Vilém Jung

Methodický příspěvek k theorii funkce Gamma. [V.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 32 (1903), No. 5, 377--387

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121585

Methodický příspěvek k theorii funkce Gamma.

Napsal

Vilém Jung,

professor c. k. státní průmyslové školy v Praze.

(Dokončení.)

4.

Z rovnice (14) odst. 1. plyne

$$\log \mathrm{F}(z) = \log f(z) + \log \Gamma(z), \tag{58}$$

tak že na základě rovnice (11) můžeme psáti, berouce zřetel pouze k hlavní hodnotě funkce logarithmické,

$$\log \Gamma(z) = \sum_{m=1}^{+\infty} \left[(z-1) \log \frac{m+1}{m} - \log \frac{z+m-1}{m} \right]. \tag{58'}$$

Touto rovnicí rozvinuje se hlavní hodnota funkce $\log \Gamma(z)$ v nekonečnou řadu logarithmů, která konverguje *absolutně* a *stejnoměrně* pro každé konečné z, vyjímajíc místa $z = 0, -1, -2, \ldots$, jak bylo již z předu ukázáno.

Derivováním rovnice (13) dle z obdržíme po krátké úpravě

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = \lim_{m=+\infty} \left[\log m - \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{z+k-1} \right], \tag{59}$$

z čehož pro $z \doteq 1$ vychází

$$(60) \qquad \Gamma'(1) = -\lim_{m=+\infty}\left[\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k} - \log m\right].$$

Z rovnice (6) plyne pro $\lim m = +\infty$

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = \Gamma'(1) + \lim_{m=+\infty}\left[\frac{\Gamma'(z+m)}{\Gamma(z+m)} - \frac{\Gamma'(1+m)}{\Gamma(1+m)}\right]$$
$$+\sum_{m=1}^{+\infty}\left[\frac{1}{m} - \frac{1}{z+m-1}\right].$$

Na základě rovnice (59) možno psáti *)

*) Budiž ν kladné číslo celistvé hovící podmínce $|z| \leq \nu < |z|+1$. Volíme-li m tak velké, aby $m > \nu$, platí

$$\left|\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{(m+k)(m+k+z-1)}\right| \leq \sum_{k=1}^{m}\frac{1}{(m+k)(m+k-1-|z|)}$$
$$< \sum_{k=0}^{m-1}\frac{1}{(m+k-|z|)^2} \leq \sum_{k=0}^{m-1}\frac{1}{(m-\nu+k)^2}$$

Položme $m-\nu=\mu$, potom jest pro $\lim m = +\infty$ také $\lim \mu = +\infty$. Obdržíme tedy

$$\left|\lim_{m=+\infty}\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{(m+k)(m+k+z-1)}\right| < \lim_{\mu=+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(\mu+k)^2}$$
$$< \lim_{\mu=+\infty}\frac{1}{\mu}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{2^k} = \lim_{\mu=+\infty}\frac{2}{\mu} = 0,$$

neboť

$$\frac{1}{\mu^2} + \frac{1}{(\mu+1)^2} + \dots + \frac{1}{(2\mu-1)^2} < \frac{\mu}{\mu^2} = \frac{1}{\mu},$$
$$\frac{1}{(2\mu)^2} + \frac{1}{(2\mu+1)^2} + \dots + \frac{1}{(4\mu-1)^2} < \frac{2\mu}{(2\mu)^2} = \frac{1}{\mu}\cdot\frac{1}{2},$$
$$\frac{1}{(4\mu)^2} + \frac{1}{(4\mu+1)^2} + \dots + \frac{1}{(8\mu-1)^2} < \frac{4\mu}{(4\mu)^2} = \frac{1}{\mu}\cdot\frac{1}{4},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

z čehož plyne

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(\mu+k)^2} < \frac{1}{\mu}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots\right) = \frac{2}{\mu}.$$

$$\lim_{m=+\infty}\left[\frac{\Gamma'(z+m)}{\Gamma(z+m)}-\frac{\Gamma'(1+m)}{\Gamma(1+m)}\right]$$

$$=\lim_{m=+\infty}\left[\log m-\sum_{k=}^{m}\frac{1}{z+m+k-1}-\log m+\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{m+k}\right]$$

$$=(z-1)\lim_{m=+\infty}\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{(m+k)(m+k+z-1)}=0,$$

při čemž béřeme zřetel pouze k hlavním hodnotám funkcí logarithmických.

Následkem toho obdržíme*)

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}=\Gamma'(1)+\sum_{m=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{z+m-1}\right). \tag{61}$$

---

*) Rovnici (61) lze odvoditi přímo z rovnice (18), v níž vyjadřuje se funkce $\frac{1}{\Gamma(z)}$ nekonečným součinem v celém konečnu *absolutně* konvergentním.

Logarithmováním této rovnice obdržíme

$$\log\Gamma(z)=-Cz-\log z+\sum_{m=1}^{+\infty}\left[\frac{z}{m}-\log\left(1+\frac{z}{m}\right)\right];$$

nekonečná řada na pravo konverguje absolutně a stejnoměrně v celém konečnu, vyjímajíc místa $z=0,\ -1,\ -2,\ldots,$ jež jsou singulárnými body funkce $\log\Gamma(z)$.

Derivováním pak obdržíme opět řadu absolutně a stejnoměrně konvergentní ve zmíněném oboru, t. j.

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}=-C-\frac{1}{z}+\sum_{m=1}^{+\infty}\left[\frac{1}{m}-\frac{1}{z+m}\right],$$

z čehož po krátké dovolené přeměně plyne

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}=-C+\sum_{m=1}^{+\infty}\left[\frac{1}{m}-\frac{1}{z+m-1}\right].$$

V textu jest tato rovnice odvozena na základě rovnic, jež předcházejí rovnici (18) a to zúmyslně, aby nebylo potřebí znáti tuto rovnici. Z té příčiny mohly by úvahy, obsažené v odstavci *4.* následovati hned za důkazem absolutní konvergence nekonečného součinu, obsaženého v rovnici (16) odstavce *1-ho.*

Budiž u_m obecný člen této řady, absolutní hodnotu $|z-1|$ označme literou ζ a zvolme kladné celistvé $h > \zeta$.

Pro $m > 1$, $m > \zeta$ pak platí

$$|z+m-1| \geqq m-\zeta;$$

z toho soudíme, že

$$|u_m| = \frac{|z-1|}{m \,.\, |z+m-1|} \leqq \frac{\zeta}{m(m-\zeta)}.$$

Jest tedy

$$\sum_{m=h}^{+\infty} |u_m| \leqq \zeta \sum_{m=h}^{+\infty} \frac{1}{m(m-\zeta)} < \zeta \sum_{m=h}^{+\infty} \frac{1}{(m-\zeta)^2}.$$

Ježto jest m kladné celistvé číslo hovící podmínce $m > 1$, $m > \zeta$, jest součet řady na pravo v této nerovnosti konečný pro jakékoliv konečné ζ a proto konverguje řada $\sum\limits_{m=1}^{+\infty} u_m$ *absolutně* pro jakékoliv konečné z. vyjímajíc místa $z = 0, -1, -2, \ldots$. Pro $z = -(m-1)$, $(m = 1, 2, 3, \ldots)$ má jeden člen této řady hodnotu nekonečně velkou *1. řádu* a tedy součet této řady má taktéž hodnotu nekonečně velkou *1. řádu.*

Zvolíme-li v poslední nerovnosti h dostatečně velké, tak že $h > \zeta + r$ čili $h - \zeta > r$, při čemž jest r libovolné celistvé číslo kladné, jest patrno, že

$$\sum_{m=h}^{+\infty} \frac{1}{m(m-\zeta)} < \sum_{m=r}^{+\infty} \frac{1}{m^2}.$$

Můžeme tedy volbou dosti velkého r, t. j. volbou dosti velkého h učiniti zbytek řady libovolně malým, nechť jest z jakékoliv číslo konečné, z té příčiny konverguje zmíněná řada *stejnoměrně* v celém konečnu, vyjímajíc místa $z = 0, -1, -2, \ldots$.

Rovnicí (61) vyjadřuje se *logarithmická derivace* funkce $\Gamma(z)$ nekonečnou řadou parciálních zlomků, z nichž každý obsahuje jeden pól 1. řádu zmíněné meromorfní funkce.

Násobme obě strany rovnice (61) differenciálem dz a integrujme v mezích od *1* do z. Ježto řada na pravo konverguje stejnoměrně ve zmíněném oboru, můžeme ji v tomto oboru integrovati po členech; přihlížejíce dále k tomu, že $\log \Gamma(1) = 0$, obdržíme rovnici

$$(62)\quad \log \Gamma(z) = (z-1)\,\Gamma'(1) + \sum_{m=1}^{+\infty}\left[\frac{z-1}{m} - \log\frac{z+m-1}{m}\right].$$

Budiž u_m obecný člen řady, absolutní hodnotu $|z-1|$ označme písmenem ζ; pro $m > 1$, $m > \zeta$ obdržíme konvergentní rozvoj

$$u_m = \frac{z-1}{m} - \log\left(1+\frac{z-1}{m}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{z-1}{m}\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{z-1}{m}\right)^3 + \ldots$$

Z toho soudíme, že

$$|u_m| < \frac{\zeta^2}{m^2}\left(1+\frac{\zeta}{m}+\frac{\zeta^2}{m^2}+\cdots\right),\quad \text{t. j.}\quad |u_m| < \frac{\zeta^2}{m^2}\cdot\frac{1}{1-\frac{\zeta}{m}}$$

čili

$$|u_m| < \frac{\zeta^2}{m(m-\zeta)} < \frac{\zeta^2}{(m-\zeta)^2}.$$

Pro $h > \zeta$ platí

$$\sum_{m=h}^{+\infty}|u_m| < \zeta^2\sum_{m=h}^{+\infty}\frac{1}{(m-\zeta)^2},$$

pročež konverguje řada $\sum_{m=1}^{+\infty} u_m$ *absolutně* pro jakékoliv konečné z, vyjímajíc $z = 0, -1, -2, \ldots$.

Zvolíme-li dále $h > \zeta + r$, při čemž jest r libovolné kladné číslo, jest $h - \zeta > r$ a tedy také

$$\sum_{m=h}^{+\infty}\frac{1}{(m-\zeta)^2} < \sum_{m=r}^{+\infty}\frac{1}{m^2}.$$

Patrno tedy, že můžeme volbou dosti velkého r, t. j. volbou dosti velkého h učiniti zbytek řady libovolně malým, nechť jest z jakékoliv číslo konečné; proto konverguje řada

(62) také *stejnoměrně* ve zmíněném oboru, při čemž se musí ovšem výraz v hranatých závorkách za znamením Σ bráti pokaždé za jeden člen řady.

Z rovnice (62) plyne pro $z = 2$ vzhledem k tomu, že $\log \Gamma(2) = 0$, rovnice

$$\Gamma'(1) = -\sum_{m=1}^{+\infty}\left[\frac{1}{m} - \log\left(1 + \frac{1}{m}\right)\right] = -\,\mathrm{C}. \tag{63}$$

Můžeme tedy v rovnicích (61) a (62) psáti místo $\Gamma'(1)$ zápornou *Euler*-ovu konstantu, t. j. $-\mathrm{C}$.

Se zřetelem k rovnici (60) můžeme tuto konstantu také definovati limitním výrazem

$$\mathrm{C} = \lim_{m=+\infty}\left[\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k} - \log m\right].$$

Ježto nekonečná řada na pravo rovnice (61) konverguje *stejnoměrně* v celém konečnu, vyjímajíc $z = 0, -1, -2, \ldots,$ obdržíme libovolněnásobným derivováním této řady dle z řady *stejnoměrně* konvergentní v témž oboru, t. j. obecně

$$\frac{1}{n!}\,\frac{d^n\,\dfrac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}}{dz^n} = (-1)^{n+1}\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{1}{(z+m-1)^{n+1}}, \tag{64}$$

při čemž $n > 0$.

Pro $n > 0$ konverguje řada na pravé straně rovnice (64) *absolutně* a *stejnoměrně* *) pro každé konečné z, vyjímajíc $z = 0, -1, -2, \ldots.$

---

*) O tom se můžeme také přímo přesvědčiti.

Budiž u_m obecný člen řady,

$$|z - 1| = \zeta.$$

Pro $m > 1$, $m > \zeta$ platí

$$|z + m - 1| \geqq m - \zeta$$

a tedy také

$$\{|z + m - 1|\}^{n+1} \geqq (m - \zeta)^{n+1}.$$

Můžeme tedy pro libovolný regulárný bod z_0 na základě *Taylor*-ova theorému psáti

$$(65)\quad \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = -C + \sum_{m=1}^{+\infty}\left[\frac{1}{m} + \frac{1}{z_0 + m - 1}\right]$$

$$+ \sum_{n=1}^{+\infty}\left\{(-1)^{n+1}(z - z_0)^n \cdot \sum_{m=1}^{+\infty}\frac{1}{(z_0 + m - 1)^{n+1}}\right\}.$$

Potenční řada obsažená v třetím členu pravé strany rovnice (65) má formu

$$(65')\qquad \sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Absolutní hodnota $|z_0 + m - 1|$ udává vzdálenost bodu z_0 od singulárného bodu $-(m-1)$ pro $m = 1, 2, 3, \dots$.

Z toho soudíme, že

$$|u_m| \leqq \frac{1}{(m - \zeta)^{n+1}};$$

pro $h > \xi$ platí

$$\sum_{m=h}^{+\infty} |u_m| \leqq \sum_{m=h}^{+\infty} \frac{1}{(m - \zeta)^{n+1}}, \qquad n > 0.$$

Ježto jest m číslo kladné hovící podmínce $m > 1$, $m > \zeta$, jest součet řady na pravo v této nerovnosti konečný pro jakékoliv konečné ζ a proto konverguje řada $\sum\limits_{m=1}^{+\infty} u_m$ *absolutně* pro jakékoliv konečné z, vyjímajíc místa $z = 0, -1, -2, \dots$, v nichž má součet zmíněné řady hodnoty nekonečně velké 1. řádu.

Volíme-li $h > \zeta + r$, t. j. $h - \zeta > r$, při čemž jest r libovolné číslo kladné, platí

$$\sum_{m=h}^{+\infty} \frac{1}{(m - \zeta)^{n+1}} < \sum_{m=r}^{+\infty} \frac{1}{m^{n+1}}, \qquad n > 0.$$

Z tohoto jest patrno, že můžeme volbou dosti velkého h učiniti zbytek řady libovolně malým pro jakékoliv konečné z; proto konverguje řada *stejnoměrně* ve zmíněném oboru.

Budiž*) singulárný bod $-(\nu-1)$ *nejbližší* k regulárnému bodu z_0.

Platí tedy $|z_0+\nu-1|<|z_0+m-1|$ pro veškerá $m=1, 2, 3, \ldots$, vyjímajíc $m=\nu$.

Patrno, že

$$|a_n| \leqq \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{(|z_0+m-1|)^{n+1}};$$

položme

$$A_n = \sum_{m=1}^{+\infty} \left\{\frac{|z_0+\nu-1|}{|z_0+m-1|}\right\}^n \frac{1}{|z_0+m-1|},$$

jest tedy

$$|a_n| \leqq \frac{A_n}{(|z_0+\nu-1|)^n},$$

tak že

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n| \leqq \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \left\{\frac{|z-z_0|}{|z_0+\nu-1|}\right\}^n.$$

Ježto jest $\frac{|z_0+\nu-1|}{|z_0+m-1|}<1$ pro veškerá $m=1, 2, 3, \ldots$, vyjímajíc $m=\nu$, a ježto $|z_0+m-1|>0$, jsou *kladná* čísla A_n určitá a konečná, hovící podmínce

$$A_{n+1} < A_n < A_{n-1} < \ldots < A_1.$$

Geometrická řada

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left\{\frac{|z-z_0|}{|z_0+\nu-1|}\right\}^n$$

konverguje pro

$$|z-z_0|<|z_0+\nu-1|,$$

proto také konverguje řada (65') *absolutně* pro

---

*) K regulárnému bodu z_0 může býti nejbližší buď *jeden* singulárný bod, na př. $-(\nu-1)$, anebo nanejvýše *dva* sousední singulárné body, na př. $-(\nu-1)$, $-\nu$; v tomto případě jest totiž $z_0=-\nu+\frac{1}{2}+y_0 i$, tak že $|z_0+\nu-1|=|z_0+\nu|=\sqrt{\frac{1}{4}+y_0^2}$.

$$|z - z_0| < |z_0 + \nu - 1|.$$

Pro $z = -(\nu - 1)$ jest

$$u_n = \frac{(-1)^{2n+1}}{z_0 + \nu - 1} + (-1)^{n+1} K_n (-z_0 - \nu + 1)^n,$$

při čemž

$$K_n = \sum_{m=1}^{\nu-1} \frac{1}{(z_0 + m - 1)^{n+1}} + \sum_{m=\nu+1}^{+\infty} \frac{1}{(z_0 + m - 1)^{n+1}},$$

z čehož patrno, že má součet řady (65′) hodnotu nekonečně velkou pro $z = -(\nu - 1)$.

Proto diverguje řada (65′) pro $|z - z_0| > |z_0 + \nu - 1|$.

Z této úvahy vysvítá, že řada (65) konverguje*) *absolutně* a zároveň *stejnoměrně* uvnitř konvergenční kružnice, opsané z regulárného bodu z_0 a procházející singulárným bodem $z = -(\nu - 1)$, jenž jest k bodu z_0 *nejbližší.*

Jest tedy funkce $\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$ jednoznačnou analytickou funkcí, *regulárnou* v celém konečnu, vyjímajíc místa $z = 0, -1, -2, \ldots$, jež jsou jejími *póly* 1. řádu; *mezným* bodem těchto pólů jest bod $z = \infty$, v němž má zmíněná funkce podstatnou singularitu. Vůči pólu $z_0 = -k$, $(k = 0, 1, 2, \ldots)$, dá se tato funkce na základě rovnice (61) vyjádřiti ve formě

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = -C + \frac{1}{k+1} + \frac{-1}{z+k} + (z-1)\left\{\frac{1}{z} + \frac{1}{2(z+1)} + \cdots \right.$$
$$\left. + \frac{1}{k(z+k-1)} + \frac{1}{(k+2)(z+k+1)} + \cdots \right\}.$$

Rozvineme-li lomené funkce racionální v nekonečné řady potenční, stoupající dle celistvých a kladných mocnin binomu $(z + k)$, konvergují tyto řady *současně*, a to absolutně a stejno-

---

*) Srovnej na př.:

Dr. O. Stolz, Vorlesungen über allgemeine Arithmetik. II. Theil, pag. 153—154. Leipzig 1886.

Dr. R. Fricke, Anal.-Funktionentheoretische Vorlesungen, pag. 127 a násl. Leipzig 1900.

Ed. Weyr, Počet differenciálný. Odst.: 31., 32., pag. 65—70. Praha 1902.

měrně, uvnitř kružnice opsané poloměrem $R = 1$ ze středu $z_0 = -k$.

Vzhledem k tomu platí pro veškerá z uvnitř této konvergenční kružnice rovnice

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = -C + \frac{1}{k+1} + \frac{-1}{z+k} + (z-1)\{A_0 + A_1(z+k) + A_2(z+k)^2 + \ldots\},$$

při čemž jsou A_0, A_1, A_2, ... určitá čísla konečná, jež se dají vyjádřiti konvergentními řadami.

Na základě identity

$$z - 1 = (z+k) - (1+k)$$

můžeme poslední rovnici psáti ve formě

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = \frac{-1}{z+k} + b_0^{(k)} + b_1^{(k)}(z+k) + b_2^{(k)}(z+k)^2 + \ldots. \tag{66}$$

Z této rovnice jest patrno, že logarithmická derivace funkce $\Gamma(z)$ má v místech $z = 0, -1, -2, \ldots$ *póly 1. řádu vesměs s residuem -1;* zároveň patrno, že tato funkce nemá v konečnu *žádných pólů s residuem kladným.* Z té příčiny*) jest původní funkce $\Gamma(z)$ jednoznačnou analytickou funkcí, mající v místech $z = 0, -1, -2, \ldots$ *samé póly 1. řádu, v ostatním konečnu jest regulárnou a nemá v konečnu žádných bodů nullových.* Proto jest její reciproká hodnota $G(z) = \frac{1}{\Gamma(z)}$ *celistvou funkcí transcendentní,* mající v místech $z = 0, -1, -2, \ldots$ *samé nullové body 1. řádu (jednoduché).*

K týmž výsledkům jsme dospěli již v odstavci 1. při vyšetřování analytického charakteru funkce $\frac{1}{\Gamma(z)}$ na základě definice, vyjádřené rovnicí (16).

---

*) Viz na př.: *H. Burkhardt, Funkt. Vorl.*; I. Theil, § 46., pag. 128. Aneb: *Dr. R. Fricke, Analytisch-funktionentheoretische Vorlesungen*; pag. 144. Teubner, Leipzig 1900.

Funkce *log* $\Gamma(z)$ jest v celém konečnu regulárnou, vyjímajíc singulárná místa $z = 0, -1, -2, \ldots$, jež jsou jejími ***póly*** a zároveň ***body rozvětvení*** nekonečně vysokého řádu.

Rozviňme na základě *Taylor*-ova theorému hlavní hodnotu funkce *log* $\Gamma(z)$ v potenční řadu, stoupající dle celistvých a kladných mocnin binomu $(z - z_0)$, tedy vůči regulárnému bodu z_0.

Snížíme-li v rovnici (64) index n o *1*, obdržíme,

$$\frac{1}{(n-1)!}\,\frac{d^{n-1}\dfrac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}}{dz^{n-1}} = (-1)^n \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{(z+m-1)^n}, \qquad n-1 > 0$$

čili

$$(65) \qquad \frac{1}{n!}\,\frac{d^n \log \Gamma(z)}{dz^n} = \frac{(-1)^n}{n} \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{(z+m-1)^n}, \qquad n > 1.$$

Platí tedy pro veškerá z uvnitř konvergenční kružnice opsané ze středu z_0 a procházející nejbližším ze singulárných bodů $z = 0, -1, -2, \ldots$, rovnice

$$(66) \quad \log \Gamma(z) = -\,C(z_0 - 1) + \sum_{m=1}^{+\infty} \left[\frac{z_0 - 1}{m} - \log \frac{z_0 + m - 1}{m}\right]$$
$$+ (z - z_0)\left[-C + \sum_{m=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{z_0 + m - 1}\right)\right]$$
$$+ \sum_{n=2}^{+\infty} \left[\frac{(-1)^n}{n} (z - z_0)^n \cdot \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{(z_0 + m - 1)^n}\right].$$