Časopis pro pěstování matematiky a fysiky

Eugen Bunickij

Poznámka k článku „O integraci úplných diferenciálů“

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 72 (1947), No. 3, 131–136

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121554

Poznámka k článku „O integraci úplných diferenciálů".[1]

Evžen Bunickij, Praha.

(Došlo dne 20. října 1946.)

1. V tomto článku jde o funkce reálných proměnných, u nichž předpokládáme spojitost parciálních derivací těch řádů, jež se v dalším vyskytují. Je-li $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ homogenní funkce stupně k-tého, je, jak známo,

$$x_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \dots + x_n \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} = k\, \varphi(x_1, \dots, x_n). \tag{1}$$

Budiž nyní

$$\mathrm{d}U = \sum_{i=1}^{n} X_i(x_1, \dots, x_n)\, \mathrm{d}x_i, \tag{2}$$

totálním diferenciálem (nutnou a postačující podmínkou je, jak známo,

$$\frac{\partial X_i}{\partial x_j} = \frac{\partial X_j}{\partial x_i}, \tag{3}$$

pro $i, j = 1, 2, \dots, n$), a předpokládejme, že funkce X_i jsou homogenní funkce stupně k-tého.

Potom jest (sčítá se od 1 do n)

$$\mathrm{d}(\sum_i X_i x_i) = \sum_i X_i\, \mathrm{d}x_i + \sum_i x_i\, \mathrm{d}X_i,$$

$$\sum_i x_i\, \mathrm{d}X_i = \sum_i \left(\sum_\nu x_i \frac{\partial X_i}{\partial x_\nu} \mathrm{d}x_\nu \right) = \sum_\nu \left(\sum_i \frac{\partial X_\nu}{\partial x_i} x_i \right) \mathrm{d}x_\nu = k \sum_\nu X_\nu\, \mathrm{d}x_\nu,$$

a tedy

$$\mathrm{d}(\sum_i X_i x_i) = (k+1) \sum_i X_i\, \mathrm{d}x_i, \tag{4}$$

t. j.

$$\mathrm{d}(\sum_i X_i x_i) = (k+1)\, \mathrm{d}U.$$

---

[1]) Viz Časopis 57 (1928), 87-94.

Je-li tedy $k \neq -1$, je funkce U z rovnice (2) dána výrazem

$$U = \frac{1}{k+1}(X_1 x_1 + \ldots + X_n x_n) + C, \tag{5}$$

kde C je konstanta. To je jednoduchý vzorec pro integrování úplného diferenciálu (2), platný pro $k \neq -1$, který byl odvozen v citovaném článku. V tomto článku se soustředíme na zbývající případ $k = -1$. Buďte tedy X_i v (2) homogenní funkce stupně -1, takže po substituci

$$u_\nu = \frac{x_\nu}{x_1} \quad (\nu = 2, 3, \ldots, n) \tag{6}$$

jest

$$X_i = \frac{1}{x_1}\varphi_i(u_2, \ldots, u_n) \quad (i = 1, \ldots, n); \tag{7}$$

podle (4) je pak nyní

$$\sum_{i=1}^{n} X_i x_i = A \quad (A \text{ konstanta}). \tag{8}$$

Odtud

$$X_1 = \frac{A}{x_1} - \frac{1}{x_1^2}\sum_{\nu=2}^{n}\varphi_\nu(u_2, \ldots, u_n)\, x_\nu,$$

takže pravou stranu v (2) lze psáti ve tvaru

$$A\frac{\mathrm{d}x_1}{x_1} + \sum_{\nu=2}^{n}\varphi_\nu(u_2, \ldots, u_n)\frac{x_1\,\mathrm{d}x_\nu - x_\nu\,\mathrm{d}x_1}{x_1^2},$$

načež (viz ještě (6) a (7)) lze (2) psáti ve tvaru

$$\mathrm{d}U = \mathrm{d}\,(A \log |x_1|) + \sum_{\nu=2}^{n}\varphi_\nu(u_2, \ldots, u_n)\,\mathrm{d}u_\nu. \tag{9}$$

Součet

$$\sum_{\nu=2}^{n}\varphi_\nu(u_2, \ldots, u_n)\,\mathrm{d}u_\nu, \tag{10}$$

do něhož za u_ν a za $\mathrm{d}u_\nu$ dosadím podle (6), je tedy rozdílem dvou úplných diferenciálů a je tedy sám úplným diferenciálem. Ale součet (10) jest úplným diferenciálem také tehdy, jsou-li $u_2, \ldots, u_n$ nezávisle proměnnými; neboť z (6), (7) plyne

$$\frac{\partial X_\nu}{\partial x_\mu} = \frac{1}{x_1^2}\frac{\partial \varphi_\nu}{\partial u_\mu}$$

pro $\mu = 2, 3, \ldots, n$, takže podle (3) je

$$\frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x_\mu} = \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial x_\nu} \quad (\mu, \nu = 2, 3, \ldots, n).$$

Existuje tedy funkce $\psi(u_2, \ldots, u_n)$, mající úplný diferenciál (10), takže (2) neboli (9) lze psáti též

$$dU = d\,(A \log |x_1|) + \sum_{\nu=2}^{n} \frac{\partial \psi}{\partial u_\nu}\, du_\nu, \tag{11}$$

kde u_ν jsou všude určena vzorci (6).

A naopak: je-li $\psi(u_2, \ldots, u_n)$ jakákoliv funkce, je pravá strana rovnice (11) úplným diferenciálem, v němž koeficienty při dx_i jsou homogenní funkce stupně -1. Neboť píšeme-li

$$\frac{\partial \psi}{\partial u_\nu} = \varphi_\nu(u_2, \ldots, u_n),$$

lze rovnici (11) podle (6) ihned psáti ve tvaru

$$dU = \frac{A}{x_1} + \sum_{\nu=2}^{n} \varphi_\nu\left(\frac{x_2}{x_1}, \ldots, \frac{x_n}{x_1}\right) \frac{x_1\, dx_\nu - x_\nu\, dx_1}{x_1^2}.$$

Tedy: Rovnice (11), v níž $\psi(u_2, \ldots, u_n)$ je libovolná funkce, při čemž za $u_2, \ldots, u_n$; $du_2, \ldots, du_n$ dosazujeme $x_1, \ldots, x_n$; $dx_1, \ldots, dx_n$ podle vzorců

$$u_\nu = \frac{x_\nu}{x_1}, \quad du_\nu = \frac{1}{x_1^2}(x_1\, dx_\nu - x_\nu\, dx_1),$$

nám dává nejobecnější totální diferenciální rovnici tvaru (2) s homogenními koeficienty stupně -1.

Parciální derivace funkce ψ, t. j. funkce φ_ν, ovšem mohou, ale nemusí býti homogenní.

2. Jsou-li X_i v (2) homogenní řádu $k \neq -1$, lze integraci rovnice (2) ihned provésti vzocem (5). Ale pro $k = -1$ je tomu jinak, neboť rovnice (11) ukazuje, že $U(x_1, \ldots, x_n)$ nemůžeme obdržeti bez užití obvyklých způsobů integrace úplných diferenciálů. Neboť z (11) plyne

$$U(x_1, \ldots, x_n) - A \log |x_1| = \int \sum_{\nu=2}^{n} \varphi_\nu(u_2, \ldots, u_n)\, du_\nu \tag{12}$$

kde pravá strana značí výsledek integrace úplného diferenciálu (10), v němž za $u_2, \ldots, u_n$ je dosazeno podle (6). Pojmu-li tedy do funkce $\psi(u_2, \ldots, u_n)$ additivní integrační konstantu, plyne z (12)

$$U(x_1, \ldots, x_n) - A \log |x_1| = \psi\left(\frac{x_2}{x_1}, \ldots, \frac{x_n}{x_1}\right). \tag{13}$$

Najdu-li tedy nějakým způsobem funkci U, je tím nalezena i funkce $\psi(u_2, \ldots, u_n)$ a naopak. Integrace totálního diferenciálu (2) s homogenními koeficienty X_i stupně -1 je tedy úkol právě tak obtížný jako integrace totálního diferenciálu (10) s libovolnými koeficienty φ_ν a s $n - 1$ nezávisle proměnnými (na př. pro $n = 2$ je integrace tot. diferenciálu (10) ekvivalentní s výpočtem integrálu

$$\int \varphi_2 (u_2)\, du_2).$$

3. Rovnice (11) dává nejobecnější tvar totální rovnice (2) s homogenními koeficienty stupně $k = -1$. Rozřešme podobnou úlohu pro $k \neq -1$. Rovnice (5) říká, že U je — až na konstantu C — homogenní funkce $f(x_1, \ldots, x_n)$ stupně $k + 1$, takže (2) má tvar

$$dU = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i, \tag{14}$$

kde f je *homogenní funkce stupně* $k + 1$. Naopak, je-li $f(x_1, \ldots, x_n)$ homogenní stupně $k + 1$, jsou koeficienty při dx_i v (14) homogenní stupně k. Tím je úloha řešena.

4. Jako aplikaci vyšetřujme diferenciální homogenní rovnici

$$X(x, y)\, dx + Y(x, y)\, dy = 0, \tag{15}$$

kde levá strana je totální diferenciál a funkce X, Y jsou homogenní stupně k. Je-li $k \neq -1$, je obecný integrál podle (5) dán vzorcem

$$X \cdot x + Y \cdot y = (k + 1)\, C = C_1,$$

kde C resp. C_1 značí integrační konstantu. Budiž za druhé $k = -1$, takže podle (8) je $X \cdot x + Y \cdot y = \alpha$, ($\alpha$ konstanta), načež $X = \alpha \cdot x^{-1} - Yy \cdot x^{-1}$ a (15) nabude tvaru

$$\frac{\alpha\, dx}{x} + Y \frac{x\, dy - y\, dx}{x} = 0.$$

Ale podle předpokladu

$$Y(x, y) = \frac{1}{x} \varphi\left(\frac{y}{x}\right),$$

takže substituce $u = y \cdot x^{-1}$ vede k rovnici

$$\frac{\alpha\, dx}{x} + \varphi(u)\, du = 0, \quad \text{t. j.} \quad \alpha \log |x| + \int \varphi(u)\, du = C,$$

kde po výpočtu integrálu jest dosaditi $u = y \cdot x^{-1}$. Je patrno, že v tomto případě $k = -1$ neposkytuje tento způsob žádných výhod proti obvyklé methodě.

5. **Příklady.**

1. Najděte funkci U, vyhovující rovnici

$$dU = \left(\frac{2x^3 - 3z^3}{x^4} - \frac{y^2 z}{x^4} \cos \frac{z}{x} - \frac{2y^2}{x^3} \sin \frac{z}{x}\right) dx +$$

$$+\frac{2y}{x^2}\sin\frac{z}{x}\,\mathrm{d}y+\left(\frac{3z^2}{x^3}+\frac{y^2}{x^3}\cos\frac{z}{x}\right)\mathrm{d}z.$$

Koeficienty při $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}z$ (jež zde i v následujícím příkladě označíme X, Y, Z) splňují podmínky integrability a rovnici $Xx + Yy + Zz = 2$, načež

$$\mathrm{d}U = \frac{2}{x}\mathrm{d}x + Y\frac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{x} + Z\frac{x\,\mathrm{d}z - z\,\mathrm{d}x}{x};$$

dosadím-li za Y, Z a položím-li $y\,.\,x^{-1} = v$, $z\,.\,x^{-1} = t$, obdržím:

$$\mathrm{d}U = \frac{2}{x}(\mathrm{d}x + 2v\sin t\,\mathrm{d}v + (3t^2 + v^2\cos t)\,\mathrm{d}t.$$

Poslední dva členy tvoří totální diferenciál, ale jeho koeficienty nejsou homogenní funkce. Integrujeme-li obvyklým způsobem a zavedeme-li nakonec opět x, y, z, obdržíme

$$U = 2\log|x| + \frac{y^2}{x^2}\,.\,\sin\frac{z}{x} + \frac{z^3}{x^3} + C.$$

2. V rovnici

$$\mathrm{d}U = \frac{1}{x^4}(2xz^2 - x^2y - 3y^2z)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{x^3}(x^2 + 2yz)\,\mathrm{d}y +$$
$$+ \frac{1}{x^3}(y^2 - 2xz)\,\mathrm{d}z$$

jsou rovněž splněny podmínky integrability a jest $Xx + Yy + Zz = 0$. Obdobným způsobem jako v předešlém případě obdržíme

$$\mathrm{d}U = (1 + 2vt)\,\mathrm{d}v + (v^2 - 2t)\,\mathrm{d}t.$$

Zde pravá strana je *součtem* tří totálních „homogenních" diferenciálů stupně 0, 1, 2, totiž $\mathrm{d}U = \mathrm{d}v - 2t\,\mathrm{d}t + (2vt\,\mathrm{d}v + v^2\,\mathrm{d}t)$; integruji-li každý člen podle vzorce (5), obdržím

$$U = v - \frac{2t^2}{2} + \frac{2vt\,.\,v + v^2\,.\,t}{3} + C,$$

t. j.

$$U = \frac{y}{x} - \frac{z^2}{x^2} + \frac{y^2z}{x^3} + C.$$

*

Remarque à l'article „Sur l'intégration des différentielles totales"[1]).

(Résumé de l'article précédent.)

Considérons l'équation (2), où les X_i sont des fonctions homogènes du degré k satisfaisant aux conditions (3). Si $k \neq -1$, l'intégrale de (2) est donnée par (5) et l'équation (2) la plus générale de ce genre est de la forme (14), où $f(x_1, \ldots, x_n)$ est une fonction homogène quelconque du degré $k + 1$. Pour $k = -1$, les choses sont plus compliquées: la forme la plus générale de l'équation (2) est donnée par (11), où A est une constante quelconque et où $\psi(u_2, \ldots, u_n)$ est une fonction *arbitraire*; les u_ν, du_ν sont définis par (6). L'intégration de (2) pour $k = -1$ exige donc l'intégration d'une différentielle totale (10) (à $n - 1$ variables) qui peut être absolument arbitraire. (On suppose partout la continuité des dérivées partielles rentrant dans le calcul.)

---

[1]) Cf. Časopis 57 (1928), 87—94.