Úvahy o grafickém integrování differencialních rovnic hlavně linearných prvého řádu.

Napsal

Jan Sobotka,
professor české vysoké školy technické v Brně.

(Pokračování.)

9. *Integrační faktor.*

Je-li dána differencialní rovnice

$$Mdx + Ndy = 0,$$

v níž značí M a N analytické funkce proměnných x, y, a vyhovují-li tyto funkce podmínce

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x},$$

pak jest levá strana rovnice té „úplným differencialem" a rovnici tu lze známým způsobem převésti na kvadratury.

Není-li podmínce té zadost učiněno, pak lze integraci rovnice vytknuté převésti na kvadratury, jakmile znám jest nějaký integrační faktor čili *Eulerův* násobitel, který levou stranu rovnice převádí v úplný differencial.

Jednomu takovému násobiteli, nazveme jej μ, lze dáti jednoduchý geometrický význam, jak učinil slavný *Lie*, totiž:

„Jeden Eulerův násobitel rovná se zvratné hodnotě výrazu $\lim \frac{R}{\varepsilon}$ pro $\varepsilon = 0$, když značí R obdélník, jehož jednou stranou jest délka ν normály libovolné křivky integralní rovnice dané od paty její až k průseku s křivkou integralní soumeznou a jehož strana druhá má délku $l = \sqrt{M^2 + N^2}$. *)

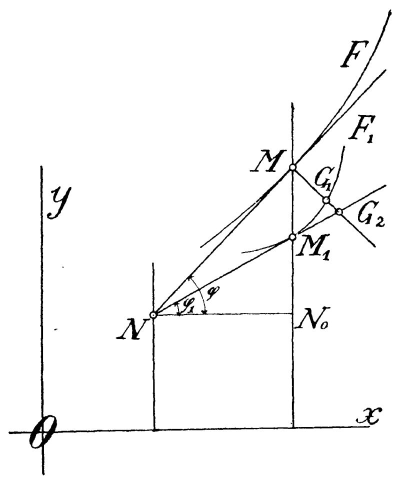
Píšeme-li rovnici libovolné křivky integralní

$$f(x, y) = D,$$

kde znamená D integrační konstantu, pak lze sousední křivku integralní psáti ve tvaru

$$f(x, y) = D + \varepsilon;$$

křivka tato blíží se taktéž křivce prvé, když ε se přibližuje nulle.



Obr. 2.

Mějme nyní na zřeteli naši rovnici linearnou prvého řádu, kterou můžeme psáti ve formě

$$(1) \qquad (PY - Q)\, dx + dY = 0,$$

a dvě její křivky integralní F, F_1 (obr. 2.).

Libovolná stejnosměrka s y protniž F v bodě M, F_1 v bodě M_1. Tečny křivek těchto ve zmíněných bodech se protínají

*) Cf. *Heinrich Liebmann*: Lehrbuch der Differentialgleichungen. Leipzig 1901, str. 55. a n.

v bodě N na křivce n; konečně nechť protne normála křivky F v bodě M křivku F_1 v G_1, tečnu její (NM_1) v bodě G_2.

V našem případě jest

$$l = \sqrt{1 + Y'^2}$$

čili

$$l = \frac{1}{\cos \varphi},$$

uzavírá-li tečna (NM) s osou x úhel φ.

Klademe-li

$$MG_1 = \nu_1, \quad MG_2 = \nu_2$$

a

$$R^* = \nu_2 l,$$

bude proto

$$R^* = \frac{\nu_2}{\cos \varphi}.$$

Jsou-li F, F_1 křivkami soumeznými, pak jest $G_1 G_2$ veličinou nekonečně malou druhého stupně, pročež

$$R = \lim R^* = \lim_{\nu_2 = 0} \frac{\nu_2}{\cos \varphi}.$$

Z trojúhelníků MM_1G_2, NM_1N_0, které lze považovati za podobné, plyne úměra

$$\nu_2 : MM_1 = NN_0 : NM_1,$$

a z té vychází

$$\nu_2 = MM_1 \cdot \cos \varphi_1,$$

když značí φ_1 úhel, který uzavírá tečna NM_1 s osou x.

Tím docházíme k výrazu

$$R = \lim MM_1 \cdot \frac{\cos \varphi_1}{\cos \varphi}$$

pro případ, že F_1 a F se stávají nekonečně blízkými; v případě tom jest však

$$\lim \frac{\cos \varphi_1}{\cos \varphi} = 1;$$

proto jest za těchže poměrů

$$R = \lim MM_1.$$

Z rovnice (3) odst. 8. plyne

$$MM_1 = Y - Y_1 = ky,$$

a béřeme-li ohled na rovnici (6) tamtéž, vychází

$$MM_1 = \frac{E - E_1}{C} y.$$

Vysvítá, že jest R dáno hodnotou, jíž nabude výraz

$$\frac{E - E_1}{C} y,$$

když E_1 se blíží bez ustání E; pak ale přechází rozdíl $E - E_1$ v naši veličinu ε a následkem toho jest

$$R = \lim_{\varepsilon = 0} \frac{\varepsilon}{C} y.$$

Docházíme tedy výsledku, že

$$\mu = \lim_{\varepsilon = 0} \frac{R}{\varepsilon} = \frac{y}{C},$$

aneb vzhledem ke (4) v odst. 7.

$$\mu = e^{-\int P dx},$$

jak se dalo očekávati.

10. Stopujme dále souvislost křivek integralních rovnic

$$(1) \qquad Y' + PY = Q,$$

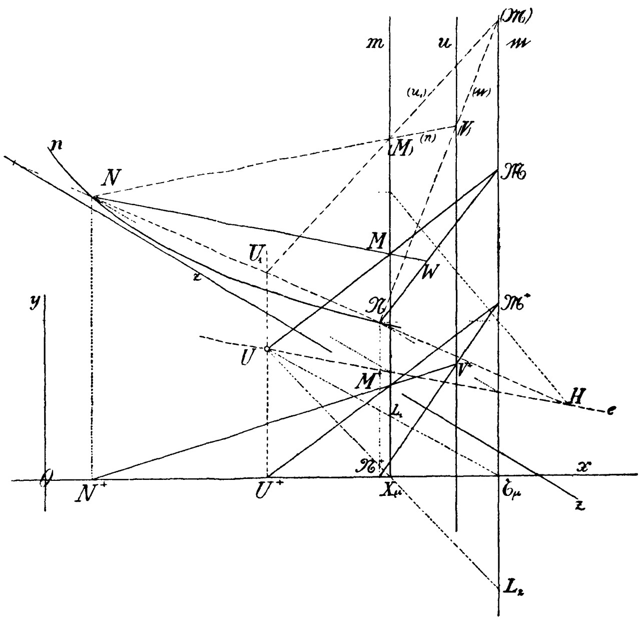
$$(2) \qquad y' + Py = 0.$$

Seznali jsme v odst. 7., že všecky křivky F^* rovnic (2) jsou v poloze affinní; pročež můžeme říci:

Spojnice bodů M^*, $\mathfrak{M}^*$ libovolné křivky F^* ležících na přímkách m, $\mathfrak{m}$ rovnoběžných s y a tečny její v bodech těch tvoří trojúhelník. Takto vznikající trojúhelníky všem křivkám (2) přináležející jsou rovněž příbuzně položeny pro x co osu a y co *směr příbuznosti. Průsečné body V^* tečen těchto vytvořují přímku u rovnoběžnou s osou y.*

Průsečné body osy x buďtež označeny N^* s tečnou v M^*, $\mathfrak{N}^*$ s tečnou v $\mathfrak{M}^*$ a U^* s přímkou $M^* \mathfrak{M}^*$ (obr. 3.).

Tečny ke všem křivkám integralním F rovnice (1) v bodech přímky m nechť se protínají v N, v bodech přímky $\mathfrak{m}$ pak v bodě $\mathfrak{N}$. Spojnice bodů průsečných pro všecky křivky F procházejí



Obr. 3.

taktéž bodem pevným U, jak jsme v odst. 8. seznali; a na základě rovnice (5) odst. 8. bude

$$UU^* \parallel NN^* \parallel \mathfrak{N}\mathfrak{N}^* \parallel y.$$

Následkem rovnice (5) v odst. 8. jsou zároveň svazky tečen z bodů N, $\mathfrak{N}$ ku křivkám F vedené prometnými. Proto platí věta:

Tečny křivek F v bodech na přímkách m, $\mathfrak{m}$ protínají se *v bodech W na hyperbole w procházející body N, $\mathfrak{N}$ a mající přímku u za jednu asymptotu.*

Že u jest asymptotou hyperboly w, o tom se snadno přesvědčíme. Že jedna asymptota má vůbec směr y, to jest patrno. Protíná-li dále přímka (UU^*) přímku $(N\mathfrak{N})$ v bodě U_1, pak jsou všechny trojúhelníky, jejichž strany (n), $(\mathfrak{n})$, (u_1) procházejí body N, $\mathfrak{N}$ resp. U_1 a se protínají (n) s (u_1) v bodě (M) na m; $(\mathfrak{n})$ s (u_1) v bodě $(\mathfrak{M})$ na $\mathfrak{m}$, v poloze affinní a průsečík (V) stran (n), $(\mathfrak{n})$ popisuje přímku u. Neboť leží též kterékoliv dva trojúhelníky $(M)(\mathfrak{M})(V)$, $M^*\mathfrak{M}^*V^*$ příbuzně. Z konstrukce lze nyní snadno seznati, když se vzdalují průsečné body křivky F s m a $\mathfrak{m}$ a vzdaluje se s nimi zároveň příslušný bod W na hyperbole bez ustání do nekonečna, že se zároveň zmenšuje bez přestání vzdálenost bodu W od u, stávajíc se v mezích nekonečně malou.

11. Právě odvozená vlastnost plyne též snadno z rovnice hyperboly w, již chceme nyní odvoditi.

Rovnice paprsků obsahujících prvky přímkové v bodě $x_1 \mid Y_1$ na m a v bodě $x_2 \mid Y_2$ na $\mathfrak{m}$ naší rovnice

(1) $$Y' + PY = Q$$

jsou potažmo

$$\mathfrak{y} - Y_1 = Y_1' (\mathfrak{x} - x_1),$$
$$\mathfrak{y} - Y_2 = Y_2' (\mathfrak{x} - x_2).$$

Dosadíme-li do těchto rovnic za Y_1', Y_2' hodnoty z (1) plynoucí, obdržíme po malé přeměně

(2) $$Y_1 = \frac{\mathfrak{y} - Q_1 (\mathfrak{x} - x_1)}{1 - P_1 (\mathfrak{x} - x)_1},$$

(3) $$Y_2 = \frac{\mathfrak{y} - Q_2 (\mathfrak{x} - x_2)}{1 - P_2 (\mathfrak{x} - x_2)}.$$

Zde značí P_1, Q_1 a P_2, Q_2 hodnoty, jichž nabudou P, Q dosazením za x zvláštních hodnot x_1, x_2.

Dejme tomu, že kterákoliv z křivek F^* rovnice

(4) $$y' + Py = 0$$

stanoví na m pořadnici y_1, na $\mathfrak{m}$ pořadnici y_2, pak jest následkem rovnice (8) v odst. 7.

$$Y_1 = Dy_1 + y_1 \Big/^{x=x_1} \int \frac{Q}{y}\,dx,$$

$$Y_2 = Dy_2 + y_2 \Big/^{x=x_2} \int \frac{Q}{y}\,dx.$$

Položíme-li

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{Q}{y}\,dx = J,$$

obdržíme z posledních dvou rovnic relaci

$$\frac{Y_2}{y_2} - \frac{Y_1}{y_1} = J. \tag{4}$$

Této relaci musí býti učiněno zadost, mají-li rovnice (2) (3) představovati tečny jedné a téže křivky F.

Vložíme-li do (4) za Y_1, Y_2 hodnoty (2) a (3), obdržíme

$$\frac{\mathfrak{Y} - Q_2(\mathfrak{x} - x_2)}{1 - P_2(\mathfrak{x} - x_2)} \cdot \frac{1}{y_2} - \frac{\mathfrak{Y} - Q_1(\mathfrak{x} - x_1)}{1 - P_1(\mathfrak{x} - x_1)} \cdot \frac{1}{y_1} = J \tag{5}$$

jakožto rovnici hledanou hyperboly w.

V rovnici té přichází $\mathfrak{Y}$ toliko v prvé mocnosti a jest násobeno výrazem, který položen roven nulle dává nám rovnici pro asymptotu hyperboly w rovnoběžnou s y. Rovnice ta zní tedy

$$\frac{1}{y_2\{1 - P_2(\mathfrak{x} - x_2)\}} - \frac{1}{y_1\{1 - P_1(\mathfrak{x} - x_1)\}} = 0. \tag{6}$$

Položíme-li v (5) $Q = 0$, obdržíme nejdříve

$$\mathfrak{Y} = 0,$$

což souhlasí s tím, že osa x representuje sama jednu z křivek F^* a pak rovnici přímky u, která, jak vidíme, se stotožňuje s rovnicí (6), čímž naše svrchu uvedené tvrzení znovu dokázáno jest.

12. Odvoďme ještě druhou asymptotu z hyperboly w. Směrnice $\mathfrak{Y}'$ této asymptoty obdrží se ze vzorce

$$\mathfrak{Y}' = \lim_{\mathfrak{x}=\infty} \frac{\mathfrak{Y}}{\mathfrak{x}} \cdot$$

Dělíme-li čítatele i jmenovatele zlomků na levé straně rovnice (5) veličinou $\mathfrak{x}$, klademe-li na to $\mathfrak{x} = \infty$ a použijeme-li pak vztahu (2) v odst. 2. odvozeného, dojdeme tu k výrazu

$$\mathfrak{Y}' = \left(\frac{\eta_2}{y_2} - \frac{\eta_1}{y_1} - J\right) : \left(\frac{1}{P_2 y_2} - \frac{1}{P_1 y_1}\right). \tag{7}$$

Stejnosměrka k asymptotě z vedená bodem N utíná na m pořadnici $\mathfrak{Y}_1$, bodem $\mathfrak{N}$ pak na $\mathfrak{m}$ pořadnici $\mathfrak{Y}_2$, pro které snadno pomocí rovnice (7) obdržíme

$$\begin{aligned} \mathfrak{Y}_1 &= \frac{Q_2 - Q_1 - P_2 y_2 J}{P_2 y_2 - P_1 y_1} \mathfrak{y}_1, \\ \mathfrak{Y}_2 &= \frac{Q_2 - Q_1 - P_1 y_1 J}{P_2 y_2 - P_1 y_1} y_2. \end{aligned} \tag{8}$$

Z výrazů těchto plyne relace

$$P_2 \mathfrak{Y}_2 - P_1 \mathfrak{Y}_1 = Q_2 - Q_1. \tag{9}$$

Následkem této podmínky prochází (obr. 3.) přímka e koncové body pořadnic $\mathfrak{Y}_1$, $\mathfrak{Y}_2$ spojující bodem H, v němž seče)$N\mathfrak{N}$) přímku obsahující paty kolmic z bodu N na přímku m a z bodu $\mathfrak{N}$ na přímku $\mathfrak{m}$.

Patrně jest bod H středem svazku spojujícího podobné řady bodové na m a $\mathfrak{m}$, které vznikají svazky přímek rovnoběžných bodem N resp. $\mathfrak{N}$ procházejících.

Jinak obdržíme z (8) též relaci

$$\frac{\mathfrak{Y}_2}{y_2} - \frac{\mathfrak{Y}_1}{y_1} = J; \tag{10}$$

ta znamená, srovnáme-li s (4), že přímka e prochází zároveň bodem U a že tedy koncovými body pořadnic $\mathfrak{Y}_1$, $\mathfrak{Y}_2$ prochází jedna křivka F; patrně jest to ona křivka, pro niž leží W v nekonečnu.

Avšak rovnice (10) určuje nám bezprostředně bod U, vyjadřujíc svazek přímek bodem tím procházejících.

Spojíme-li totiž koncový bod L_1 pořadnice na m ležící a rovnající se $-y_1 J$ s nullovým bodem $\mathfrak{X}_\mu$ přímky $\mathfrak{m}$ a pak koncový bod L_2 pořadnice na $\mathfrak{m}$ ležící a rovnající se $y_2 J$

s nullovým bodem X_μ přímky m, pak se protnou obě spojnice ve středu svazku rovnicí (10) vyjádřeného. Protože však rovnice (10) jest totožná s rovnicí (4), náležejí body L_1, $\mathfrak{X}_\mu$ jedné křivce F, body L_2, X_μ druhé takové křivce; následkem čehož se skutečně přímky $(L_1\mathfrak{X}_\mu)$, (L_2X_μ) protínají v bodě U.

Jde-li o to sestrojiti asymptotu z, sestrojme body H a U, jak bylo navedeno a spojme je přímkou e; pak udává spojnice bodů N a (me), anebo bodů $\mathfrak{N}$ a (me) směr asymptoty; protneme-li přímku $(N\mathfrak{N})$ asymptotou u v bodě, jehož vzdálenost od $\mathfrak{N}$ přeneseme na tutéž přímku od bodu N, pak obdržíme jeden bod pro z, čímž tato asymptota též již určena jest.

Souřadnice $\mathfrak{X} \mid \mathfrak{Y}$ pro bod U vypočítáme z rovnic přímek $(L_1\mathfrak{X}_\mu)$, (L_2X_μ); majíť hodnoty

$$\mathfrak{X} = \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{y_1 - y_2},$$
$$\mathfrak{Y} = \frac{y_1y_2 J}{y_1 - y_2}. \tag{11}$$

(Pokračování.)

Casparyho nové věty z geometrie trojúhelníka.

Dokazuje

A. Libický,
professor na Král. Vinohradech.

(Pokračování.)

3. Abychom nyní poznali a odůvodnili věty Casparyho, sestrojme především tento obrazec: Bodem $X(x_1, x_2, x_3)$ (obr. 3.) veďme tři příčky k vrcholům trojúhelníka základního A_1X, A_2X, A_3X; první z nich seče protější stranu A_2A_3 tohoto trojúhelníka v bodě X_1, druhá stranu A_3A_1 v bodě X_2 a třetí stranu A_1A_2 v bodě X_3. Bodem X_1 sestrojme pak dvě rovnoběžky, jednu ke straně A_3A_1, druhou k A_1A_2; podobně bodem X_2 veďme rovnoběžky ke stranám A_2A_3, A_1A_2 a bodem X_3 rovnoběžky k A_2A_3 a A_3A_1. Tím obdržíme na stranách trojúhelníka $A_1A_2A_3$ nových šest bodů; dva z nich, ležící na straně