Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

František Josef Studnička

O původu a rozvoji nauky o determinantech. [I.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 5 (1876), No. 1, 1--9

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121560

Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1876

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://project.dml.cz

O původu a rozvoji nauky o determinantech.

Sepsal

Dr. F. J. Studnička.

„Je parleray à cette occasion de quelques progres que j'ay fait sur les nombres. Comme je me sers souvent de nombres au lieu de lettres, mais en traittant ces nombres comme si n'estoient que des lettres, j'y ay trouvé entre autres utilités celle de pouvoir faire epreuve du calcul literal ... En cherchant les choses je trouvay des ouvertures sur les nombres qui pourront pousser bien loin cette science.“ Tak psal v březnu 1693 geniální *Leibnic* svému příteli *de l'Hospitalovi*, kterýž se zvláštní zálibou pěstoval jeho vynálezy v oboru vyšší mathematiky.

Zpráva tato jak neočekávaná, kde algebraisté slavili pravé triumfy, tak nejasná, jelikož neobsahovala přesného výkladu, kterak všeobecné veličiny možná nahraditi čísly, vzbudila podivení zajisté u bystrého de l' Hospitala, takže nemeškal v listě nejbližším (23. dubna 1693) poznamenati: „J'ay de la peine a croire qu'il soit aussi general et aussi commode de se servir de nombres que de lettres dans l'analyse ordinaire.“

Na tuto poznámku bylo arci nutno odpověděti jasně a tudíž všechny pochybnosti rozptýliti, což Leibnic v máji téhož roku obšírně učinil; píšeť mezi jiným, když všeobecně vyložil svou myšlénku: „Par exemple soyent proposées trois equations simples pour deux inconnues à dessein d'oster ces deux inconnues, et cela par un canon general. Je suppose

$$10 + 11x + 12y = 0, \qquad (1)$$

$$20 + 21x + 22y = 0, \qquad (2)$$

$$30 + 31x + 32y = 0, \qquad (3)$$

ou le nombre feint estant de deux characteres, le premier me marque de quelle equation il est, le second me marque à quelle lettre il appartient. Ainsi en calculant on trouve par tout des harmonies qui non seulement nous servent de garans, mais encor nous font entrevoir d'abord des regles ou theoremes. Par exemple ostant premierement y par la premiere et la seconde equation, nous aurons:

$$\begin{array}{l} +10.22+11.22\,x \\ -12.20-12.21\,.. \end{array} = 0 \qquad (4)$$

et par la premiere et troisieme nous aurons:

$$\begin{array}{l} +10.32+11.32\,x \\ -12.30-12.31\,.. \end{array} = 0, \qquad (5)$$

ou il est aise de connoistre que ces deux equations ne different qu'en ce que le charactere antecedent 2 est changé au charactere antecendent 3. Du reste, dans un même terme d'une même equation les characteres antecedens sont les mêmes, et les characteres posterieurs font une même somme. Il reste maintenant d'oster la lettre x par la quatrieme et cinquieme equation, et pour cet effect nous aurons

$$\begin{array}{l} 1_0 . 2_1 . 3_2 \\ 1_1 . 2_2 . 3_0 \\ 1_2 . 2_0 . 3_1 \end{array} = \begin{array}{l} 1_0 . 2_2 . 3_1 \\ 1_1 . 2_0 . 3_2 \\ 1_2 . 2_1 . 3_0 \end{array}$$

qui est la derniere equation delivrée de deux inconnues qu'on vouloit oster, et qui porte sa preuve avec soy par les harmonies qui se remarquent par tout, et qu'on auroit bien de la peine à decouvrir en employant des lettres *a, b, c* sur tout lorsque le nombre des lettres et des equations est grand. *Une partie du secret de l'analyse consiste dans la caracteristique, c'est à dire dans l'art de bien employer les notes dont on se sert,* et vous voyés, Monsieur, par ce petit echantillon, que Viete et des Cartes n'en ont pas encor connu tous les mysteres."

Z tohoto příkladu měl de l'Hospital poznati, jak možná číslic užiti k označení veličin a jak tento spůsob vede k přehledným výsledkům, jež možná podlé určitého pravidla snadno vyvésti. Aby jej pak ještě více uspokojil a ukázal prospěšnost této *methody dvojích přípon neb ukazovatelů,* připojil hned všeobecné pravidlo, jak možná ze soustavy lineárních rovnic neznámé veličiny vyloučiti, což podlé tehdejšího zvyku latinským jazykem takto oznámil: „Datis æquationibus quotcunque sufficientibus ad tollendas quantitates, quæ simplicem gradum non egrediuntur, pro æquatione prodeunte, primo sumendæ sunt omnes combinationes possibiles, quas ingreditur una tantum coëfficiens uniuscujusque æquationis; secundo, eæ combinationes opposita habent signa, si in eodem æquationis prodeuntis latere ponantur, quæ habent tot coëfficientes communes, quot sunt unitates in numero quantitatum tollendarum unitate minuto; cæteræ habent eadem signa.“

A v tomto výkladu vězí zárodek nauky o determinantech, v tomto pravidle ustanoveno přesně, jak se k dané soustavě rovnic vyhledá výraz, kterýž jest výsledkem eliminace neznámých, jejž nyní nazýváme determinantem.[1])

Že toto objasnění překvapilo de l'Hospitala, vyznává v listu 15. června 1693 Leibnicovi zaslaném slovy lichotivými „La maniere dont vous vous servez de nombres au lieu de lettres dans les equations pour en tirer en suite des regles ou theoremes est tres ingenieuse, et comme *l'analyse n'est que l'art d'abbreger les raisonnements et de representer tout d'une vûe a l'esprit ce qu'il ne pourroit apperçoir autrement que par un long circuit,* il est certain que les caracteristiques en font la principal partie“, načež Leibnic potěšen jsa, že přítel jeho chválí tuto novou „methodu charakteristik“, sám ji tak vysoko klade, že neváhá tvrditi „c'est une des meilleurs ouverture en Analyse“.

Avšak dále se nestaral Leibnic o tento svůj největší vynález; aspoň nevyskytují se nikde pokročilejší stopy těchto charakteristik, vyjmouc pojednání z roku 1694. „Pro Methodo Tangentium specimen“, kdež užívá číselných koëfficientů spůsobem podobným, k účelům však jiným, pak list asi z ledna 1695, kdež opět připomíná de l'Hospitalovi, že užívá čísel místo písmen, jako by byl zapomněl, co dříve o té věci byl s přítelem svým sdělil, a konečně pojednání v Acta erud. r. 1700 pag. 206 uveřejněné a k polemickému článku připojené.

[1]) Užíváme slova *determinant* (rodu mužského) dle analogie jakož i po příkladu jiných jazyků, zejmena francouzského, ačkoli u nás podle německého původně psáno *determinanta;* viz *Pokorného* „Determinanty a vyšší rovnice.“

Jak ze všeho patrno, byl Leibnic s jedné strany velice zaujat novým nápadem klásti čísla či vlastně číselné přípony místo písmen v algebře užívaných, s druhé strany však velmi zaměstnán jinými pracemi, takže nebyl s to dále provésti myšlénky tak plodné, které de l' Hospitalovi takřka jen napověděl; zároveň smíme podlé bystrosti a vynalezavosti ducha Leibnicova souditi, že by zajisté byl nauku o determinantech řádně zosnoval, kdyby ostatní práce a povinnosti k tomu byly času jemu dopřály.

I zůstaly tudíž zárodky tak důležité nauky, jakou se theorie determinantů býti osvědčila, pochovány v korrespondenci dvou slavných mužů, kteří majíce hlavní zřetel obrácen k zbudování nauky o počtu differenciálním a integrálním, velmi činně zasáhali do tehdejších turnajů mathematických; ba zásluhy Leibnicovy teprv v poslední době vyneseny na světlo Lejeune-Dirichletem, když byla nauka o determinantech dosáhla již značného zdokonalení.

Druhým zakladatelem nauky o determinantech sluší jmenovati *Cramera* a sice z podobných příčin jako Leibnice. I jemu jednalo se o soustavu lineárních rovnic,[2]) vyskytujících se při řešení úkolu geometrického, i jemu se poštěstilo z koëfficientů veličin neznámých sestaviti podlé jednoduchého pravidla výrazy, které při řešení rovnic i při eliminaci tak důležitou hrají úlohu; ale nezdá se, že by byl duchem svým tak hluboko vnikl do podstaty této věci, že by byl tak všeobecně pojal princip tento nový, jako geniální Leibnic; šloť Cramerovi hlavně o pohodlné počítání a tu pravidlo, jakéž podal o řešení rovnic lineárních, osvědčilo se býti tak prospěšným, že ještě po 100 letech co *pravidlo Cramerovo* bylo ve školách vykládáno.

Vedlé toho jest též zajímavý spůsob, jakým ustanovoval znamení členů, z nichž se kombinatorní výrazy, nyní determinanty zvané, skládají. Nazveme-li ve výrazu

$$a_1\, b_2\, c_3\, d_4\, e_5$$

ten prvek vyšším, jehož přípona jest větší, a sestavíme-li z něho permutováním přípon výraz

$$a_2\, b_4\, c_3\, d_5\, e_1\,,$$

---

[2]) Analyse des lignes courbes, Genève 1750, kdež připojen Appendix o těchto otázkách jednající.

poznáme, že tu několikráte stojí vyšší prvek před nižším, což sluje *převrat* (inversio, dérangement); jest tu patrně převratů pět a sice

$$a_2\, e_1,\ b_4\, c_3,\ b_4\, e_1,\ c_3\, e_1,\ d_5\, e_1.$$

Pomocí tohoto pojmu vyjádřil pak Cramer všeobecné pravidlo, podlé něhož se ustanovují hodnoty neznámých z lineárních rovnic, asi takto:

Sestavíme-li z prvního, druhého, třetího... koëfficientu první, druhé, třetí... rovnice soustavy

$$a_i\, x_1 + b_i\, x_2 + c_i\, x_3 + \ldots = \alpha_i,\quad i = 1, 2, 3, \ldots \tag{1}$$

tvar součinu

$$a_1\, b_2\, c_3\, \ldots, \tag{2}$$

vyvedeme-li pak z něho permutováním přípon všechny možné permutace a dáme-li konečně členům, u nichž počet převratů vyjadřuje číslo *sudé*, znamení $+$, ostatním pak, u nichž vyjadřuje počet převratů číslo *liché*, znamení $-$, obdržíme společného *jmenovatele* neznámých veličin soustavou (1) daných, z něhož pak plyne *čitatel,* nahradíme-li koëfficienty veličiny právě hledané příslušnými členy strany pravé. Podlé toho by se obdrželo na př. ze soustavy (1), kdyby jen tři neznámé obsahovala,

$$x_1 = \frac{\alpha_1\, b_2\, c_3 - \alpha_1\, b_3\, c_2 + \alpha_2\, b_3\, c_1 - \alpha_2\, b_1 c_3 + \alpha_3\, b_1\, c_2 - \alpha_3\, b_2\, c_1}{a_1\, b_2\, c_3 - a_1\, b_3\, c_2 + a_2\, b_3\, c_2 - a_2\, b_1 c_3 + a_3\, b_1\, c_2 - a_3\, b_2\, c_1}$$

Jak patrno, jest výhoda s tímto pravidlem spojená velmi značna, takže snadno pochopíme, nejen proč pilně bylo ve školách vykládáno a Cramerovo jmeno s ním spojováno, nýbrž i proč bylo novým zárodkem nauky o determinantech.

Od této doby počali se mathematikové pilně ujímati těchto výrazů kombinatorních, vyskytujících se jak při řešení rovnic lineárních, tak při důležitém problemu eliminačním.

Podivuhodné a pro *Eulera* významné jest, že pronikavý a všestranný duch jeho, který ve všech odborech mathematických zanechal tak hluboké stopy svého neunavného badání, neosvojil si názor v pravidle Cramerově obsažený; jeho methody eliminační jsou velmi zajímavé, ale při několika rovnicích již tak rozvláčné, že i nejvytrvalejšího a nejobratnějšího mathematika odstrašují. A přec byl Euler při sestavování nové symboliky pro theorii řetězců tak na blízku oněch formálních úkonů, jež slují dnes determinanty!

Teprv *Bézout* [3]) ujal se znovu těchto úkolů a ukázal jiným spůsobem, jak tu možná výsledek eliminace neb *resultant* snadno vyvésti ze soustavy lineárních rovnic stejnoměrných; zároveň pak vyložil, jak se může postupně vyvinouti resultant vyšší z nižšího.

Máme-li na př. prvek a a přistoupí-li k němu b, utvoří se nový výraz tím, že se postaví b napřed za a, pak před a a znamení položí střídavá; povstane tu tedy výraz

$$ab - ba\,.$$

Přistoupí-li k tomuto výrazu prvek c, postaví se u každého člena za poslední, za první a před první prvek a opět se znamení vystřídají; i povstane tu z

členu ab výraz $abc - acb + cab$
„ ba „ $bac - bca - cba$

a tudíž z výrazu celého, má-li se zřetel k označení druhého členu

$$abc - acb + cab - bac + bca - cba\,.$$

Kdyby přistoupil nový prvek d, obdrželo by se podobně
z členu abc výraz $abcd - abdc + adbc - dabc$,
„ acb „ $acbd - acdb + adcb - dacb$, atd.

Co se pak tkne přípon, tu dostane každý prvek takovou, jakou má v tolikáté rovnici, na kolikátém místě stojí, aneb jak Bézout sám učí „Alors conservez les lettres qui occupent la première place; donnez à celles qui occupent la seconde, la même marque qu'elles ont dans la seconde équation; à celles qui occupent la troisième, la même marque qu'elles ont dans la troisième équation, et ainsi de suite, égalez enfin le tout à zéro et vous aurez l'équation de condition cherchée," takže by podlé toho v soustavě (1) měl člen

cab přípony 1, 2, 3.

K rekurrentnímu spůsobu tomuto připojil pak Bézout ještě independentní, kde z hlavního členu soustavy (1)

$$a_1\, b_2\, c_3\, \ldots$$

---

[3]) *Bézout* „Recherches sur le degré des équations résultantes de l'evanuissement des inconnues, et sur les moyens qu'il convient d'employer pour trouver ces équations." Mém. de l'acad. r. des sciences, année 1764, pag. 292.

přímo učí vyvinovati permutováním ostatní členy résultantu, při čemž neužívá Cramerova pojmu převratu, nýbrž podobného pravidla, že jen *lichým* počtem výměn prvků se znamení členů mění takže na př. z positivního členu

$$+1.2.3.4 \text{ obdrží se negativní } -4.1.2.3,$$

jelikož tu provedeny tři výměny prvků, 4 za 3, pak za 2 a konečně za 1.

Jak patrno, byl tu pojem determinantu jakož i zákon, podlé něhož se sestavuje, dosti jasně vytknut; avšak dosud nedostávalo se určitého jmena a vhodného označení neb symbolu pro tento výraz složený.

Tento důležitý krok učinil teprv *Vandermonde* [4]) a tím učinil zvláštní výraz, který dosud jevil se co výsledek jistých úkonů, předmětem zvláštního bádání, z něhož mezi jiným vyplynula též samostatně pravidla, podle nichž se tytéž úkony dají snadno a přehledně prováděti. Tímto obratem položen tedy i formální základ *k nauce o determinantech.*

Jako Leibnic užíval i Vandermonde k označení rozličných prvků dvojích přípon, svrchních a spodních a nekladl písmeny příslušné, a_{ij} bylo u něho $\frac{i}{j}$. K označení výrazu, jejž jsme dosud psali v rozvinuté formě co determinant, zvolil symbol

$$\frac{\;|\;|\;|\;|\;|\;|\;|\;}{\;|\;|\;|\;|\;|\;|\;|\;},$$

kdež psal do svrchních přehrádek svrchní přípony, do spodních pak spodní, takže náš determinant

$$a_{11}\,.\,a_{22} - a_{12}\,.\,a_{21}$$

podlé něho by se označil symbolem

$$\frac{1\,|\,2}{1\,|\,2} = 11\,.\,22 - 12\,.\,21$$

aneb jeho krátký symbol, podobný Sylvestrovu spůsobu označování nedávno zavedenému,

$$\frac{\alpha\,|\,\beta\,|\,\gamma}{a\,|\,b\,|\,c}$$

značí náš determinant

---

[4]) Mémoire sur l'élimination, Mém. de l'acad. r. année 1772, seconde partie, pag. 516.

$$\begin{vmatrix} i_{a\alpha}, & i_{a\beta}, & i_{a\gamma} \\ i_{b\alpha}, & i_{b\beta}, & i_{b\gamma} \\ i_{c\alpha}, & i_{c\beta}, & i_{c\gamma} \end{vmatrix}$$

Jakmile byla jen trochu příhodná symbolika vynalezena, objevovaly se vlastnosti determinantů a jich vhodné upotřebení takřka samy.

Sem sluší především vřaditi pravidlo, že jen označení determinantu se změní, jakmile se zamění dvě řady za sebe, takže na př.

$$\frac{1\,|\,2}{1\,|\,2} = -\frac{1\,|\,2}{2\,|\,1}.$$

Dále sem patří poučka o rozkladu determinantů v součty součinů skládajících se z determinantů nižších, jako na př.

$$\frac{\alpha|\beta|\gamma|\delta|\varepsilon}{a|b|c|d|e} = \frac{\alpha}{a}\cdot\frac{\beta|\gamma|\delta|\varepsilon}{b|c|d|e} + \frac{\alpha}{b}\cdot\frac{\beta|\gamma|\delta|\varepsilon}{c|d|e|a}$$

$$= \frac{\alpha}{c}\cdot\frac{\beta|\gamma|\delta|\varepsilon}{d|e|a|b} + \frac{\alpha}{d}\cdot\frac{\beta|\gamma|\delta|\varepsilon}{e|a|b|c} + \frac{\alpha}{e}\cdot\frac{\beta|\gamma|\delta|\varepsilon}{a|b|c|d},$$

kdež jeden činitel jest determinantem stupně prvního, druhý pak determinantem stupně čtvrtého, aneb

$$\frac{\alpha|\beta|\gamma|\delta|\varepsilon}{a|b|c|d|e} + \frac{\alpha|\beta}{a|b}\cdot\frac{\gamma|\delta|\varepsilon}{c|d|c} - \frac{\alpha|\beta}{a|c}\cdot\frac{\gamma|\delta|\varepsilon}{b|d|e}$$

$$+ \frac{\alpha|\beta}{a|d}\cdot\frac{\gamma|\delta|\varepsilon}{b|c|e} - \frac{\alpha|\beta}{a|e}\cdot\frac{\gamma|\delta|\varepsilon}{b|c|d}$$

$$+ \frac{\alpha|\beta}{b|c}\cdot\frac{\gamma|\delta|\varepsilon}{a|d|e} - \frac{\alpha|\beta}{b|d}\cdot\frac{\gamma|\delta|\varepsilon}{a|c|e} + \ldots,$$

kdež jeden činitel jest determinantem stupně druhého, druhý pak determinantem stupně třetího.

Mimo to sluší sem vřaditi objevení útvaru takřka prostorového, kterýž teprv v novější době co *kubický determinant* se stal předmětem zvláštního badání; neb což bylo při tomto užívání dvojích přípon přirozenějšího nežli přikročiti k sestavení výrazu s třemi příponami, kterýž se skládal z vrstev obyčejných determinantů, jako na př.

$$\begin{array}{ccccc} a_{111} & a_{112} & a_{113} & & \\ & a_{121} & a_{122} & a_{123} & \\ & & a_{131} & a_{132} & a_{133} \end{array}$$

$$
\begin{array}{ccccc}
a_{211} & a_{212} & a_{213} & & \\
& a_{221} & a_{222} & a_{223} & \\
& & a_{231} & a_{232} & a_{233} \\
a_{311} & a_{312} & a_{313} & & \\
& a_{321} & a_{322} & a_{323} & \\
& & a_{331} & a_{332} & a_{333}\,.
\end{array}
$$

Konečně sem patří všeobecné řešení rovnic lineárních pomocí těchto symbolů, z něhož se na první pohled zřejmě poznává, jak tu čitatel a jmenovatel kterékoli neznámé se skládá z koëfficientů celé soustavy rovnic; jestli na př.

$$1^1 \xi_1 + 2^1 \xi_2 + 3^1 = 0\,,$$
$$1^2 \xi_1 + 2^2 \xi_2 + 3^2 = 0\,,$$

obdrží se co hodnoty těchto dvou neznámých

$$\xi_1 = \frac{\dfrac{1\,|\,2}{2\,|\,3}}{\dfrac{1\,|\,2}{1\,|\,2}}\,, \quad \xi_2 = \frac{\dfrac{1\,|\,2}{3\,|\,1}}{\dfrac{1\,|\,2}{1\,|\,2}}\,.$$

Jak patrno, ubíral se tu Vandermonde zcela samostatnou cestou a to opačnou nežli jaká byla dosavadní; u něho byl pojem determinantu předmětem nové nauky, řešení rovnic a eliminace však jen upotřebení některých pouček této nové theorie, kdežto Leibnic, Cramer a Bézout měli naopak výsledky těchto praktických úkolů na zřeteli a teprv od nich vycházejíce vyšetřovali vlastnosti výrazů při nich se vyskytujících. A tím, že zvolil dosti vhodnou symboliku, podařilo se mu vypěstovati *samostatné* odvětví mathematické, které po něm v rouše ještě vhodnějším a volnějším vždy zdárněji se vyvíjelo.

(Pokračování.)