Bohumil Bečka

Určení hodnoty pomyslného součinu $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)+(1+i)}{n(n+1)+(1-i)}$

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 5 (1876), No. 1, 37--38

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/121559`

Určení hodnoty pomyslného součinu:

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)+(1+i)}{n(n+1)+(1-i)}.$$

Podává

B. Bečka.

V následujících řádcích chci dokázati, že součin dotčený, jenž tu naznačen jest symbolem Π, blíží se při vzrůstajícím n mezi $\sqrt{-1} = i$. K tomu cíli učiňmež následující úvahu:

Rozdělíme-li jedno z ramen pravého úhlu $\overline{XAY}$ na nekonečné množství dílů délky a a zvolíme-li na rameni druhém bod v tak, že vzdálenost jeho od vrchole A jest b, obdržíme, spojíce v s body délky a oddělujícími, úhly při v, jež označme od ramena $\overline{Av}$ počínajíce postupně $\alpha_0\ \alpha_1\ \alpha_2 \ldots \alpha_n$.

I platí o úhlech těchto vztah

$$\frac{(n+1)a}{b} = tg\left\{\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k + \alpha_n\right\} = \frac{tg\,\Sigma\,\alpha_k + tg\,\alpha_n}{1 - tg\,\Sigma\,\alpha_k\,tg\,\alpha_n};$$

avšak zároveň jest

$$tg \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k = \frac{na}{b},$$

pročež bude

$$\frac{(n+1)a}{b} = \frac{\frac{na}{b} + tg\,\alpha_n}{1 - \frac{na}{b}\,tg\,\alpha_n};$$

řešíme-li tu dle $tg\,\alpha_n$, obdržíme

$$tg\,\alpha_n = \frac{ab}{n(n+1)a^2 + b^2},$$

a tudíž naopak

$$\alpha_n = arctg \frac{ab}{n(n+1)a^2 + b^2};$$

kladouce nyní v poslední stejninu po sobě $n = 0, 1, 2, 3 \ldots \infty$, obdržíme sečtením všech takto nabytých rovnic, ježto dle sestrojení jest

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \frac{\pi}{2},$$

rovnici

$$\sum_{n=0}^{\infty} arctg \frac{ab}{n(n+1)a^2+b^2} = \frac{\pi}{2}.$$

Získavše tuto relaci, můžeme přikročiti k důkazu poučky svrchu vyslovené.

Tu dostačí, abychom se upamatovali, že jest, nehledíme-li k imaginární periodě,

$$l(x+iy) = l\sqrt{x^2+y^2} + i\, arctg \frac{y}{x};$$

ze vzorce toho jde pak snadnou záměnou

$$arctg \frac{y}{x} = \frac{1}{2i}\, l\, \frac{x+iy}{x-iy};$$

je-li tedy

$$x = n(n+1)a^2+b^2, \quad y = ab,$$

jest též

$$arctg \frac{ab}{n(n+1)a^2+b^2} = \frac{1}{2i}\, l\, \frac{n(n+1)a^2+b^2+iab}{n(n+1)a^2+b^2-iab},$$

a tudíž i

$$\sum_{n=1}^{\infty} arctg \frac{ab}{n(n+1)a^2+b^2} = \frac{1}{2i}\, l \prod_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)a^2+b^2+iab}{n(n+1)a^2+b^2-iab},$$

aneb dle svrchu dokázaného vzorce

$$\frac{\pi}{2} - arctg \frac{a}{b} = \frac{1}{2i}\, l \prod_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)a^2+b^2+iab}{n(n+1)a^2+b^2-iab},$$

takže pro $b=a$ se obdrží

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2i}\, l \prod_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)+(1+i)}{n(n+1)+(1-i)};$$

ježto však jest, jak známo,

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2i}\, li,$$

jest patrně

$$li = l \prod_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)+(1+i)}{n(n+1)+(1-i)},$$

aneb odvrátíme-li se od logarithmů,

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)+(1+i)}{n(n+1)+(1-i)} = i, \quad c.\ b.\ d.$$