Poznámka. Vedle bodových transformací 1. stupně lze vyšetřovati takové, při nichž bodu neodpovídá bod, nýbrž přímka; vedle transformací 1. stupně jsou zvláště důležité transformace bodové 2. stupně, při nichž bodu sice odpovídá bod, ale přímce křivka 2. stupně, na př. kruh. Nejznámější kvadratickou transformací bodovou jest inverse, při níž bod transformovaný leží s původním na témž paprsku vedeném pevným bodem (středem inverse) a jest na něm stanoven požadavkem, že součin vzdáleností obou korrespondujících bodů od zmíněného středu jest konstantní. Volíme-li onen bod v počátku souřadnic a konstantu k, platí tedy

$$\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x^2 + y^2} = k, \quad \frac{y_1}{x_1} = \frac{y}{x},$$

odkudž plynou rovnice transformační

$$x_1 = \frac{kx}{x^2 + y^2}, \quad y_1 = \frac{ky}{x^2 + y^2}.$$

Jest patrno, že přímka $y = ax + b$ přechází touto transformací v křivku $b(x^2 + y^2) + akx - ky = 0$, tedy v kružnici

---

Některé drobnosti geometrické.

Podává **Václav Hübner**, professor na Král. Vinohradech.

Ze středu o kružnice vepsané do $\triangle abc$ spusťme kolmice $\overline{oa_1}$, $\overline{ob_1}$, $\overline{oc_1}$ na strany trojúhelníka $\overline{bc}$, $\overline{ac}$, $\overline{ab}$, a spojme paty těchto kolmic mezi sebou, čímž obdržíme $\triangle a_1b_1c_1$. Strany $\triangle a_1b_1c_1$ buďtež a_1, b_1, c_1 a vnitřní úhly α_1, β_1, γ_1.

O úhlech $\triangle a_1b_1c_1$ platí, že

$$\alpha_1 = \frac{\beta + \gamma}{2} = \frac{\alpha'}{2}, \quad \beta_1 = \frac{\alpha + \gamma}{2} = \frac{\beta'}{2} \text{ a } \gamma_1 = \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{\gamma'}{2},$$

značí-li α', β', γ' vnější úhly $\triangle abc$.

Je-li ϱ poloměr vepsané kružnice do $\triangle abc$ a tudíž $\triangle a_1b_1c_1$ opsané, jest

$$a_1 = 2\varrho \cos \frac{\alpha}{2} = 2\varrho \sin \frac{\alpha'}{2}, \quad b_1 = 2\varrho \cos \frac{\beta}{2} = 2\varrho \sin \frac{\beta'}{2},$$

$$c_1 = 2\varrho \cos \frac{\gamma}{2} = 2\varrho \sin \frac{\gamma'}{2}, \qquad 1)$$

nebo

$$a_1 = 2(s-a)\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}},$$

$$b_1 = 2(s-b)\sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{ac}},$$

$$c_1 = 2(s-c)\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}},$$

kdež
$$s = \frac{a+b+c}{2}.$$

Poměr stran $\triangle\, a_1 b_1 c_1$ jest z rovnice 1.,

$$a_1 : b_1 : c_1 = \cos\frac{\alpha}{2} : \cos\frac{\beta}{2} : \cos\frac{\gamma}{2} = \sin\frac{\alpha'}{2} : \sin\frac{\beta'}{2} : \sin\frac{\gamma'}{2}$$

a poměr stran $\triangle\, abc$

$$a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma = \sin\alpha' : \sin\beta' : \sin\gamma',$$

tudíž

$$a : b : c = a_1 \cos\frac{\alpha'}{2} : b_1 \cos\frac{\beta'}{2} : c_1 \cos\frac{\gamma'}{2}$$

$$= a_1 \cos\alpha_1 : b_1 \cos\beta_1 : c \cos\gamma_1.$$

Plocha $\triangle\, a_1 b_1 c_1$ jest

$$\Delta_1 = \frac{a_1 . b_1}{2} \sin\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{a_1 . b_1}{2} \cos\frac{\gamma}{2},$$

nebo

$$\Delta_1 = \frac{2(s-a)(s-b)(s-c)}{abc} \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

tudíž

$$\Delta_1 = \frac{2(s-a)(s-b)(s-c)}{abc} \quad \Delta = \frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{2r},$$

kdež r značí poloměr opsané kružnice $\triangle\, abc$.

Sestrojme nad trojúhelníky abc a $a_1 b_1 c_1$ jehlany o téže výšce v tak, aby pata výšky byla v bodě o. Odchylka stěn pobočných prvního jehlanu budiž ω a odchylky stěn pobočných při druhém jehlanu buďtež postupně ω_{a_1}, ω_{b_1}, ω_{c_1}. (Úhly ω_{a_1},

ω_{b_1}, ω_{c_1} značí odchylky stěn položených stranami a_1, b_1, c_1 od základny $a_1 b_1 c_1$).

Pak jest

$$tg\,\omega = \frac{v}{\varrho},\quad tg\,\omega_{a_1} = \frac{v}{\varrho \sin \frac{1}{2}\alpha},\quad tg\,\omega_{b_1} = \frac{v}{\varrho \sin \frac{1}{2}\beta},$$
$$tg\,\omega_{c_1} = \frac{v}{\varrho \sin \frac{1}{2}\gamma},$$

nebo též

$$tg\,\omega_{a_1} = \frac{tg\,\omega}{\sin \frac{1}{2}\alpha},\quad tg\,\omega_{b_1} = \frac{tg\,\omega}{\sin \frac{1}{2}\beta},\quad tg\,\omega_{c_1} = \frac{tg\,\omega}{\sin \frac{1}{2}\gamma}, \tag{2}$$

pročež

$$tg\,\omega_{a_1} : tg\,\omega_{b_1} : tg\,\omega_{c_1} = \frac{1}{\sin \frac{1}{2}\alpha} : \frac{1}{\sin \frac{1}{2}\beta} : \frac{1}{\sin \frac{1}{2}\gamma}$$
$$= \frac{1}{\cos \alpha_1} : \frac{1}{\cos \beta_1} : \frac{1}{\cos \gamma_1}.$$

Jsou tudíž tangenty odchylek pobočných stěn proložených stranami trojúhelníka $a_1 b_1 c_1$ od základny Δ_1 v převráceném poměru s cosiny protějších úhlů těmto stranám.

Plášť prvého jehlanu jest

$$p = \frac{\Delta}{\cos \omega} = s\sqrt{v^2 + \varrho^2}$$

a plášť druhého jehlanu

$$p_1 = \frac{a_1\, \varrho \sin \frac{\alpha}{2}}{2 \cos \omega_{a_1}} + \frac{b_1\, \varrho \sin \frac{\beta}{2}}{2 \cos \omega_{b_1}} + \frac{c_1\, \varrho \sin \frac{\gamma}{2}}{2 \cos \omega_{c_1}}$$
$$= \frac{\varrho}{2}\left(\frac{a_1 \cos \alpha_1}{\cos \omega_{a_1}} + \frac{b_1 \cos \beta_1}{\cos \omega_{b_1}} + \frac{c_1 \cos \gamma_1}{\cos \omega_{c_1}}\right),$$

kdež jest

$$\cos \omega_{a_1} = \frac{\varrho \cos \alpha_1}{\sqrt{\varrho^2 \cos^2 \alpha_1 + v^2}},\quad \cos \omega_{b_1} = \frac{\varrho \cos \beta_1}{\sqrt{\varrho^2 \cos^2 \beta_1 + v^2}},$$
$$\cos \omega_{c_1} = \frac{\varrho \cos \gamma_1}{\sqrt{\varrho^2 \cos^2 \gamma_1 + v^2}},$$

pročež

$$p_1 = \tfrac{1}{2}\left(a_1 \sqrt{\varrho^2 \cos^2 \alpha_1 + v^2} + b_1 \sqrt{\varrho^2 \cos^2 \beta_1 + v^2}\right.$$
$$\left. + c_1 \sqrt{\varrho^2 \cos^2 \gamma_1 + v^2}\right).$$

Je-li dána odchylka ω_{a_1}, jsou odchylky ω_{b_1}, ω_{c_1} stanoveny rovnicemi

$$tg\,\omega_{b_1} = \frac{tg\,\omega_{a_1}\,cos\,\alpha_1}{cos\,\beta_1},\quad tg\,\omega_{c_1} = \frac{tg\,\omega_{a_1}\,cos\,\alpha_1}{cos\,\gamma_1}.$$

Odvození jich plyne z rovnice (2); jest totiž

$$\frac{tg\,\omega_{a_1}}{tg\,\omega_{b_1}} = \frac{sin\,\frac{\beta}{2}}{sin\,\frac{\alpha}{2}}$$

z čehož určíme $tg\,\omega_{b_1}$ a podobně i $tg\,\omega_{c_1}$.

Přihlédneme-li nyní také ke krychlovým obsahům obou jehlanů o základnách $\triangle$, $\triangle_1$, budou tyto stejné, když

$$\varDelta\,.\,v = \frac{2\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}{abc}\,\varDelta\,.\,v_1,$$

značí-li v a v_1 výšky obou jehlanů, pročež

$$v : v_1 = 2\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c) : abc.$$

Opíšeme-li $\triangle\,a_1b_1c_1$ kruh, jest poloměr opsaného kruhu

$$r_1 = \frac{a_1b_1c_1}{4\varDelta_1} = \frac{8\,[(s-a)\,(s-b)\,(s-c)]^2}{8\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)\,.\,\varDelta},$$

nebo též

$$r_1 = \frac{(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}{\varDelta} = \sqrt{\frac{(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}{s}} = \varrho.$$

Jest tudíž

$$r : \varrho = abc : 4\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c),$$

pročež

$$v : v_1 = \varrho : 2r.$$
