Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Vladimír Václav Heinrich

Příspěvek k theorii Darwinových oscillujících satellitů. [I.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 42 (1913), No. 2, 175--183

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121572

Příspěvek k theorii Darwinových oscillujících satellitů.

Dr. **Vladimír Václav Heinrich** v Praze.

Švédský astronom Hugo Gyldén právem upozornil na jednu z hlavních příčin v posavadních nezdarech řešení problému tří těles — naprostou neznalost pohybových tvarů tu možných, pokud nejsou podobny pohybům Keplerovým (v problému těles dvou). V důsledku toho vyskytla se celá řada pracovníků, kteří se snažili pohyby ony napřed experimentálně odkryti. Arciť není to nějaký experiment ve smyslu fysikálním. Vyjde se z počátečních podmínek pro pohyb tří těles, a počítají se na základě daných rychlostí a koordinat posice jich pro libovolnou dobu pomocí mechanických quadratur, tedy bez přímé integrace rovnic pohybových (numerický experiment). Tento nadmíru pracný a namáhavý způsob má proti analytickým methodám mnohou nevýhodu — ale také jistou přednost. Vedeť k cíli i tam, kde prostředky analyse selhávají.

Touto cestou vedeni mnozí k objevu zcela neznámých a namnoze překvapujících tvarů pohybových. Byli to hlavně baron v. Haerdtl, Thiele, Burrau, Strömgren a Darwin.

Pan G. H. Darwin (angl. astronom, syn známého evolucionisty K. Darwina zemřel 7. pros. 1912) zabýval se ve své obrovské práci „Periodic orbits" (Acta mathematica XIII.) tak zvaným problémem restringovaným.

Předpokládá těleso centrální (slunce) a planetu s hmotami v poměru 1 : 10. Obě tělesa otáčejí se v kruzích kol společného těžiště, jich pohyb tedy je předepsán. Mimo to supponuje se, že veškery pohyby dějí se v rovině pohybu těles centrálních. I hledá se pro různé podmínky počáteční pohyb tělíska (stručněji planetoidy) s hmotou nullovou, takže nemá hmota její vlivu na tělesa hlavní. Pan Darwin snažil se najíti hlavně ony pohybové křivky, které jsou v sebe uzavřeny (tedy v nichž jsou pohyby periodické) a určoval jich variacemi poměry stability.

Při tom objevil mnohé zajímavé tvary pohybové, které chceme napřed praecisovati. Proložme centrálními tělesy koordinatový systém Hillův. Počátek v těžišti, a celý systém rotuje tak, že osa X míří ustavičně od slunce k planetě. Vzhledem k tomuto systému může tělisko hmoty nullové opisovati různé dráhy. Tak na př. dráhu kol slunce v sebe uzavřenou (nutno vzpomenouti, že celý systém se točí), neb dráhu kol planety uzavřenou. Zveme je dle toho planetou nebo satellitem.

Konečně našel pan Darwin křivky, které jsou uzavřeny v sebe kolem jistých center v prostoru. Tělíska tímto způsobem obíhající nazval satellits oscillants.

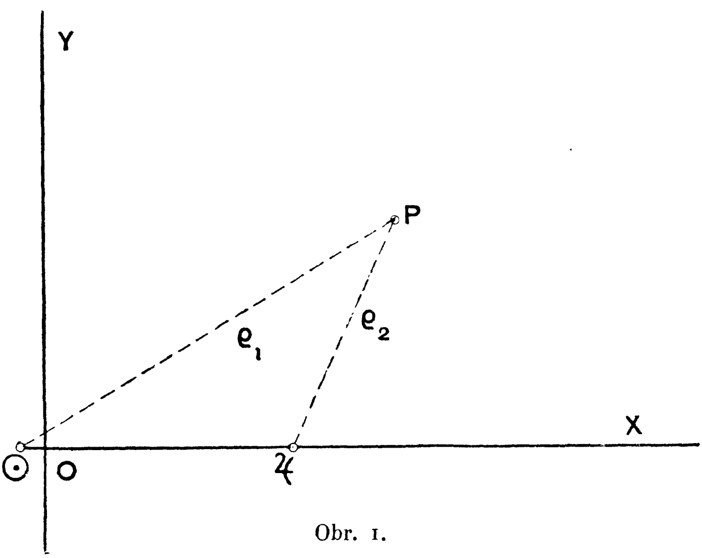
Jednoduchou theorii analytickou pohybů těchto oscillujících satellitů podali pro případ, že křivka leží blíže centra, Hough a Charlier na základě rozvojů dle potencí distance těliska od centra. Viz Charlier: Mechanik des Himmels II, p. 107 et seq., Hough: Acta math. XXIV., p. 257.

V následujícím chceme udati rozšíření theorie předpokládajíce, že planeta rušivá obíhá kol centrálního tělesa v ellipse. Zároveň upustíme od supposice Darwinovy pohybů v rovině, vezmouce v úvahu sklon dráhy těliska.

Ukáže se — věc pro fysiky snad zajímavá — že excentricita planety rušící působí v pohybech satellita oscillujícího tak zvané kmity vynucené (známé z theorie struny). Tyto jsou jednak stabilní (t. j. tělisko jich působením od centra se nevzdaluje jen kol něho oscillujíc), jednak instabilní (obdoba resonance).

V odstavci prvním pojednáme o oscillacích (kmitech) volných (Hough-Charlier), ve druhém o oscillacích vynucených excentricitou rušivé planety a ve třetím podáme jiné odvození formulí, nalezených v odstavci 2., v jistých specielních případech a konečně řádové ocenění pro praxi.

Otázka je do jisté míry akutní, majíc té doby význam pro praxi. Shledalo se totiž v posledních létech, že v sluneční soustavě stávají in concreto satelliti oscillující, arciť dosti značně od center vzdálení. Jsou to tak zvané asteroidy gruppy Jupiterovy v blízkosti vrcholů rovnostranných trojúhelníků slunce-Jupiter-těleso, které se zovou obyčejně L_4, L_5 (srv. odstavec 1.). Autor upozornil před léty na jednoho — tehdy druhého člena družiny — planetoidu Patroclus (617), (1906 *VY*)*) u centra L_4. Tehdy znám byl jen u centra L_5 Achilles (1906). Později po Patroclu objeveny ještě Hector (1907, L_5) a Nestor (1908, L_4), a konečně r. 1912 nalezeny dvě nové, dosud nepojmenované. Pohyb těchto asteroid děje se přibližně v ellipse, skoro identické s drahou Jupiterovou, se stejnou rychlostí a dobou oběhu jako planeta Jupiter sama. Běží tedy všechna tělesa za sebou, napřed družina L_4, Patroclus a Nestor, pak 60° za ním (čítáno ze slunce) Jupiter sám, a za ním, zase 60°, družina L_5, Achilles, Hector atd. Vzhledem k tomu, že obě družiny jsou od Jupitera právě tak velmi daleko jako Jupiter od slunce, vidíme hned, jak malým tu bude jeho vliv, rušící elliptické pohyby obou družin.



Obr. 1.

Jiný příklad konkretní, k němuž theorie se daleko blíže přimyká, poskytuje zjev, který se obyčejně značí internacionálním jménem Gegenschein (protisvit), složený z roje meteorických tělísek, daleko bližších k oscillačnímu centru (L_2) systému země-slunce nežli zmíněné planety (srovnej odstavec 1.).

---

*) Srovnej Astronomische Nachrichten, Band 175, Nro. 4181, Wlad. Heinrich, Über einen neuen Planeten der Jupitergruppe, též Sitzungsberichte d. kgl. böhm. Gesel. d. Wiss. 1907.

1. Oscillace volné.

Předpokládejme rotující systém Hillův. Počátek v těžišti systému — těleso hlavní (stručněji slunce ☉) — planeta (stručněji Jupiter ♃), osa X směrem k planetě, obě tělesa otáčejí se kolem těžiště v kruhu rovnoměrně s rychlostí $n = \sqrt{1 + \mu}$. Za jedničku času volme onu, pro kterou gravitační konstanta rovna jedné, pak platí pro dobu oběhu

$$\tau = \frac{2\pi}{\sqrt{1+\mu}},$$

kde μ je hmota rušivé planety (♃) vyjádřená v jedničkách hmoty sluneční. Za jednotku délky volme distanci slunce-planeta.

I budou koordinaty resp. pro ☉, $(-r_1, o)$, pro ♃, (r_2, o), viz obr. 1., kdež

$$r_1 = \frac{\mu}{1+\mu}, \quad r_2 = \frac{1}{1+\mu}.$$

K pohybovým rovnicím dospějeme skládáním rychlostí a urychlení neb též bezprostředně pomocí Lagrangeova schematu pro transformaci živé síly.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt} - ny\right) - n\left(\frac{dy}{dt} + nx\right) = \frac{\partial U}{\partial x}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt} + nx\right) + n\left(\frac{dx}{dt} - ny\right) = \frac{\partial U}{\partial y}$$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial z}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 2n\frac{dy}{dt} - n^2 x = \frac{\partial U}{\partial x} \qquad U = \frac{1}{\varrho_1} + \frac{\mu}{\varrho_2}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2n\frac{dx}{dt} - n^2 y = \frac{\partial U}{\partial y} \qquad \varrho_1^2 = (x + r_1)^2 + y^2 + z^2$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial z} \qquad \varrho_2^2 = (x - r_2)^2 + y^2 + z^2$$

Rovnice jsou obdobné oněm v systému pevném, jen v levo vystupují urychlení síly centrifugální $(-n^2x, -n^2y)$ a tak zvané síly Coriolis

$$\left(-2n\frac{dy}{dt}, \; 2n\frac{dx}{dt}\right).$$

Položme

$$2\Omega = \frac{2}{\varrho_1} + \overline{\varrho_1^2} + \left(\frac{2}{\varrho_2} + \overline{\varrho_2^2}\right)\mu,$$

lze pak psáti

$$\left\{\begin{aligned} \ddot{x} - 2n\dot{y} &= \frac{\partial\Omega}{\partial x} \\ \ddot{y} + 2n\dot{x} &= \frac{\partial\Omega}{\partial y} \\ \ddot{z} &= \frac{\partial\Omega}{\partial z} \end{aligned}\right. \qquad \begin{aligned} \overline{\varrho_1} &= \varrho_1\ (z = 0) \\ \overline{\varrho_2} &= \varrho_2\ (z = 0) \end{aligned}$$

$$K = \frac{\partial\Omega}{\partial x} = -\frac{x + r_1}{\varrho_1^3} + x + r_1 + \mu\left(-\frac{x - r_2}{\varrho_2^3} + x - r_2\right)$$

$$L = \frac{\partial\Omega}{\partial y} = -\frac{y}{\varrho_1^3} + y + \mu\left(-\frac{y}{\varrho_2^3} + y\right)$$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial z} = -\frac{z}{\varrho_1^3} + \mu\left(-\frac{z}{\varrho_2^3}\right) \tag{1}$$

$$M = \frac{\partial^2\Omega}{\partial x^2} = -\frac{1}{\varrho_1^3} + \frac{3(x + r_1)^2}{\varrho_1^5} + 1 + \mu\left(-\frac{1}{\varrho_2^3} + \frac{3(x - r_2)^2}{\varrho_2^5} + 1\right)$$

$$N = \frac{\partial^2\Omega}{\partial y^2} = -\frac{1}{\varrho_1^3} + \frac{3y^2}{\varrho_1^5} + 1 + \mu\left(-\frac{1}{\varrho_2^3} + \frac{3y^2}{\varrho_2^5} + 1\right)$$

$$Q = \frac{\partial^2\Omega}{\partial x \partial y} = \frac{3(x + r_1)y}{\varrho_1^5} + \frac{3(x - r_2)y}{\varrho_2^5}\mu.$$

Zavedou-li se pomocí substituce Hill-Brownovy, známé z měsíční theorie, nové proměnné, lze náš systém tří rovnic nahraditi pouze dvěma.

Položme (Monthly Notices LXXI. 6.)

$$u = x + iy \qquad s = x - iy$$

užívajíce symbolů

$$\frac{d}{dt} = iD \qquad \frac{d^2}{dt^2} = -D^2$$

dostaneme, ježto

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial s}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = i, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -i$$

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{1}{2}, \quad \frac{\partial x}{\partial s} = \frac{1}{2}, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{1}{2i}, \quad \frac{\partial y}{\partial s} = -\frac{1}{2i}.$$

$$\left\{\begin{aligned} D^2u + 2nDu + 2\frac{\partial\Omega}{\partial s} &= 0 \\ \left[D^2s + 2nDs + 2\frac{\partial\Omega}{\partial u} = 0\right] \\ \ddot{z} &= \frac{\partial\Omega}{\partial z} \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Budeme nyní vyšetřovati pohyby v okolí zcela libovolného bodu roviny XY (a, b, o), i nalezneme kladouce (Darwin, Scientif. Papers IV. Periodic orbits l. c.)

$$\left\{\begin{aligned} x &= a - \varkappa + \xi \\ y &= b - \lambda + \eta \\ z &= \zeta \end{aligned}\right. \qquad \begin{aligned} u_1 &= \xi + i\eta \\ s_1 &= \xi - i\eta \end{aligned}$$

označíme-li hodnotami v závorkách dosazení a, b, o:

$$\left\{\begin{aligned} D^2u_1 + 2n\,Du_1 + 2\left(\frac{\partial\Omega}{\partial s}\right) + 2\left(\frac{\partial^2\Omega}{\partial s\partial u}\right)u_1 + 2\left(\frac{\partial^2\Omega}{\partial s^2}\right)s_1 &= 0 \\ \ddot{\zeta} = \left(\frac{\partial^2\Omega}{\partial z^2}\right)\zeta \end{aligned}\right.$$

---

neboť v rovině XY je všude

$$\frac{\partial\Omega}{\partial z} = \frac{\partial^2\Omega}{\partial s\partial z} = \frac{\partial^2\Omega}{\partial u\partial z} = 0.$$

Druhá z rovnic vede ihned k pohybu harmonickému. Stačí tedy vyšetřovati jen naši první rovnici. Pohyby v ní nalezené platí pak i v okolí roviny XY tak, jakoby tato celá kývala harmonicky kol původní rovnovážné polohy splývající s rovinou dráhy planety rušivé (resp. Jupitera). Tělisko uvažované pohybuje se při tom obecně po šroubovici. Perioda harmonických kyvů podél osy Z obnáší T

$$\frac{2\pi}{T} = \sqrt{-\left(\frac{\partial^2\Omega}{\partial z^2}\right)}.$$

Pro libovolný bod roviny XY najdeme

$$\left(\frac{\partial^2\Omega}{\partial z^2}\right) = -\left(\frac{1}{\varrho_1^3} + \frac{\mu}{\varrho_2^3}\right).$$

Je tedy řešení druhé z rovnic

$$\zeta = R\cos\left(\frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{\varrho_1^3}+\frac{\mu}{\varrho_2^3}}}\,t + S\right),$$ kdež R, S jsou konstanty.

Píšeme prvnější z rovnic ve tvaru

$$D^2u_1 + 2nDu_1 + \frac{M+N}{2}u_1 + \left(\frac{M-N}{2} + Qi\right)s_1 = -K - iL. \tag{3}$$

Pro $\varkappa$, λ nalezneme především

$$\varkappa = \frac{LQ-KN}{Q^2-MN} \qquad \lambda = \frac{KQ-LM}{Q^2-MN} \tag{4}$$

touto volbou parametrů $\varkappa$, λ vymizí pravá strana a rovnice stane se lineární s konstantními koefficienty bez druhého členu. K integraci položme

$$u_1 = (A+i)\,e^{ht}$$
$$s_1 = (A-i)\,e^{ht}$$

a najdeme

$$h^4 - h^2(M+N-4n^2) + MN - Q^2 = 0, \tag{5}$$

zoveme-li kořeny $\pm h_1$, $\pm h_2$, bude obecné řešení

$$\begin{aligned} \xi &= G\cos hyp\, h_1t + H\sin hyp\, h_1t + E\cos hyp\, h_2t \\ &\qquad + F\sin hyp\, h_2t \\ \eta &= G'\cos hyp\, h_1t + H'\sin hyp\, h_1t + E'\cos hyp\, h_2t \\ &\qquad + F'\sin hyp\, h_2t \end{aligned} \tag{6}$$

$$\zeta = R\cos\left(\frac{2\pi t}{\sqrt{\frac{1}{\varrho_1^3}+\frac{\mu}{\varrho_2^3}}} + S\right)$$

při čemž

$$\begin{aligned} G' &= \frac{2nh_1\,H - QG}{N-h_1^2} & H' &= \frac{2nh_1\,G - QH}{N-h_1^2} \\ E' &= \frac{2nh_2\,F - QE}{N-h_2^2} & F' &= \frac{2nh_2\,E - QF}{N-h_2^2}. \end{aligned} \tag{7}$$

Až posud vyšetřováno obecně okolí libovolného bodu roviny XY síly konstantní K, L. Ale existují také body rovnovážné, v nichž $K = L = 0$. Je to známých pět Lagrangeových center libračních. Stran bližšího odkazujeme čtenáře na spis Charlier, Mechanik des Himmels II., p. 105 et sq. Zde zrekapitulujeme jen některé věci v dalším potřebné. Především pamatujme: Všude tam, kde nalezneme v sebe uzavřenou pohybovou křivku, jde dle definice v úvodu o satellita oscillujícího.

Hledajíce zmíněné body nullové síly položme

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial x}\right) &= 0 = \frac{\partial \Omega}{\partial \varrho_1}\frac{x+r_1}{\varrho_1} + \frac{\partial \Omega}{\partial \varrho_2}\frac{x-r_2}{\varrho_2} \\ \left(\frac{\partial \Omega}{\partial y}\right) &= 0 = \frac{\partial \Omega}{\partial \varrho_1}\frac{y}{\varrho_1} + \frac{\partial \Omega}{\partial \varrho_2}\frac{y}{\varrho_2} \end{aligned} \tag{8}$$

i máme buďto:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \varrho_1} = 0, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial \varrho_2} = 0, \tag{8^a}$$

nebo

$$\begin{vmatrix} \dfrac{x+r_1}{\varrho_1} & \dfrac{x-r_2}{\varrho_2} \\ \dfrac{y}{\varrho_1} & \dfrac{y}{\varrho_2} \end{vmatrix} = \frac{y}{\varrho_1\varrho_2} = 0. \tag{8^b}$$

Podmínka (8^a) vede ku

$$\varrho_1 - \frac{1}{\varrho_1^2} = 0 = \varrho_2 - \frac{1}{\varrho_2^2}, \quad \varrho_1 = \varrho_2 = 1,$$

tedy dva body ve vrcholech rovnostranných trojúhelníků slunce-Jupiter-těleso L_4, L_5 (viz obraz 3). L_4 ve směru pohybu před ♃, L_5 za ním. Jich koordinaty jsou patrně

$$a = \frac{1}{2}\,\frac{1-\mu}{1+\mu} \quad b = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Dle toho najdeme

$$\begin{aligned} \varkappa = \lambda = K = L &= 0 \\ M &= \frac{3}{4}(1+\mu) \\ N &= \frac{9}{4}(1+\mu) \\ Q &= \pm 3\frac{\sqrt{3}}{4}(1-\mu) \\ \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial z^2}\right) &= -(1+\mu). \end{aligned}$$

Je tedy perioda kmitů podél osy Z

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{1+\mu}},$$

to je táž, co perioda oběhu rušivé planety.

(Dokončení.)

O geometrických a fysikálních methodách k určení parallaxy sluneční.

Napsal Dr. **Karel Vodička.**

(Pokračování.)

Parallaxa sluneční jako funkce hmoty zemské. Obě methody k stanovení parallaxy sluneční, plynoucí z theorie pohybu měsíce, nedávají stejných výsledků, jak by se snad dalo očekávati, když mají za podklad stejný princip, všeobecnou gravitaci. Příčina toho neleží ovšem v gravitaci samé, nýbrž v různých faktorech, které stejně přesně z pozorování určiti nelze. Pouto všeobecné gravitace, jež víže veškerá tělesa nebeská, vede ještě k *Leverrierově* methodě k stanovení parallaxy sluneční, která se opírá o princip, že lze při známých hodnotách relativních hmot slunce a země určiti vzdálenost slunce od země, porovnáme-li prostor, kterým na povrchu zemském padá těleso v jednotce časové, s prostorem, kterým země v jednotce časové padá k slunci. Hlavní váha klade se tu tedy na určení hmoty zemské v jednotkách hmoty sluneční, a poměr ten určuje se z poruchů, které země způsobuje v pohybech blízkých planet, hlavně Venuše a Marta, nebo periodických komet.

Značí-li a_1 velkou poloosu dráhy zemské, n střední pohyb její v jednotce časové, m hmotu země, M hmotu slunce, k Gaussovu konstantu, jest analogicky s rovnicí (68) dle třetího zákona Keplerova (*Gruss*: Základové theor. astronomie I. str. 19.)

$$(M + m)\, k^2 = a_1^3 n^2. \tag{75}$$

Jest tedy k^2 ona síla, kterou se dvě jednotkové hmoty přitahují v jednotkové distanci; dovedeme-li sílu tu vyjadřiti též z poměrů na zemi, obdržíme eliminací k^2 hledaný vztah pro parallaxu sluneční.