Bohuslav Hostinský

Poznámky o geodetických čarách na rotačních plochách

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 42 (1913), No. 2, 165--169

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121581

Dosadíce to do rovnice našeho konoidu dostaneme rovnici tohoto specielního našeho konoidu po jednoduché úpravě ve tvaru:

$$y(y^2 + 3a^2)(x^2 + z^2) - 2a\,xz(a^2 + 3y^2) + 0.$$

Konoid tento nazveme *orthogonálným*, ježto jest stanoven dvěma kolmými mimoběžkami. Konoidů takových existuje ∞^7.

Nalezneme-li rovnice torsálních přímek tohoto konoidu dle vzorců nahoře uvedených, tu dostáváme:

$$y = \pm a \quad \frac{z}{x} = \pm 1.$$

I vidíme, že torsální a dvojné přímky konoidu orthogonálního splývají.

Další konoid význačný ve svazku našich konoidů jest konoid degenerovaný příslušný páru našich přímek splývajících. Rovnici jeho dostaneme, když položíme do obecné rovnice konoidu našeho

$$a = 0.$$

I máme

$$y^3(x^2 + z^2) = 0.$$

Tu vidíme, že náš konoid degenerovaný skládá se z trojnásobné roviny řídicí a nullového válce rotačního, opsaného ose konoidu Plückerova.

Poznámky o geodetických čarách na rotačních plochách.

Napsal **Bohuslav Hostinský**

1. Daná křivka o jisté maximální pořadnici R nechť se otáčí kolem osy úseček. Na rotační ploše takto vytvořené odpovídá oné maximální pořadnici kruh, který nazveme ekvator a který jest patrně geodetickou čárou plochy. Každá jiná geodetická čára g, ekvator protínající, jest určena 1. bodem průsečným A; 2. úhlem α, který v A svírá s ekvatorem. Průběh křivky g (pokud α nepřekročí jistou mez) jest známý: g se vzdaluje od A, protínajíc meridiany plochy v stále větších úhlech, až se

dotkne jistého kruhu parallelního s ekvatorem v bodě B; pokračování křivky tvoří oblouk BC souměrný k AB vzhledem k rovině meridianu, procházející bodem B. Křivka g oscilluje kolem ekvatoru, dotýkajíc se střídavě dvou kružnic parallelních o stejných poloměrech, které leží každá po jedné straně ekvatoru.*) Naší úlohou bude vypočísti limitu úhlu v, který svírají meridiany bodů A a C, konverguje-li úhel α k nulle; limitní poloha bodu C jest průsek ekvatoru s geodetickou čárou nekonečně blízkou a procházející bodem A.

Nejjednodušeji dojdeme k cíli užitím následující věty (viz *Darboux* l. c. N° 625): Je-li s délka oblouku měřená podél jisté geodetické čáry k a p nekonečně krátká kolmice, kterou třeba vztyčiti v nějakém bodě křivky k, aby koncové body všech těch kolmic vytvořily opět geodetickou čáru, vyhovuje p differencialní rovnici linearní 2. řádu

$$\frac{d^2p}{ds^2} = -\frac{p}{RR'};$$

součin RR' obou hlavních poloměrů křivosti považuje se v této rovnici za funkci jediné proměnné s.

V našem případě volíme za k ekvator; jeho poloměr R i poloměr R' meridianového řezu jsou konstanty. Je-li $s = 0$ v bodě A, integrujeme onu rovnici tak, aby $p = 0$, když $s = 0$; vychází

$$p = \sin\left(\sqrt{\frac{1}{RR'}}\,.\,s\right).$$

Průsek C oné čáry s ekvatorem odpovídá jisté hodnotě $s = s_0$, která hoví podmínce

$$\frac{1}{\sqrt{RR'}}\,.\,s_0 = \pi;$$

z rovnice

$$s_0 = R\varphi$$

následuje

$$\varphi = \pi\sqrt{\frac{R'}{R}}. \qquad (1)$$

---

*) Viz na př. *Darboux*: Théorie des surfaces t. III. N° 582.

2. Vzorec (1) odvoďme ještě jiným způsobem, který nepředpokládá oné pomocné věty a který nám umožní podrobněji sledovati, jak vzrůstá φ do nekonečna s rostoucím R'.

Budiž u oblouk meridianu počítaný od A, r poloměr parallelního kruhu; bodu B nechť odpovídají hodnoty $u = u_1$, $r = a$. Úhel v jest dán (viz Darboux l. c. N⁰ 582) integrálem

$$v = 2a \int_0^{u_1} \frac{du}{r\sqrt{r^2 - a^2}}. \tag{2}$$

Je-li u velmi malé, platí

$$r = R + \left(\frac{dr}{du}\right)_0 . u + \left(\frac{d^2 r}{du^2}\right)_0 . \frac{u^2}{2} + \ldots;$$

dále jest

$$\frac{dr}{du} = -\sin\alpha, \quad \frac{d^2 r}{du^2} = -\cos\alpha\,\frac{d\alpha}{du}, \quad \frac{d\alpha}{du} = \frac{1}{\varrho}, \tag{3}$$

kde α značí úhel sevřený tečnou meridianu a rotační osou, a ϱ poloměr křivosti meridianu Pro $u = 0$ jest

$$\alpha = 0, \quad \varrho = R',$$

a tedy

$$r = R - \frac{1}{2R'}\,u^2, \; r^2 - a^2 = R^2 - a^2 - \frac{R}{R'}\,u^2; \tag{4}$$

členy vyšších stupňů jsou vynechány.

Hledaná limita integrálu (2) redukuje se — vynecháme-li $-\frac{1}{2R'}u^2$ vedle R a poznamenáme-li, že $\lim a = R$ — na

$$\varphi = \lim_{u_1 = 0} 2 \int_0^{u_1} \frac{du}{\sqrt{R^2 - a^2 - \frac{R}{R'}u^2}}.$$

Zaveďme novou integrační proměnnou z:

$$u\sqrt{\frac{R}{R'(R^2 - a^2)}} = z;$$

horní mez transformovaného integrálu bude v limitě rovna

$$\lim_{u_1 = 0} u_1 \sqrt{\frac{R}{R'(R^2 - a^2)}} = 1,$$

poněvadž vzhledem k (4) platí

$$a = R - \frac{u_1^2}{2R'},\ R^2 - a^2 = \frac{R}{R'} u_1^2.$$

Vychází tudíž jako dříve

$$\varphi = 2\sqrt{\frac{R'}{R}} \cdot \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \pi\sqrt{\frac{R'}{R}}.$$

3. Jacobi upozornil poprvé na obálku geodetických čar, vycházejících z daného bodu, jež má důležitý význam v problémech variačního počtu; Braunmühl *) sledoval podrobně tvar těch obálek na rotačních ellipsoidech, a z obrazců, jež na citovaném místě nacházíme, jest možno si utvořiti představu o tvaru obálek na každé rotační ploše poblíže ekvatoru.

Zvláštní případ nastává, když jest poloměr křivosti R' meridianového řezu v ekvatoru nekonečně veliký. Geodetické čáry vycházející z bodu A mají obálku, avšak ekvator sám neprotíná nekonečně blízkou geod. čáru, která obíhá nekonečně mnohokráte dokola; úhel v jest nekonečně veliký. Sledujme blíže tento případ předpokládajíce, že tečna sestrojená k meridianové křivce v bodě maximální ordinaty R má s křivkou dotyk třetího stupně, t. j. že

$$r = R - \frac{k}{24} u^4 + \ldots,\ r^2 - a^2 = R^2 - a^2 - \frac{Rk}{12} u^4 + \ldots \tag{5}$$

Derivujme druhou rovnici (3) dvakráte dle u a položme $u = 0$; snadno shledáme, že

$$-\left(\frac{d^4 r}{du^4}\right)_0 = k = \left[\frac{d^2}{du^2}\left(\frac{1}{\varrho}\right)\right]_0.$$

Vypočtěme nyní limitu součinu $u_1 \cdot v$ postupem udaným v předešlém odstavci. Jmenovatel funkce za integračním zna-

*) *A. v. Braunmühl*: Über Enveloppen geodätischer Linien. (Mathem. Annalen, Bd. XIV., p. 557; 1879.)

mením v (2) transformuje se dle rovnic (5); pak se zavede nová integr. proměnná

$$z = u\sqrt[4]{\frac{Rk}{12(R^2 - a^2)}}.$$

Poněvadž

$$a = R - \frac{k}{24} u_1^4,\ R^2 - a^2 = \frac{Rk}{12} u_1^4,$$

vychází

$$\lim_{u_1 = 0} (u_1 \,.\, v) = 4\sqrt{\frac{3}{R \,.\, k}} \,.\, \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1 - z^4}}. \tag{6}$$

Příklad: Cassiniho ellipsa

$$(x^2 + y^2)^2 + 2c^2(y^2 - x^2) - 3c^4 = 0 \tag{7}$$

vytvoří rotací kolem osy Ox plochu, jejíž ekvator ($x = 0$) má poloměr

$$R = c.$$

Hodnoty derivací r dle u pro $u = 0$ v předešlých výpočtech se vyskytující jsou totožné s hodnotami derivací y dle x pro bod $x = 0$, $y = c$; derivujíce rovnici (7) čtyřikrát, najdeme (pro $x = 0$)

$$+ k = -\left(\frac{d^4y}{dx^4}\right)_0 = \frac{3}{c^3}.$$

Vzorec (7) dává tudíž

$$\lim_{u_1 = 0} (u_1 \,.\, v) = 4c \,.\, \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1 - z^4}}.$$