; protož:

Protínají-li se tři přímky Simsonovy M_1, M_2, M_3 v jediném bodě, jest tento průsečíkem výšek v trojúhelníku $n_1 n_2 n_3$.

Poněvadž jsou strany tohoto trojúhelníka rovnoběžny se stranami trojúhelníka $m_1 m_2 m_3$, jest

$$M_1 \perp \overline{m_2 m_3}, \quad M_2 \perp \overline{m_3 m_1}, \quad M_3 \perp \overline{m_1 m_2};$$

odtud vysvítá:

Sestrojíme-li bodem m_1 kolmici k M_2 a bodem m_2 kolmici k M_1, protínají se tyto kolmice na kružnici K v bodě m_3, k němuž příslušná přímka M_3 jde průsečíkem prvých dvou kolmo ku $\overline{m_1 m_2}$.

Stereometr.

Napsal

Vavřinec Jelínek,

professor v Novém Městě u Vídně.

Při stanovení krychlového obsahu daného tělesa stereometrem Sayovým neb Regnaultovým aneb Koppovým jest nám znáti obsah nádoby, do níž toto těleso klademe, a prostor od nádoby až ku vnitřní hladině rtuti; pak vyjímaje přístroj Regnaultův nelze se obejíti bez předcházejícího určení tlaku ve vzduchu zevním. Mimo měnivou výšku rtuťového sloupce, přístrojem nalezenou, závisí tedy výsledek vypočtěného obsahu na třech konstantách. Konečně by úplná přesnosť také vyžadovala, aby rtuť ve jmenovaných přístrojích byla tak čistá a bezvzdušná jako v barometru, o čemž však v obyčejných fysikálních kabinetech, kde se užívá rtuti při mnohých pokusech k dosažení doteku kovů, lze pochybovati.

Dovoluji si tedy upozorniti na následující methodu.

Ze dna nádoby o známém krychlovém obsahu K vybíhejž dobře kalibrovaná, skleněná roura, jejíž délka by byla na libovolné, avšak vespolek rovné dílce rozvržena.

Ponoříme-li rouru do kapaliny o měrné váze σ až po dno nádoby a pak rouru povytáhneme, až v ní vystoupne sloupec kapaliny do výše c_1 nad zevní hladinou, bude dle Mariottova zákona poznamenáme-li prostor v rouře nad tímto sloupcem písmenem R_1,

$$K\, b\, s = (K + R_1)\,(bs - c_1 \sigma),$$