Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Karel Petr

O separaci kořenů rovnic algebraických

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 59 (1930), No. 4, 233--241

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121539

O separaci kořenů rovnic algebraických.

Napsal *K. Petr.*

Pod stejným nadpisem jsem uveřejnil v 38. sv. (1909) Čas. pro pěst. mat. a fys. na str. 554 důkaz věty Stephanosovy*) vztahující se k užití věty Descartesovy na separaci kořenů rovnice algebraické. V následujícím podán nový důkaz této věty podstatně zjednodušený a zcela obecný, nepředpokládající žádná omezení při parametrech ve větě používaných.

Důkaz proveden na podkladě věty pomocné, jíž lze použíti (jakož také ukázáno) k jednoduchému důkazu věty Descartesovy.

Ke konci podán důkaz ještě další věty, která může býti užitečna při praktickém provádění separace kořenů. Věta týká se řady čísel (reálných)

$$a_0, a_1, a_2, \ldots;$$

sestrojíme-li pomocí této řady řadu $b_0, b_1, b_2, \ldots$ na podkladě vztahů $b_k = a_k + b_{k-1} A$, $b_0 = a_0$, kde $A > 0$, pak v řadě čísel $b_0, b_1, \ldots, b_m$ jest $\leqq$ změn znaménkových než v řadě $a_0, a_1, \ldots, a_m$, ať jest m jakékoliv číslo celé kladné. I tato věta má jakožto prostý důsledek větu Descartesovu. Ba lze na jejím základě dokázati bez potíží větu Budan-Fourierovu a to nejenom pro rovnice algebraické, nýbrž i pro rovnice dané řadami potenčními.

Netřeba snad zvláště podotýkati, že všecka čísla v následujícím uvažovaná jsou čísla reálná.

I.

K důkazu věty Descartesovy a Stephanosovy lze použíti této věty: Značí-li

$$[a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n]$$

počet změn znaménkových v řadě čísel $a_0, a_1, \ldots, a_n$, při čemž nuly se prostě vynechávají, a jsou-li čísla λ_i, μ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ čísla

*) Literární doklady viz v citovaném pojednání.

kladná, pak

$$[a_0, \lambda_1 a_1 - \mu_1 a_0, \lambda_2 a_2 - \mu_2 a_1, \ldots, \lambda_n a_n - \mu_n a_{n-1}, - a_n] \geqq [a_0, a_1, \ldots, a_n] + 1. \qquad (I)$$

Větu tuto snadno lze dokázati úplnou indukcí. Neboť věta jest platna, jak takřka na prvý pohled patrno, pro $n = 1$. Dokážeme si pak, že jest platna pro $n = r$, platna-li jest pro $n = r - 1$. Budiž tedy

$$[a_0, \lambda_1 a_1 - \mu_1 a_0, \ldots, \lambda_{r-1} a_{r-1} - \mu_{r-1} a_{r-2}, - a_{r-1}] \geqq [a_0, a_1, \ldots, a_{r-1}] + 1 \qquad (1)$$

Avšak rozdíl

$$[a_0, \lambda_1 a_1 - \mu_1 a_0, \ldots, \lambda_r a_r - \mu_r a_{r-1}, - a_r] -$$
$$- [a_0, \lambda_1 a_1 - \mu_1 a_0, \ldots, \lambda_{r-1} a_{r-1} - \mu_{r-1} a_{r-2}, - a_{r-1}]$$

jest rovný 1, je-li a_r protivného znaménka, jako jest poslední z těch čísel $a_0, a_1, \ldots, a_{r-1}$, jež jsou od nuly různy. Jest dále rovný 0, je-li $a_r = 0$. Jest rovný 2, jestliže $a_{r-1} = 0$ a poslední z čísel a_0, $a_1, \ldots, a_{r-2}$ od nuly různé jest téhož znaménka jako a_r. Konečně, jsou-li obě čísla a_{r-1}, a_r od nuly různa a téhož znaménka, jest rozdíl uvažovaný buď 0 aneb 2. Neboť, přidáme-li k nějaké řadě čísel jednou člen $- a_{r-1}$, po druhé dva členy $\lambda a_r - \mu_r a_{r-1}, - a_r$, pak vznikne v druhém případě buď stejný počet změn znaménkových anebo o dvě větší než v prvém případě (jsou-li ovšem, jakož právě předpokládáme, a_r, a_{r-1} od nuly různé a stejného znaménka.)

Poněvadž pak rozdíl $[a_0, a_1, \ldots, a_r] - [a_0, a_1, \ldots, a_{r-1}]$ nabývá za různých právě uvažovaných předpokladů po řadě hodnot 1, 0, 0, 0, jest (I) v důsledku (1) platna, i když $n = r$, a věta jest dokázána.

Z (I) následuje

$$[a_0, \lambda_1 a_1 - \mu_1 a_0, \lambda_2 a_2 - \mu_2 a_1, \ldots, \lambda_n a_n - \mu_n a_{n-1}, + a_n] \geqq [a_0, a_1, \ldots, a_n]. \qquad [I']$$

II.

Větu Descartesovu lze pokládati za důsledek věty (I). Neboť, má-li rovnice algebraická (o reálných koeficientech)

$$A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_m = 0$$

kladný kořen α, lze psáti identicky

$$A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_m = (x - \alpha)(a_0 x^{m-1} + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_{m-1}),$$

kde $A_0 = a_0$, $A_1 = a_1 - \alpha a_0$, $A_2 = a_2 - \alpha a_1, \ldots, A_m = - \alpha a_{m-1}$

a podle věty (I) jest ihned

$$[A_0, A_1, \ldots, A_m] \geqq [a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}] + 1.$$

Má-li daná rovnice celkem r kladných kořenů, plyne opětovným použitím naznačeného právě postupu ihned

$$[A_0, A_1, A_2, \ldots, A_m] \geqq r$$

což jest právě věta Descartesova, jež obyčejně se doplňuje výrokem, že rozdíl obou stran této nerovniny jest číslo sudé.

Větu Descartesovu, jak známo, lze použíti na každý interval (a, b). Značíme-li levou stranu rovnice dané $f(x)$, pak lze větu Descartesovu použíti na zjišťování počtu kořenů kladných rovnice

$$(1 + y)^m f\left(\frac{ay + b}{y + 1}\right) = 0;$$

kladným kořenům však této poslední rovnice odpovídají kořeny rovnice dané mezi a, b a naopak. Má-li tedy poslední rovnice tvar $B_0y^m + B_1y^{m-1} + \ldots + B_m = 0$, pak jest počet kořenů rovnice dané položených v intervalu $(a + 0, b - 0)$ — předpokládáme $a < b$ — rovný nejvýše číslu $[B_0, B_1, \ldots, B_m]$. Označíme

$$Z_{ab} = [B_0, B_1, \ldots, B_m].$$

Pomocí tohoto označení lze vysloviti větu Stephanosovu pro rovnici danou takto $(a < b < c)$:

$$Z_{ab} + Z_{bc} \leqq Z_{ac}. \tag{II}$$

Abychom tento vztah dokázali, tak si jej nejprve poněkud zjednodušíme. Zavedeme nejprve označení homogenní a píšeme levou stranu její ve tvaru

$$A_0x_1^m + A_1x_1^{m-1}x_2 + A_2x_1^{m-2}x_2^2 + \ldots + A_mx_2^m, \tag{+}$$

Z_{ab} dostaneme nyní, provedeme-li lineární substituci na tomto výraze tvaru

$$x_1 = a_1y_1 + b_1y_2, \; x_2 = a_2y_1 + b_2y_2,$$

$$\text{kde } a_2 > 0, \; b_2 > 0 \text{ a } a = \frac{a_1}{a_2}, \; b = \frac{b_1}{b_2}.$$

Dostaneme nový výraz tvaru

$$\overline{B}_0y_1^m + \overline{B}_1y_1^{m-1}y_2 + \ldots + \overline{B}_my_2^m,$$

ve kterémž $\overline{B}_0, \overline{B}_1, \ldots, \overline{B}_m$ se liší od $B_0, B_1, \ldots, B_m$ pouze o kladné činitele (neboť $a_2 > 0$, $b_2 > 0$) a tedy $Z_{a,b} = [\overline{B}_0, \overline{B}_1, \ldots, \overline{B}_m]$. Můžeme připustiti dokonce i pro jedno z čísel a_2, b_2 hodnotu nulovou. Je-li ku př. $b_2 = 0$, $b_1 > 0$, máme tu substituci

$$x_1 = a_1y_1 + b_1y_2, \; x_2 = a_2y, \text{ aneb, klademe-li } \frac{x_1}{x_2} = x, \; \frac{b_1y_2}{a_2y_1} = y,$$

substituci

$$x = a + y,$$

ze které jest patrno, že počet změn znaménkových v rovnici transformované jest rovný anebo větší než počet kořenů větších než a v rovnici dané, a můžeme tudíž b_1/b_2, když $b_1 > 0$, $b_2 = 0$, nahrazovati prostě $+\infty$.

Jelikož pak sled dvou lineárních substitucí jest zase lineární substituce, lze výraz (+) transformovati lineární substitucí

$$x_1 = \alpha z_1 + \beta z_2,\ x_2 = \gamma z_1 + \delta z_2$$

na výraz

$$C_0 z_1^m + C_1 z_1^{m-1} z_2 + \ldots + C_m z_2^m. \qquad (\times)$$

při čemž zároveň $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ tak volíme, aby

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{\alpha z_1 + \beta z_2}{\gamma z_1 + \delta z_2}$$

se redukovalo po řadě na a, b, c, když klademe $z_1 = 0$, $z_2 = 1$; $z_1 = 1$, $z_2 = 1$; $z_1 = 1$, $z_2 = 0$. Označíme-li pro ($\times$) čísla, jež jsme pro výraz (+) resp. pro rovnici danou značili Z_{ab}, znakem $\overline{Z}_{ab}$, máme nejprve

$$Z_{ab} = \overline{Z}_{01},\ Z_{bc} = \overline{Z}_{1\infty},\ Z_{ac} = \overline{Z}_{0\infty}$$

a vztah (II) se změní ve vztah

$$\overline{Z}_{01} + \overline{Z}_{1\infty} \leqq \overline{Z}_{0\infty},$$

kterýžto stačí tedy dokázati pro libovolnou rovnici, aby dokázán byl obecně vztah (II).

III.

Máme-li rovnici

$$A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_m = 0,$$

pak jest pro tuto rovnici $Z_{0\infty} = [A_0, A_1, \ldots, A_m]$, dále $Z_{1\infty} = [B_0, B_1, \ldots, B_m]$, kde B_k dostáváme, provádíme-li v dané rovnici substituci $x = 1 + y$, a kde tedy

$$B_k = \binom{m}{m-k} A_0 + \binom{m-1}{m-k} A_1 + \binom{m-2}{m-k} A_2 + \ldots + A_k. \qquad (\alpha)$$

Konečně Z_{01} obdržíme substitucí $x = 1/(1+y)$ a jest $Z_{01} = [C_0, C_1, \ldots, C_m]$, je-li

$$C_k = \binom{m}{m-k} A_m + \binom{m-1}{m-k} A_{m-1} + \ldots + A_{m-k} \qquad (\alpha')$$

$$C_m = B_m,\ C_0 = A_m,\ A_0 = B_0.$$

Jest tedy naším úkolem dokázati, že

$$[A_0, A_1, \ldots, A_m] \geqq [B_0, B_1, \ldots, B_m] + [C_0, C_1, \ldots, C_m], \qquad (-)$$

kde B_k, C_k souvisí s čísly A_k vztahy (α), (α'). To dokážeme úplnou indukcí. Vztah nejprve jest platný pro $m = 1$. Dokážeme, že platí i (—), platný-li jest obdobný vztah pro každou rovnici stupně $(m - 1)$. Vyjdeme od této rovnice stupně $m - 1$ (jež vzniká derivováním rovnice dané)

$$mA_0x^{m-1} + (m-1)A_1x^{m-2} + \ldots + A_{m-1} = 0. \qquad (=)$$

Provedeme-li substituci $x = 1 + y$, pak koeficienty rovnice tak vznikající budou $\overline{B}_k$. Mezi $\overline{B}_k$ a B_k svrchu vypočtenými jest vztah $\overline{B}_k = (m - k)B_k$. Abychom vypočetli obdobně i $\overline{C}_k$, užijeme identity (levou stranu rovnice dané označíme $f(x)$)

$$(z+1)\left[(z+1)^m f\left(\frac{1}{z+1}\right)\right]' =$$
$$= m(z+1)^m f\left(\frac{1}{z+1}\right) - (z+1)^{m-1} f'\left(\frac{1}{z+1}\right),$$

z níž následuje ihned

$$\overline{C}_k = (k+1)C_{k+1} - (m-k)C_k. \qquad (\beta)$$

Ze vztahu tedy, který předpokládáme

$$[\overline{A}_0, \overline{A}_1, \ldots, \overline{A}_{m-1}] \geqq [\overline{B}_0, \overline{B}_1, \ldots, \overline{B}_{m-1}] + [\overline{C}_0, \overline{C}_1, \ldots, \overline{C}_{m-1}],$$

vzniká tedy dosazením vztah ($\overline{A}_k = (m-k)A_k$)

$$[A_0, A_1, \ldots, A_{m-1}] \geqq [B_0, B_1, \ldots, B_{m-1}] + [C_1 - mC_0, 2C_2 - \\ - (m-1)C_1, \ldots, mC_m - C_{m-1}] \qquad (\gamma)$$

Koeficienty $\overline{C}_0, \overline{C}_1, \ldots, \overline{C}_{m-1}$ dostali bychom ostatně též z výrazu

$$\overline{B}_0u^{m-1} + \overline{B}_1u^{m-2} + \ldots + \overline{B}_{m-1},$$

kdybychom v tomto výraze provedli substituci $1 + u = \frac{1}{1+v}$ aneb $u = \frac{-v}{1+v}$ a násobili potom $(1+v)^{m-1}$. Dostali bychom (nahradíme-li ihned $\overline{B}_k$ čísly B_k)

$$\overline{C}_{m-1} = B_{m-1}, \; \overline{C}_{m-2} = (m-1)B_{m-1} - 2B_{m-2},$$
$$\overline{C}_{m-3} = .\, B_{m-1} - .\, B_{m-2} + .\, B_{m-3}, \ldots$$

Tečky v posledním vztahu zastupují kladné numerické součinitele. Z těchto relací jest patrno, že první z čísel $\overline{C}_{m-1}, \overline{C}_{m-2}, \overline{C}_{m-3}, \ldots$, které jest od nuly různé — budiž to číslo $\overline{C}_{m-r}$, má totéž znaménko jako $(-1)^{r-1}B_{m-r}$; při tom současně vymizejí čísla $B_{m-1}, B_{m-2}, \ldots, B_{m-r+1}$. Můžeme tedy ze vztahu (γ) usuzovati vztah (majíce na mysli, že $B_m = C_m$)

$$[A_0, A_1, \ldots, A_{m-1}] \geqq [B_0, B_1, \ldots, B_{m-1}, B_m] + \\ + [C_1 - mC_0, 2C_2 - (m-1)C_1, \ldots, mC_m - C_{m-1}, -C_m] - \delta - 1 \quad (\gamma)$$

neboť tím že jsme přidali v obou závorkách na pravé straně $B_m, -C_m$, ($B_m = C_m$) zpravidla hodnota jedné závorky se nezměnila a druhé zvětšila se v 1. Jenom v případě, že r jest sudé, $B_m \neq 0$ a protivného znaménka jako B_{m-r}, se obě zvětšily o 1. V tomto posledním případě jest $\delta = 1$, jinak $\delta = 0$.

Z rovnic (α'), užijeme-li je na rovnici (=), jest dále patrno, že první z čísel $\overline{C}_0, \overline{C}_1, \ldots$, jež jest od nuly různé — budiž to $\overline{C}_s$ — má totéž znaménko jako A_{m-s}; zároveň jsou $A_{m-1}, A_{m-2}, \ldots, A_{m-s+1}$ rovny nule. Plyne tedy z (γ') ihned ($C_0 = A_m$)

$$[A_0, A_1, \ldots, A_{m-1}, A_m] \geqq [B_0, B_1, \ldots, B_m] + \\ + [C_0, C_1 - m\,C_0, \ldots, mC_m - C_{m-1}, - C_m] - \delta - 1.$$

Avšak poněvadž podle věty základní (I)

$$[C_0, C_1 - mC_0, \ldots, mC_0 - C_{m-1}, - C_m] \geqq [C_0, C_1, \ldots, C_m] + 1,$$

máme

$$[A_0, A_1, \ldots, A_m] \geqq [B_0, B_1, \ldots, B_m] + [C_0, C_1, \ldots, C_m] - \delta \quad (\iota)$$

Jestliže $B_m = 0$, pak $\delta = 0$; tímto případem netřeba se dále zabývati a budeme tedy předpokládati dále, že B_m (které jest rovno C_m) jest od nuly různé. $A_0 = B_0 \neq 0$, neboť by jinak neběželo o rovnice stupně m-tého. Konečně podle rovnic (α') poslední z čísel $A_0, A_1, \ldots$ jež jest od nuly různé, shoduje se s prvním z koeficientů $C_0, C_1, \ldots$, jenž jest od nuly různý. Jelikož však $[A_0, A_1, \ldots, A_m]$ se liší od počtu kořenů kladných rovnice $A_0x^m + \ldots + A_m = 0$ o číslo sudé (a podobně jest tomu i u ostatních závorek), jest hranatá závorka v (ι) na levé straně téže parity jako součet hranatých závorek na pravé straně a můžeme tudíž δ, které buď 0 nebo 1, vůbec potlačit, aniž by byla porušena správnost napsaného vztahu a psáti

$$[A_0, A_1, \ldots, A_m] \geqq [B_0, B_1, \ldots, B_m] + [C_0, C_1, \ldots, C_m],$$

čímž věta Stephanosova dokázána.

Dosadíme-li do věty Stephanosovy $Z_{ac} \geqq Z_{ab} + Z_{bc}$ za $c = \infty$ máme ihned vztah

$$Z_{ab} \leqq Z_{a\infty} - Z_{b\infty},$$

ze kterého následuje, že počet kořenů rovnice dané položených v intervalu ($a + 0$, $b - 0$), kterýžto počet jest menší než Z_{ab}, jest menší než $Z_{a\infty} - Z_{b\infty}$, což jest věta zvaná Budan-Fourierova, jež současně jest dokázána.

IV.

Větu Descartesovu můžeme však též na základě jiné věty, jež i při praktickém provádění separace kořenů pomocí Hornerova schematu má podstatný význam a jež může sloužiti za podklad ku snadnému důkazu věty Budan-Fourierovy.

Můžeme totiž vysloviti větu: Je-li A číslo kladné (> 0) a sestrojíme-li k řadě čísel $a_0, a_1, a_2, \ldots$ (jež může míti nekonečně mnoho členů) řadu čísel $b_0, b_1, b_2, \ldots$ rovnicemi

$$b_0 = a_0, \; b_k = a_k + b_{k-1}A, \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

pak jest vždy

$$[b_0, b_1, \ldots, b_m] \leqq [a_0, a_1, \ldots, a_m], \; m = 0, 1, 2, \ldots \qquad \text{(III)}$$

Abychom tuto větu dokázali, užijeme plné indukce. Pro $m = 0$ jest věta samozřejma; neboť $[b_0] = 0$, $[a_0] = 0$ a tedy $[b_0] = [a_0]$. Dokážeme si ještě, že, platna-li jest pro $m = r - 1$, platí i pro r. Budiž tedy

$$[b_0, b_1, \ldots, b_{r-1}] \leqq [a_0, a_1, \ldots, a_{r-1}]. \qquad (\times)$$

Jestliže v tomto vztahu jest v platnosti znaménko nerovnosti, t. j. $<$, pak ihned následuje

$$[b_0, b_1, \ldots, b_r] \leqq [a_0, a_1, \ldots, a_r]$$

a vztah (III) pro $m = r$ dokázán. Stačí tedy uvažovati případ, kdy v ($\times$) platno znaménko rovnosti; v tomto případě má poslední z těch čísel $a_0, a_1, \ldots, a_{r-1}$, jež jsou od nuly různa, totéž znaménko jako poslední od nuly různé z čísel $b_0, b_1, \ldots, b_{r-1}$. Označme to znaménko pomocí $\varepsilon = \pm 1$. Jelikož však

$$b_r = a_r + Ab_{r-1},$$

má b_r buď totéž znaménko jako ε, po případě jest rovno nule, aneb b_r má protivné znaménko jako ε. Případ poslední nastane však tenkrát a jenom tenkrát, když i a_r má znaménko protivné znaménku ε (a zároveň $|a_r| > A$ ($|b_{r-1}|$). V případech obou však následuje z ($\times$) — ve kterém jest platno znaménko $=$ —

$$[b_0, b_1, \ldots, b_r] \leqq [a_0, a_1, \ldots, a_r]$$

Tím věta (III) obecně dokázána.

Větu (III) můžeme doplniti větou: Jestliže $A < 0$ pak,

$$[b_0, b_1, b_2, \ldots, b_m] \geqq [a_0, a_1, \ldots, a_m]. \qquad \text{(III}_1\text{)}$$

Důkaz její shoduje se s důkazem věty (III).

Mějž nyní rovnice

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0 \qquad (\alpha)$$

kladný kořen α; pak levá strana jest dělitelna $x - \alpha$ a můžeme psáti identicky

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = (x - \alpha)(b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \ldots + b_{n-1})$$

kde $b_0 = a_0, \; b_k = a_k + b_{k-1}\alpha, \; k = 1, 2, \ldots n; \; b_n = 0.$

Podle věty (III) však jest (b_n, které jest rovno nule vynecháváme)

$$[b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}] \leqq [a_0, a_1, \ldots, a_n].$$

Avšak a_n a b_{n-1} mají protivná znaménka ($a_n = -\alpha b_{n-1}$) a nemůže býti v posledním vztahu býti splněno znaménko = a jest tedy

$$[b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}] + 1 \leqq [a_0, a_1, \ldots, a_n].$$

Má-li rovnice daná kladné kořeny $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ (a již žádné jiné kladné kořeny, dospějeme, opětujíce r-kráte naznačený krok, ke vztahu

$$[a_0, a_1, \ldots, a_n] \geqq [q_0, q_1, \ldots, q_{n-r}] + r,$$

při čemž jest identicky

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \ldots$$
$$(x - \alpha_r)(q_0x^{n-r} + q_1 x^{n-r-1} + \ldots + q_{n-r}],$$

t. j. má-li rovnice algebraická r kořenů kladných, má řada čísel $a_0, a_1, \ldots, a_n$ aspoň r změn znaménkových (a má-li jich více, má jich více o sudý počet).

Jelikož věta (III) jest platna i pro nekonečné řady

$$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots \qquad (\beta)$$
$$b_0, b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots \qquad (\gamma)$$

a lze tvrditi, je-li v řadě (β) r změn znaménkových, že v řadě (γ), je-li $b_k = b_{k-1} A + a_k$, jest jich méně ($\leqq$) než p. Jestliže rovnice

$$0 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots$$

má kořen $x = A^{-1}$, kde A^{-1} jest v intervalu konvergenčním dané řady potenční, můžeme psáti identicky

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots = (1 - Ax)(b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots). \quad (\div)$$

Při tom řada $b_0 + b_1x + \ldots$ má týž poloměr konvergence jako řada $a_0 + a_1x + \ldots$*) Jelikož pak znaménko čísel a_n od jistého indexu počínajíc jest stále totéž (neboť počet změn znaménkových v (β) jest konečný a rovný p) jest znaménko čísel b_n od téhož indexu stále totéž a protivné znaménku čísel a_n podle rovnice pro b_n uvedené v poznámce pod čarou. Jest tedy počet změn znaménkových v řadě (γ) o lichý počet menší než v řadě (β).

*) Důkaz toho tvrzení jest snadný; je-li totiž poloměr konvergence řady (a) rovný R, existuje číslo M takové, že $|a_n| \leqq MR^{-n}$ $n = 0, 1, 2, \ldots$ Pro čísla b_n pak máme

$$b_n = a_0A^n + a_1A^{n-1} + \ldots + a_{n-1}A + a_n =$$
$$= -a_{n+1}A^{-1} - a_{n+2}A^{-2} - a_{n+3}A^{-3} - \ldots$$

a tedy

$$|b_n| < \frac{M}{R^n} \cdot \frac{1}{AR} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{AR}} = \frac{M}{AR - 1} \cdot \frac{1}{R^n}$$

odkud (a pak z okolnosti, že v důsledku ($\div$) poloměr konvergence řady (b) nemůže býti větší než poloměr konvergence řady (a)) následuje, že poloměr konvergence řady (b) jest rovněž R.

Opětovným použitím tohoto postupu můžeme vysloviti větu: Počet kořenů kladných rovnice

$$0 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots$$

menších než poloměr konvergence řady na pravé straně této rovnice se nacházející jest menší ($\leqq$) než počet změn znaménkových v řadě čísel $a_0, a_1, a_2, \ldots$

*

Sur la séparation des racines des équations algébriques.

(Extrait de l'article précédent.)

L'auteur a publié, sous le même titre, dans le t. 38 de ce Journal (1909), p. 554, une démonstration du théorème de M. Stéphanos, concernant l'application du théorème de Descartes à la séparation des racines des équations algébriques. Dans le présent travail, l'auteur donne une nouvelle démonstration du même théorème, essentiellement simplifiée et tout à fait générale, sans aucune restriction portant sur les paramètres se présentant dans le théorème. La démonstration est basée sur un lemme, à l'aide duquel on peut démontrer simplement aussi le théorème de Descartes. L'auteur démontre un second théorème, lequel peut être utile dans la pratique de la séparation. C'est le théorème suivant: Étant donnée une suite de nombres réels

$$a_0, a_1, a_2, \ldots,$$

construisons une suite $b_0, b_1, b_2, \ldots$ telle que $b_k = a_k + b_{k-1}A$, $b_0 = a_0$, où $A > 0$; dans la suite $b_0, b_1, \ldots, b_m$ le nombre des variations de signe est $\leqq$ au nombre des variations dans la suite $a_0, a_1, \ldots, a_m$, pour tout nombre positif entier m. Ce théorème encore a pour conséquence immédiate le théorème de Descartes. On en peut même déduire sans difficulté le théorème de Budan-Fourier, non seulement pour les équations algébriques, mais aussi pour les équations données par des séries de puissances.