Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Antonín Jeřábek

O resolventách

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 21 (1892), No. 1, 1--11

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121507

O resolventách.

Napsal

Antonín Jeřábek,

professor akademického gymnasia v Praze.

Obecné řešení vyšší rovnice děje se zhusta tím způsobem, že se zvolí za novou neznámou *rationalní funkce neznámých kořenů* $x_0, x_1, x_2 \ldots$, kteráž rozličným přestavením (substitucí) jejich připouští *méně* hodnot než *kolik* daná rovnice obsahuje kořenův.

Takto vzejde na pomoc rovnice, jejíž součinitelé jsou rationalními funkcemi součinitelů rovnice původní, a která je stupně nižšího; rozřešíme-li ji, zbývá nám toliko z jejích kořenův ustanoviti $x_0, x_1, x_2 \ldots$, což opět řešením nižší rovnice provésti lze, byla-li zmíněná rationalní funkce kořenů vhodně zvolena; řešení binomických rovnic, jehož lze dosíci jednoduchým odmocněním, jest ovšem mimo zřetel.

V tomto případě jmenujeme pak dotčenou pomocnou rovnici *resolventou* a rationalní funkci, jež jest jejím kořenem, *funkcí resolvující.* Jsou tedy *resolventa* a *funkce resolvující* pojmy na vzájem vztažné; neníť resolventy bez resolvující funkce a obráceně.

— Za příklad stůj Lagrange'ovo řešení obecné *rovnice čtvrtého stupně*

$$x^4 + A_3x^3 + A_2x^2 + A_1x + A_0 = 0,$$

jež opírá se o resolvující funkci $x_0x_1 + x_2x_3$.

Funkce tato nabývá celkem tří hodnot:

$$\begin{aligned} v_1 &= x_0x_1 + x_2x_3, \\ v_2 &= x_0x_2 + x_1x_3, \\ v_3 &= x_0x_3 + x_1x_2. \end{aligned}$$

Sestavíme-li z těchto jakožto kořenů resolventu, obdržíme kubickou rovnici:

$$v^3 - A_2 v^2 + (A_1 A_3 - 4A_0)v - (A_0 A_3^2 - 4A_0 A_2 + A_1^2) = 0,$$

z níž řešením vyplývá v_1, v_2, v_3.

Odtud pak $x_0 x_1$ a $x_2 x_3$ vychází řešením kvadratické rovnice z v_1 a A_0; $x_0 + x_1$ potom rovnicí linearní ze vztahů:

$$\begin{aligned} x_2 x_3 (x_0 + x_1) + x_0 x_1 (x_2 + x_3) &= -A_1, \\ (x_0 + x_1) + (x_2 + x_3) &= -A_3; \end{aligned}$$

konečně x_0 a x_1 ze součtu $(x_0 + x_1)$ a součinu $x_0 x_1$ opět rovnicí kvadratickou. —

V úvaze, jež následuje, hodláme dokázati, že ani *kubická* ani *bikvadratická rovnice nemůže býti obecné rovnici, jejíž stupeň přesahuje stupeň čtvrtý, resolventou v tomto smyslu pojatou.*

Abychom souměrné funkce kořenů x_0, x_1, x_2, ... x_{n-1} zkrátka vyjádřili, užijeme k tomu dle potřeby písmen

$$\begin{array}{l} P,\ Q, \ldots \\ P',\ Q',\ R', \ldots \\ P'',\ Q'',\ R'',\ S'', \ldots \\ \ldots\ldots\ldots \end{array}$$

§. I. Resolventa kvadratická.

Rovnice kvadratická má kořeny, kterým lze dáti tvar nejjednodušší tento:

$$(1) \qquad \begin{aligned} x_0 &= Q + \sqrt{P}, \\ x_1 &= Q - \sqrt{P}. \end{aligned}$$

Má-li tedy rovnice 2. stupně státi se *resolventou* některé vyšší rovnice, jest nutno, aby z kořenů té vyšší rovnice bylo lze sestaviti *funkci rationalní* $f(x_0, x_1, x_2, \ldots)$, která má toliko *dvě* hodnoty, a ty aby byly kořeny resolventy.

Rationalní funkce však, která má toliko *dvě* hodnoty, doznává *každou* transposicí změny (Serret-Wertheim str. 352 sv. 2.).

Řídíce se tímto pokynem sestavme si v každém případě, když nám bude řešiti obecnou vyšší rovnici resolventou kvadratickou,

(2) *dvě funkce rationalní z kořenův obecné rovnice vyšší* $(x_0, x_1, x_2, \ldots)$,

(3) *kteréž kteroukoliv transposicí jejich* $(x\, x_k)$ *na vzájem se zastupují a tedy*

(4) *sudým počtem transposic vůbec se nemění,*

(5) *a sice tak, aby z nich bylo lze určiti* $x_0, x_1, x_2, \ldots$, *aniž třeba bylo řešiti rovnici vyšší než jest kvadratická.*

Důsledek. Má-li *obecná kubická rovnice*

$$x^3 + A_2 x^2 + A_1 x + A_0 = 0$$

míti *resolventu kvadratickou*, jest nezbytno, aby ze *tří* jejích kořenů x_0, x_1, x_2 sestrojiti bylo lze *dvě* funkce rationalní, které dle (4) *cyclickou záměnou třetího řádu se nemění*; k tomu se žádá, aby určení x_0, x_1, x_2 z resolvující funkce f nevedlo k rovnici vyšší než jest kvadratická.

Pomocným ve hledání těchto funkcí jeví se hlavně znak, „že totiž cyclickou záměnou všech tří kořenů neberou změny", upozorňuje nás, že máme při cyclické funkci třetího řádu se zastaviti, abychom u ní vyzkoumali, zdali také ostatním požadavkům zadost činí.

Vskutku mají funkce

$$(x_0 + \beta x_1 + \beta^2 x_2)^3 \text{ a } (x_0 + \beta^2 x_1 + \beta x_2)^3,$$

v nichž β primitivní kubickou odmocninu jedničky $\frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3})$ značí, všechny vlastnosti (2), (3), (4), (5), jak snadno lze se přesvědčiti.

Mohou tudíž cyclické funkce tyto státi se kořeny kvadratické resolventy *), z níž řešením vychází:

$$(6) \quad \begin{aligned} (x_0 + \beta x_1 + \beta^2 x_2)^3 &= Q' + \sqrt{P'}, \\ (x_0 + \beta^2 x_1 + \beta x_2)^3 &= Q' - \sqrt{P'}. \end{aligned}$$

Odečteme-li obě tyto rovnice, vyplývá

$$(7) \quad (x_0 + \beta x_1 + \beta^2 x_2)^3 - (x_0 + \beta^2 x_1 + \beta x_2)^3 = 2\sqrt{P'}.$$

---

*) $f^2 + (2A_2^3 - 9A_2A_1 + 27A_0)f + (A_2^2 - 3A_1)^3 = 0.$

Odmocníme-li v (6), obdržíme:

$$
\begin{aligned}
(8)\qquad & x_0 + \beta x_1 + \beta^2 x_2 = \sqrt[3]{Q' + \sqrt{P'}},\\
& x_0 + \beta^2 x_1 + \beta x_2 = \sqrt[3]{Q' - \sqrt{P'}};
\end{aligned}
$$

mimo to pak $x_0 + x_1 + x_2 = R'$

a odtud řešením linearních rovnic těchto:

$$
\begin{aligned}
& x_0 = \frac{1}{3}\left(R' + \sqrt[3]{Q' + \sqrt{P'}} + \sqrt[3]{Q' - \sqrt{P'}}\right)\\
(9)\qquad & x_1 = \frac{1}{3}\left(R' + \beta^2\sqrt[3]{Q' + \sqrt{P'}} + \beta\sqrt[3]{Q' - \sqrt{P'}}\right)\\
& x_2 = \frac{1}{3}\left(R' + \beta\sqrt[3]{Q' + \sqrt{P'}} + \beta^2\sqrt[3]{Q' - \sqrt{P'}}\right) \text{*)}.
\end{aligned}
$$

---

*) Podobně lze sestaviti dvě funkce tyto:

$$
\begin{aligned}
u_1 &= (x_0 x_1^2 + x_1 x_2^2 + x_2 x_0^2)\\
u_2 &= (x_0^2 x_1 + x_1^2 x_2 + x_2^2 x_0),
\end{aligned}
$$

jež mají vlastnosti (2), (3), (4). Sestavíme-li z nich rovnici kvadratickou

$$u^2 + (A_2 A_1 - 3A_0)\,u + A_2^3 A_0 - 6A_2 A_1 A_0 + A_1^3 + 9A_0^2 = 0,$$

bude

$$
\begin{aligned}
Q_1' + \sqrt{P_1'} &= x_0 x_1^2 + x_1 x_2^2 + x_2 x_0^2,\\
Q_1' - \sqrt{P_1'} &= x_0^2 x_1 + x_1^2 x_2 + x_2^2 x_0.
\end{aligned}
$$

Z dvou těchto rovnic a součinitelů dané rovnice

$$x^3 + A_2 x^2 + A_1 x + A_0 = 0$$

vyhledáme pak x_0, x_1, x_2. Zde však podotknouti dlužno, že řešení další opět vede k rovnici kubické

$$y^3 - (Q_1' + \sqrt{P_1'})\,y^2 - A_0 (Q_1' - \sqrt{P_1'})\,y + A_0^3 = 0,$$

jejíž kořeny jsou $x_0 x_1^2$, $x_1 x_2^2$, $x_2 x_0^2$, z nichž na konec x_0, x_1, x_2 určiti se dají. Jak patrno, nemusí každá funkce s vlastnostmi (2), (3), (4) býti již funkcí resolvující. — Čtenář zkusiž převésti funkce u_1 a u_2 na funkce v (6) uvedené a dokázati správnost vzorců:

$$
\begin{aligned}
(x_0 + \beta x_1 + \beta^2 x_2)^3 &= -A_2^3 - 9A_0 + 3A_1 A_2 + 3\beta^2 u_1 + 3\beta u_2,\\
(x_0 + \beta^2 x_1 + \beta x_2)^3 &= -A_2^3 - 9A_0 + 3A_1 A_2 + 3\beta u_1 + 3\beta^2 u_2.
\end{aligned}
$$

§. II. Resolventa kubická.

Obecná rovnice kubická má kořeny, které lze uvésti na tvar (9),

(10) *v němž dle (7) a (8) všecky odmocniny lze nahraditi rationalními funkcemi kořenů* x_0, x_1, x_2.

Má-li kubická rovnice opět býti *resolventou* některé obecné vyšší, bude nutno, aby z kořenův oné vyšší rovnice bylo lze utvořiti *funkci rationalní* $\varphi(x_0, x_1, x_2, x_3 \ldots)$, která má toliko *tři* hodnoty, a ty aby byly kořeny resolventy.

Podaří-li se nalézti funkci takovou, bude jisto, že i kvadratická rovnice zároveň jest resolventou takové vyšší rovnice, protože kubická resolventa v řešení svém kvadratickou resolventu zahrnuje.

Okolnost tato má v zápětí, že vyhověno býti musí i

(11) *požadavkům* (2), (3), (4), (5) *při kořenech* x_0, x_1, x_2, x_3, ... *dané vyšší rovnice.*

Taková funkce rationalní $v = \varphi(x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots)$ o třech hodnotách, jižto nám hledati jest vždy, když řešiti máme resolventou kubickou, musí míti především znak tento:

(12) *Všechny odmocniny ve výrazech algebraických, jimiž stanoví se její hodnoty* v_1, v_2, v_3, *jsou rationalní funkce kořenů* $(x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots)$.

Odůvodnění vyplývá podle (10), myslíme-li si obdobně v (9), (8) a (7), místo x_0, x_1, x_2 rationalní funkce v_1, v_2, v_3; neboť rationalní funkce funkcí v_1, v_2, v_3 jsou též rationalními funkcemi kořenů x_0, x_1, x_2, x_3, ...

Jak jen sestaviti tři hodnoty rationalní funkce takové? K otázce této poskytuje odpověď vzor (9). Mají-li se totiž výrazy:

$$v_1 = R'' + \sqrt[3]{Q'' + \sqrt{P''}} + \sqrt[3]{Q'' - \sqrt{P''}},$$

$$v_2 = R'' + \beta^2 \sqrt[3]{Q'' + \sqrt{P''}} + \beta \sqrt[3]{Q'' - \sqrt{P''}},$$

$$v_3 = R'' + \beta \sqrt[3]{Q'' + \sqrt{P''}} + \beta^2 \sqrt[3]{Q'' - \sqrt{P''}} \text{ *)}$$

kteroukoliv substitucí jen tak měniti, aby jeden ve druhý anebo v sebe přecházely a ne jinak, pak platí,

*) Pomíjíme zde důkazu, že jen *těmito třemi vzorci* kořeny kubické rovnice lze vyznačiti.

(13) *že vždy dva se zaměňují jednoduchou transposicí kořenů* $(x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots)$, *jeden však se nemění.*

Odůvodnění vyplývá z úvahy této:

. Provedeme-li jednoduchou transposici v těchto výrazech, myslíce si za jednotlivé odmocniny podle (12) dosazené příslušné rationalní funkce kořenů $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots$, zamění se dle (11) $\sqrt{P''}$ ve $-\sqrt{P''}$, i mohou pak nastati toliko případy tyto:

buď *a*) $\sqrt[3]{Q''+\sqrt{P''}}$ zamění se v $\sqrt[3]{Q''-\sqrt{P''}}$, potom ovšem $\sqrt[3]{Q''-\sqrt{P''}}$ v $\sqrt[3]{Q''+\sqrt{P''}}$,

nebo *b*) $\sqrt[3]{Q''+\sqrt{P''}}$ zamění se v $\beta\sqrt[3]{Q''-\sqrt{P''}}$ a tedy $\sqrt[3]{Q''-\sqrt{P''}}$ v $\beta^2\sqrt[3]{Q''+\sqrt{P''}}$,

nebo *c*) $\sqrt[3]{Q''+\sqrt{P''}}$ zamění se v $\beta^2\sqrt[3]{Q''-\sqrt{P''}}$, tudíž $\sqrt[3]{Q''-\sqrt{P''}}$ v $\beta\sqrt[3]{Q''+\sqrt{P''}}$.

V případě *a*) zamění se na vzájem v_2 s v_3 a zůstává bez proměny v_1;

v případě *b*) zamění se navzájem v_1 s v_2 a nemění se v_3;

v případě *c*) zamění se navzájem v_3 s v_1 a nemění se v_2.

Tedy vždy zaměňují se jednoduchou transposicí kořenů $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots$ dva z výrazů v_1, v_2, v_3, třetí pak jest bez proměny.

Potom lze též dokázati:

(14) *Dvojnásobnou transposicí, která není cyklickou záměnou, nemění se ani* v_1 *ani* v_2 *ani* v_3. Jinými slovy:

Mění-li transposice $(x_i\ x_j)$ *funkce* v_1, v_2, v_3 *ve* v_2, v_1, v_3 (13), *pak musí transposice dvou jiných kořenů* $(x_k\ x_l)$ *měniti výrazy* v_2, v_1, v_3 *ve* v_1, v_2, v_3.

Nebo kdyby jinak bylo, měnila by transposice $(x_k\ x_l)$ výrazy v_2, v_1, v_3 buď

a) ve v_3, v_1, v_2

nebo

b) ve v_2, v_3, v_1 podle (13).

Případ *a*). Pak by ale transposicí $(x_k x_l)$ měnily se výrazy v_1, v_2, v_3 ve v_1, v_3, v_2, kteréž transposicí $(x_i x_j)$ nabyly by záměny v_2, v_3, v_1, což vzhledem k supposici *a*) býti nemůže, protože jedno jest, v jakém pořádku dvě substituce o *různých* prvcích provedeme.

Případ *b*). Potom by zase transposicí $(x_k x_l)$ měnily se výrazy v_1, v_2, v_3 ve v_3, v_2, v_1, kteréž transposici $(x_i x_j)$ zaměnily by se ve v_3, v_1, v_2, což vzhledem k supposici *b*) z důvodu téhož jako v případě *a*) býti nemůže.

Důsledek. Má-li tedy *obecná bikvadratická rovnice*

$$x^4 + A_3 x^3 + A_2 x^2 + A_1 x + A_0 = 0$$

míti *resolventu kubickou*, žádá se, aby ze *čtyř* jejích kořenů x_0, x_1, x_2, x_3 sestaveny byly *tři* funkce rationalní, *které by činily zadost* (13) *a* (14), při čemž (14) jest vlastně následným znakem jejich.

Však právě následný ten znak může k nalezení jejich, jež jest věcí vtipu, velice přispěti. Zdá se, že znak (14) nejvíce odhaluje nám jejich povahu veda nás k funkcím:

$$\begin{aligned} v_1 &= (x_0 + x_1 - x_2 - x_3)^2 \\ v_2 &= (x_0 - x_1 - x_2 + x_3)^2 \qquad (15) \\ v_3 &= (x_0 - x_1 + x_2 - x_3)^2, \text{*)} \end{aligned}$$

kteréž toliko tři různé mají hodnoty, vzájemně se zaměňujíce aneb nezměněně trvajíce, ať již jakoukoliv substituci kořenů x_0, x_1, x_2, x_3 v nich provedeme. Snadno lze se přesvědčiti, že funkce tyto

α) jednoduchou transposicí dvě se zaměňují a že třetí se nemění,

---

*) Jiné funkce resolvující

$$w_1 = (x_0 + x_1)(x_2 + x_3), \quad w_2 = (x_0 + x_2)(x_1 + x_3), \quad w_3 = (x_0 + x_3)(x_1 + x_2)$$

vedou k resolventě:

$$w^3 - 2A_2 w^2 + (A_2^2 + A_3 A_1 - 4A_0)\, w + A_3^2 A_0 - A_3 A_2 A_1 + A_1^2 = 0.$$

Za příklad stůjtež dále funkce:

$$[(x_0 \pm x_1)^2 + (x_2 \pm x_3)^2],\ [(x_0 \pm x_2)^2 + (x_1 \pm x_3)^2],\ [(x_0 \pm x_3)^2 + (x_1 \pm x_2)^2];$$
$$(x_0 - x_1)^2 (x_2 - x_3)^2, \quad (x_0 - x_2)^2 (x_1 - x_3)^2, \quad (x_0 - x_3)^2 (x_1 - x_2)^2;$$
$$(x_0 x_1 - x_2 x_3)^2, \quad (x_0 x_2 - x_1 x_3)^2, \quad (x_0 x_3 - x_1 x_2)^2;\ \text{atd.}$$

β) dvojnásobnou transposicí, která není cyclickou substitucí, se nemění;

mimo to pak zjevuje se při nich, že

γ) cyclickou záměnou kterýchkoli tří kořenů cyclicky se zaměňují,

δ) cyclickou záměnou 4. řádu dvě se zaměňují, třetí pak se nemění.

ε) K tomu ovšem ustanoviti jest možno x_0, x_1, x_2, x_3, *aniž třeba řešiti některou rovnici vyšší; toť ovšem nezbytný znak funkce resolvující.*

Neboť, sestavíme-li z v_1, v_2, v_3 kubickou resolventu,*) nabudeme podle (15) a (9) řešením:

$$
(16)\quad
\begin{aligned}
x_0+x_1-x_2-x_3 &= \sqrt{\tfrac{1}{3}\left(R''+\sqrt[3]{Q''+\sqrt{P''}}+\sqrt[3]{Q''-\sqrt{P''}}\right)}=\Theta_1,\\
x_0-x_1-x_2+x_3 &= \sqrt{\tfrac{1}{3}\left(R''+\beta^2\sqrt[3]{Q''+\sqrt{P''}}+\beta\sqrt[3]{Q''-\sqrt{P''}}\right)}=\Theta_2,\\
x_0-x_1+x_2-x_3 &= \sqrt{\tfrac{1}{3}\left(R''+\beta\sqrt[3]{Q''+\sqrt{P''}}+\beta^2\sqrt[3]{Q''-\sqrt{P''}}\right)}=\Theta_3,\\
x_0+x_1+x_2+x_3 &= S'',
\end{aligned}
$$

odkud jednoduše obdržíme kořeny obecné bikvadratické rovnice, rozřešíce tyto linearní rovnice:

$$
(17)\quad
\begin{aligned}
x_0 &= \frac{1}{4}\left[S''+\Theta_1+\Theta_2+\Theta_3\right],\\
x_1 &= \frac{1}{4}\left[S''+\Theta_1-\Theta_2-\Theta_3\right],\\
x_2 &= \frac{1}{4}\left[S''-\Theta_1-\Theta_2+\Theta_3\right],\\
x_3 &= \frac{1}{4}\left[S''-\Theta_1+\Theta_2-\Theta_3\right].
\end{aligned}
$$

Poznámka. Nyní snadno jest poukázati k funkcím

---

*) $v^3-(3A_3^2-8A_2)v^2+(3A_3^4-16A_3^2A_2+16A_3A_1+16A_2^2-64A_0)v$
$-(A_3^3-4A_3A_2+8A_1)^2=0.$

$$u_1=[(x_0+x_1-x_2-x_3)^2+\beta(x_0-x_1-x_2+x_3)^2+\beta^2(x_0-x_1-x_2-x_3)^2]^3,$$
$$u_2=[(x_0+x_1-x_2-x_3)^2+\beta^2(x_0-x_1-x_2+x_3)^2+\beta(x_0-x_1+x_2-x_3)^2]^3,{}^{*)}$$

které každou transposicí se zaměňujíce, a jež dopouštějíce, aby z nich určeno bylo x_0, x_1, x_2, x_3 aniž třeba řešiti rovnici vyšší než kvadratickou, s dostatek nás přesvědčují, že obecná rovnice bikvadratická může míti resolventu kvadratickou, jak výše bylo předpověděno (11).

§. III. Šetření o resolventě pro rovnice obecné, jichž stupeň jest vyšší než čtvrtý.

Obecná rovnice bikvadratická má tedy kořeny, jimž lze dáti tvar (17), ve kterém

(18) *každá jednotlivá odmocnina dle* (16) *a* (12) *vyjádřiti se může rationalní funkcí kořenů* x_0, x_1, x_2, x_3.

Má-li bikvadratická rovnice býti resolventou některé obecné vyšší, musí býti možno:

1. *sestaviti z jejích kořenů funkci racionalní*

$$u=\psi(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots),$$

která má toliko čtyři hodnoty,

2. *určiti z ní* x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, ... *rovnicemi, jež se dají převésti na rovnice, které nepřesahují stupně čtvrtého.*

Dokážeme, že již první podmínka splniti se nedá.

Je-li totiž možná z více než čtyř kořenů sestaviti rationalní funkci u, která má toliko *čtyři různé* hodnoty u_0, u_1, u_2, u_3, pak lze sestaviti z nich rovnici bikvadratickou s rationalními součiniteli. Potom však lze tuto rozřešiti resolventou kubickou, jejíž kořenem jest rationalní funkce v, která rozličnými substitucemi x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, ... dosahuje toliko 3 hodnot:

---

*) Vzhledem k resolvující funkci Lagrange'ově bylo by

$$u_1=[x_0x_1+x_2x_3+\beta(x_0x_2+x_1x_3)+\beta^2(x_0x_3+x_1x_2)]^3,$$
$$u_2=[x_0x_1+x_2x_3+\beta^2(x_0x_2+x_1x_3)+\beta(x_0x_3+x_1x_2)]^3$$

a kvadratická resolventa bikvadratické rovnice

$$u^2+[-2A_2^3+9A_2(A_1A_3+8A_0)-27(A_0A_3^2+A_1^2)]u+(A_2^2-3A_1A_3+12A_0)^3=0.$$

$$
(19)\qquad \begin{aligned} v_1 &= (u_0 + u_1 - u_2 - u_3)^2 \\ v_2 &= (u_0 - u_1 - u_2 + u_3)^2 \\ v_3 &= (u_0 - u_1 + u_2 - u_3)^2; \end{aligned}
$$

ty pak nutně musí činiti zadost požadavkům (12), (13) a (14).

Protože funkce v podle (14) dvojnásobnou transposicí kořenů x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, ..., *která není cyclickou záměnou*, se nemění,

(20) *nezmění se ani cyclickou substitucí tří z kořenů* (x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, ...),

neboť obsahuje více než čtyři kořeny, i lze v ní na př. cyclickou záměnu (x_0, x_1, x_2) provésti dvěma dvojnásobnými transposicemi $(x_1 x_2)(x_3 x_4)$ a $(x_1 x_0)(x_3 x_4)$, z nichž žádná není cyclickou záměnou. *)

Ale pak transposice $(x_i x_k)$ zamění ty dvě hodnoty funkce v dle (13), které zaměnila transposice $(x_i x_j)$, protože změna prvou transposicí způsobená dle (20) druhou musí býti vyrovnána; tudíž $(x_i x_k)$ a $(x_i x_j)$ nechají jednu a touž třetí hodnotu v bez proměny. Podobně $(x_j x_i)$ a $(x_j x_l)$ jednu hodnotu funkce v společně nezmění, druhé dvě zaměníce. Protože však transposice $(x_i x_j)$ totožna jest s transposicí $(x_j x_i)$, vysvítá, že ta hodnota v_i funkce v, která transposicí $(x_i x_k)$ se nemění, také transposicí $(x_j x_l)$ zůstává bez proměny t. j. kteroukoli transposicí jinou nezměněna trvá.

I bude tedy

(21) v_i *a následkem toho* v *samo funkcí souměrnou,*

neboť v_1, v_2, v_3 jsou hodnoty jedné a téže funkce v, a ty jsou všecky souměrné, je-li jedna z nich souměrná, a proto i sobě rovny.

Potom jest nezbytně podle (19) buď

a) $u_0 + u_1 - u_2 - u_3 = +(u_0 - u_1 - u_2 + u_3) = +(u_0 - u_1 + u_2 - u_3)$,
nebo
b) $u_0 + u_1 - u_2 - u_3 = -(u_0 - u_1 - u_2 + u_3) = -(u_0 - u_1 + u_2 - u_3)$,
nebo
c) $u_0 + u_1 - u_2 - u_3 = +(u_0 - u_1 - u_2 + u_3) = -(u_0 - u_1 + u_2 - u_3)$,

---

*) Srovnej s β) a γ) při kubické resolventě rovnice bikvadratické.

nebo

$d)\ u_0+u_1-u_2-u_3=-(u_0-u_1-u_2+u_3)=+(u_0-u_1+u_2-u_3)$;

odkud vyplývá v případě

$$(22)\quad \begin{array}{ll} a) & u_1=u_2=u_3, \\ b) & u_2=u_3=u_0, \\ c) & u_3=u_0=u_1, \\ d) & u_0=u_1=u_2. \end{array}$$

Protože však výsledek (22) příčí se podmínce, nutno souditi, že *bikvadratická rovnice nemůže býti resolventou, v naznačeném shora smyslu pojatou, pro obecnou rovnici, jejíž stupeň přesahuje stupeň čtvrtý.*

Týmž způsobem se dokáže, užije-li se hned v odst. II. při (14) stejných důvodů jako při (20), *že ani rovnice kubická nemůže býti takovoutéž resolventou obecné rovnice, jejíž stupeň překročuje stupeň čtvrtý.*

O příčinách a průběhu zářijové povodně v Čechách r. 1890.

Napsal

dr. **Frant. Augustin,**
professor a docent v Praze.

I.

Povodeň, jaká byla v září minulého roku jest v Čechách úkazem neobyčejným a řídkým a zasluhuje proto, aby byla všestranně popsána a vysvětlena, zvláště též aby ze stanoviska meteorologicko-fysikálního byly vytčeny příčiny, určen byl rozsah a průběh tohoto zhoubného a zároveň velkolepého úkazu přírodního.*)

Jelikož povodně a zátopy vznikající vystupováním tekoucích vod z břehů povstávají výjevy atmosferickými, buď náhlým táním

---

*) O povodni v Čechách r. 1890 viz „*Výroční zprávu měst. střední školy v Praze za rok 1891.*“