Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Antonín Libický

Úvod do vektorové analyse. [II.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 35 (1906), No. 4, 297--311

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121603

Úvod do vektorové analyse.

Napsal prof. **Ant. Libický**.

(Pokračování.)

Od takového vektoru **a** liší se podstatně vektor **c**, kterým představujeme vektoriální součin dvou vektorů. Inversí souřadnic nemění se na pravé straně výrazu (11) znaménka vektorů **i, j, k**; neboť stojí po řadě místo součinů

$$\mathbf{j} \times \mathbf{k} = (-\mathbf{j}) \times (-\mathbf{k}), \quad \mathbf{k} \times \mathbf{i} = -(\mathbf{k}) \times (-\mathbf{i}),$$
$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = (-\mathbf{i}) \times (-\mathbf{j}).$$

Tudíž znaménka složek vektoru **c** zůstávají nezměněna.

Musíme tudíž rozeznávati dvojí druh vektorů: 1. vektory *polární*, jichž složky inversí souřadnic proměňují svá znaménka v protivná; 2. vektory *axiální*, jichž složky při přechodu od soustavy v pravo točivé k soustavě v levo točivé svých znamének nemění. Příkladem polárních vektorů jest translace; k axiálním vektorům náleží na př. otáčecí rychlost libovolného bodu neproměnné soustavy opatřené pevným bodem.

III. **Součin dyadický** *) dvou vektorů **a** a **b** jest určen, známe-li běhy obou činitelů a součin ab jejich velikostí. Označujeme jej, píšeme-li činitele prostě vedle sebe nekladouce mezi ně žádného znaménka, tedy **ab.**

Dva dyadické součiny **ab** a **a′b′** se sobě rovnají, jsou-li rovnoběžnými jednak vektory **a** a **a′**, jednak vektory **b** a **b′** a rovná-li se součin ab z velikostí obou činitelů prvního součinu dyadického součinu $a'b'$ z velikostí činitelů druhého součinu dyadického.

*) Gibbs nazývá jej *neurčitým* (viz Gibbs-Wilson: Vector analysis, pag. 271), Fischer *geometrickým* (Vectordifferentiation und Vectorintegration, pag. 3).

Jak se snadno přesvědčíme, určuje součin dyadický dvou vektorů čili krátce řečeno *dyadu* pět částek určovacích.

Daným součinem $\mathbf{ab}$ stanoveny jsou také součin skalární týchž vektorů $\mathbf{a}.\mathbf{b} = ab \cos \widehat{\mathbf{ab}}$ jakož i jejich součin vektoriální $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (ab \sin \widehat{\mathbf{ab}})\mathbf{c}_1$; neboť je-li dán dyadický součin, určeny jsou dle výměru jeho i součin ab i úhel $\widehat{\mathbf{ab}}$. Oba součiny $\mathbf{a}.\mathbf{b}$ a $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ jsou funkcemi dyady $\mathbf{ab}$.

Naopak však součiny $\mathbf{a}.\mathbf{b}$ a $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ není dyada $\mathbf{ab}$ úplně určena; zastupuje totiž $\mathbf{a}.\mathbf{b}$ jednu, $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ tři určovací částky, dohromady oba součiny čtyři částky, jež nestačí k určení dyady $\mathbf{ab}$.

Jest pak $\mathbf{a}.\mathbf{b}$ *skalární částí* dyadického součinu a $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ jeho *vektoriální částí.*

Je-li $\mathbf{ab} = \mathbf{a}'\mathbf{b}'$, musí též

$$\mathbf{a}.\mathbf{b} = \mathbf{a}'.\mathbf{b}' \text{ a } \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{a}' \times \mathbf{b}'.$$

O součinu dyadickém neplatí obecně zákon kommutativní, $\mathbf{ba}$ nerovná se $\mathbf{ab}$. Součiny $\mathbf{ab}$ a $\mathbf{ba}$ zoveme *sdruženými* a znamenáme někdy $\mathbf{ba} = (\mathbf{ab})_C$.

Budiž m libovolný skalár, i platí

$$(m\mathbf{a})\mathbf{b} = \mathbf{a}(m\mathbf{b}) = m\mathbf{ab},$$

t. j. násobení dyadické jest vzhledem k veličinám skalárním associativní.

Zákon distributivní, tento základní zákon každého násobení, přisuzujeme ovšem také násobení dyadickému; klademe tedy

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b})\mathbf{c} = \mathbf{ac} + \mathbf{bc},$$
$$\mathbf{a}(\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{ab} + \mathbf{ac},$$

a obecně

$$\begin{aligned}(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \ldots)(\mathbf{p} + \mathbf{q} + \ldots) = {} & \mathbf{ap} + \mathbf{aq} + \ldots \\ & + \mathbf{bp} + \mathbf{bq} + \ldots \\ & + \ldots\ldots\ldots,\end{aligned}$$

při čemž musíme dbáti náležitého pořádku činitelů.

Na pravé straně těchto rovnic vyskytují se součty několika dyad; výrazy toho tvaru nazývejme *mnohočleny dyadovými.* *)

*) Gibbs jmenuje je *dyadic.*

Znamenáme je často jediným velkým písmenem řeckým; píšeme tedy na př.

$$\Phi = \mathbf{a}_1\mathbf{b}_1 + \mathbf{a}_2\mathbf{b}_2 + \mathbf{a}_3\mathbf{b}_3 + \ldots$$

Vektory $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ atd. jsou předními členy, $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, $\mathbf{b}_3$ atd. zadními členy dyadového-mnohočlenu.

Každému mnohočlenu dyadovému přísluší opět část skalární

$$\Phi_s = \mathbf{a}_1 . \mathbf{b}_1 + \mathbf{a}_2 . \mathbf{b}_2 + \mathbf{a}_3 . \mathbf{b}_3 + \ldots$$

a část vektoriální

$$\Phi_v = \mathbf{a}_1 \times \mathbf{b}_1 + \mathbf{a}_2 \times \mathbf{b}_2 + \mathbf{a}_3 \times \mathbf{b}_3 + \ldots$$

Je-li $\Phi = \Omega$, jest $\Phi_s = \Omega_s$, $\Phi_v = \Omega_v$.

Mnohočleny dyadové $\Phi = \mathbf{a}_1\mathbf{b}_1 + \mathbf{a}_2\mathbf{b}_2 + \mathbf{a}_3\mathbf{b}_3 + \ldots$,
$\Psi = \mathbf{b}_1\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_2\mathbf{a}_2 + \mathbf{b}_3\mathbf{a}_3 + \ldots$

slovou *sdruženými*. Že jest Φ sdružen ku Ψ, označujeme rovnicí $\Phi = \Psi_C$; pak jest též $\Psi = \Phi_C$.

Jsou-li dány vektory $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$ výrazy

$$\mathbf{a} = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k},$$
$$\mathbf{b} = x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k},$$

jest jejich dyadický součin

$$\mathbf{ab} = (x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k})(x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k})$$

nebo

$$\begin{aligned}\mathbf{ab} = {} & x_1x_2\mathbf{ii} + x_1y_2\mathbf{ij} + x_1z_2\mathbf{ik} \\ & + y_1x_2\mathbf{ji} + y_1y_2\mathbf{jj} + y_1z_2\mathbf{jk} \\ & + z_1x_2\mathbf{ki} + z_1y_2\mathbf{kj} + z_1z_2\mathbf{kk}.\end{aligned} \tag{12}$$

Tato forma dyadického součinu zove se *nonion*; devět dyadických součinů základních vektorů jednotkových, jež se v ní vyskytují, nazývejme *základními dyadami*.

Pro součin $\mathbf{ba}$, sdružený k $\mathbf{ab}$, obdržíme podobným způsobem

$$\begin{aligned}\mathbf{ba} = (\mathbf{ab})_C = {} & (x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k})(x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}) \\ = {} & x_1x_2\mathbf{ii} + y_1x_2\mathbf{ij} + z_1x_2\mathbf{ik} \\ & + x_1y_2\mathbf{ji} + y_1y_2\mathbf{jj} + z_1y_2\mathbf{jk} \\ & + x_1z_2\mathbf{ki} + y_1z_2\mathbf{kj} + z_1z_2\mathbf{kk}.\end{aligned} \tag{12a}$$

Na tvar nonionu lze snadno převésti každý mnohočlen dyadový; obdržíme pak proň obecně výraz

$$\begin{aligned}\Phi = a_{11}\mathbf{ii} + a_{12}\mathbf{ij} + a_{13}\mathbf{ik}\\ + a_{21}\mathbf{ji} + a_{22}\mathbf{jj} + a_{23}\mathbf{jk}\\ + a_{31}\mathbf{ki} + a_{32}\mathbf{kj} + a_{33}\mathbf{kk},\end{aligned} \tag{13^a}$$

místo čehož píšeme kratčeji

$$\begin{aligned}\Phi = a_{11},\ a_{12},\ a_{13}\\ a_{21},\ a_{22},\ a_{23}\\ a_{31},\ a_{32},\ a_{33}.\end{aligned} \tag{13^b}$$

Jest však též, vytkneme-li v prvním řádku na pravé straně rovnice (13ᵃ) **i**, ve druhém **j**, ve třetím **k**:

$$\begin{aligned}\Phi = \mathbf{i}\,(a_{11}\mathbf{i} + a_{12}\mathbf{j} + a_{13}\mathbf{k}) + \mathbf{j}\,(a_{21}\mathbf{i} + a_{22}\mathbf{j} + a_{23}\mathbf{k})\\ + \mathbf{k}\,(a_{31}\mathbf{i} + a_{32}\mathbf{j} + a_{33}\mathbf{k});\end{aligned}$$

kladouce na pravé straně

$$\begin{aligned}\mathbf{l} &= a_{11}\mathbf{i} + a_{12}\mathbf{j} + a_{13}\mathbf{k},\\ \mathbf{m} &= a_{21}\mathbf{i} + a_{22}\mathbf{j} + a_{23}\mathbf{k},\\ \mathbf{n} &= a_{31}\mathbf{i} + a_{32}\mathbf{j} + a_{33}\mathbf{k},\end{aligned}$$

nabudeme

$$\Phi = \mathbf{il} + \mathbf{jm} + \mathbf{kn},$$

t. j. mnohočlen dyadový o libovolném počtu sčítanců lze vždy vyjádřiti dyadovým trojčlenem; přední členy jeho **i**, **j**, **k** lze voliti libovolně, při čemž může býti upuštěno i od podmínky, že mají státi vzájemně na sobě kolmo (nesmí však býti konplanární, t. j. k téže rovině rovnoběžné). Podobně lze ukázati, že můžeme zadní členy takového trojčlenu voliti libovolně; nelze však voliti zároveň i přední i zadní členy jeho.

Ve zvláštních případech může se mnohočlen dyadový vyjádřiti také dvojčlenem nebo jednočlenem; dle toho rozeznáváme

mnohočleny dyadové $\left\{\begin{array}{l}\textit{úplné}\\ \textit{planárné}\\ \textit{lineárné}\end{array}\right\}$, lze-li je totiž redukovati na $\left\{\begin{array}{l}\text{trojčleny}\\ \text{dvojčleny}\\ \text{jednočleny}\end{array}\right\}$.

Úplný mnohočlen dyadový jest dle toho určen třemi vektory anebo devíti skaláry.

Pro mnohočlen dyadový Ψ, sdružený k mnohočlenu Φ, obdržíme, přihlížejíce ke vzorcům (12) a (12[a]), tvar

$$\begin{aligned}\Psi = \Phi_C = a_{11},\ & a_{21},\ a_{31}\\ a_{12},\ & a_{22},\ a_{32}\\ a_{13},\ & a_{23},\ a_{33}.\end{aligned}$$

Jestliže ve zvláštním případu $a_{21} = a_{12}$, $a_{31} = a_{13}$, $a_{32} = a_{23}$, jest $\Phi_C = \Phi$ a mnohočlen dyadový zove se *samosdruženým* anebo *symmetrickým*. Je-li však $a_{21} = -a_{12}$, $a_{31} = -a_{13}$, $a_{32} = -a_{23}$, jest $\Phi_C = -\Phi$ a mnohočlen zove se *antisymmetrickým*.

Zvláštní důležitost má mnohočlen dyadový tvaru

$$\mathbf{ii} + \mathbf{jj} + \mathbf{kk};$$

znamenáme jej písmenem **I** a jmenujeme *idemfaktorem* čili *jednotkovým mnohočlenem dyadovým*. Jeho skalární část

$$\mathbf{i}\,.\,\mathbf{i} + \mathbf{j}\,.\,\mathbf{j} + \mathbf{k}\,.\,\mathbf{k} = 3$$

(dle (5)) a jeho vektoriální část rovná se nulle (dle (10)).

Součiny tří a čtyř vektorů. Přihlížejíce nejprve jen k násobení skalárnímu a vektoriálnímu, obdržíme pro součiny tří vektorů tyto tvary:

1. $(\mathbf{a}\,.\,\mathbf{b})\,.\,\mathbf{c}$,	5. $\mathbf{a}\,.\,(\mathbf{b}\,.\,\mathbf{c})$,
2. $(\mathbf{a}\,.\,\mathbf{b}) \times \mathbf{c}$,	6. $\mathbf{a} \times (\mathbf{b}\,.\,\mathbf{c})$,
3. $[\mathbf{a} \times \mathbf{b}]\,.\,\mathbf{c}$,	7. $\mathbf{a}\,.\,[\mathbf{b} \times \mathbf{c}]$,
4. $[\mathbf{a} \times \mathbf{b}] \times \mathbf{c}$,	8. $\mathbf{a} \times [\mathbf{b} \times \mathbf{c}]$.

V těchto výrazech uzavíráme součiny skalární dvou činitelů do závorek tvaru ( ) a součiny vektoriální do závorek tvaru [ ].

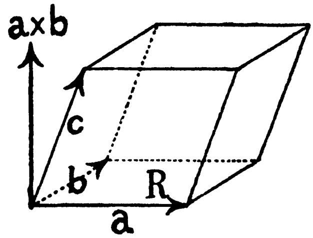
Případy 2) a 6) jsou nemožné, neboť nelze násobiti vektoriálně skalár $(\mathbf{a}\,.\,\mathbf{b})$ vektorem $\mathbf{c}$ a naopak.

Případy 1) a 5) neposkytují obtíží; $(\mathbf{a}\,.\,\mathbf{b})\,.\,\mathbf{c}$ jest patrně vektor téhož běhu jako $\mathbf{c}$, jehož skalární část rovná se $(\mathbf{a}\,.\,\mathbf{b})$-násobné skalární části vektoru $\mathbf{c}$. A podobný význam má $\mathbf{a}\,.\,(\mathbf{b}\,.\,\mathbf{c})$.

Poněvadž vektor $(\mathbf{a}\,.\,\mathbf{b})\,.\,\mathbf{c}$ má tvar $m\mathbf{c}$, bude dovoleno psáti místo $(\mathbf{a}\,.\,\mathbf{b})\,.\,\mathbf{c}$ jednodušeji $(\mathbf{a}\,.\,\mathbf{b})\,\mathbf{c}$.

Zbývají tedy případy 3), 4), 7), 8); z těch probéřeme nejprve skalární součiny $[\mathbf{a} \times \mathbf{b}]\,.\,\mathbf{c}$ a $\mathbf{a}\,.\,[\mathbf{b} \times \mathbf{c}]$.

V prvém součin $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ jest určen plochou rovnoběžníka, jehož sousední strany jsou $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$ (obr. 7.); příslušející jemu vektor **p** stojí kolmo na rovinu R tohoto rovnoběžníka. Vektory **a**, **b**, **c**, z jednoho bodu vycházejícími, dány jsou osy souřadné soustavy kosoúhelné, jež může býti buď v pravo nebo v levo točivá. V případě prvém směřuje vektor **p** na stranu prostoru, v níž se nalézá vektor **c**; v případě druhém jsou oba tyto vektory na stranách protivných.



Obr. 7.

Abychom obdrželi hodnotu součinu $[\mathbf{a} \times \mathbf{b}] \cdot \mathbf{c}$, násobíme plochu rovnoběžníka $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ délkou průmětu vektoru **c** na běh kolmice k rovině R; tudíž hledaný součin dán jest obsahem rovnoběžnostěnu, jehož tři hrany sousední jsou vektory **a**, **b**, **c**.

Obsah ten je $\left\{\begin{matrix}\text{kladný}\\ \text{záporný}\end{matrix}\right\}$, náleží-li činitelé součinu soustavě $\left\{\begin{matrix}\text{v pravo}\\ \text{v levo}\end{matrix}\right\}$ točivé.

Skalár vyjadřující tento součin má tedy vlastnost, že změní své znaménko, provede-li se inverse souřadnic, čili přejdeme-li od soustavy v pravo točivé k soustavě v levo točivé. Skaláry toho druhu jmenujeme *pseudoskaláry*.

Násobíme-li $\left\{\begin{matrix}\text{polární}\\ \text{axiální}\end{matrix}\right\}$ vektor pseudoskalárem, stává se vektorem $\left\{\begin{matrix}\text{axiálním}\\ \text{polárním}\end{matrix}\right\}$.

Snadno se přesvědčíme, že také $\mathbf{a} \cdot [\mathbf{b} \times \mathbf{c}]$ jest obsahem rovnoběžnostěnu, sestrojeného z vektorů **a**, **b**, **c**; tudíž

$$[\mathbf{a} \times \mathbf{b}] \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot [\mathbf{b} \times \mathbf{c}]. \qquad (14)$$

O součinu $[\mathbf{a} \times \mathbf{b}] . \mathbf{c}$ dokážeme dále relaci

$$[\mathbf{a} \times \mathbf{b}] . \mathbf{c} = [\mathbf{b} \times \mathbf{c}] . \mathbf{a} = [\mathbf{c} \times \mathbf{a}] . \mathbf{b},$$

uvážíce, že každým z těchto tří součinů vyjádřen jest obsah téhož rovnoběžnostěnu o hranách $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ s týmž znaménkem.

Tudíž v součinu $[\mathbf{a} \times \mathbf{b}] . \mathbf{c}$ lze provésti cyklickou záměnu všech činitelů, aniž se změní hodnota jeho. Podobně platí

$$\mathbf{a} . [\mathbf{b} \times \mathbf{c}] = \mathbf{b} . [\mathbf{c} \times \mathbf{a}] = \mathbf{c} . [\mathbf{a} \times \mathbf{b}].$$

Jest obvyklo znamenati součin $[\mathbf{a} \times \mathbf{b}] . \mathbf{c}$ anebo každý ze šesti součinů jemu rovných krátce $(\mathbf{abc})$ a jmenovati jej *skalárním součinem tří vektorů.*

Znaménko toho součinu promění se v protivné, vyměníme-li kterékoli dva jeho činitele; na př.

$$(\mathbf{abc}) = -(\mathbf{acb}) = -(\mathbf{cba}) \text{ atd.}$$

Jsou-li tři vektory konplanární (t. j. k téže rovině rovnoběžny), rovná se jejich skalární součin patrně nulle; a naopak.

Podmínkou, aby tři vektory byly konplanární, jest

$$(\mathbf{abc}) = 0.$$

Z toho plyne, že součin skalární, jehož dva činitelé jsou rovnoběžny, roven jest nulle; neboť tři vektory, z nichž dva jsou rovnoběžny, jsou vždy konplanární.

O skalárním součinu tří základních vektorů jednotkových platí

$$(\mathbf{ijk}) = 1;$$

též můžeme psáti

$$(\mathbf{iij}) = (\mathbf{ijj}) \ldots = 0.$$

Je-li

$$\mathbf{a} = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k},$$
$$\mathbf{b} = x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k},$$
$$\mathbf{c} = x_3\mathbf{i} + y_3\mathbf{j} + z_3\mathbf{k},$$

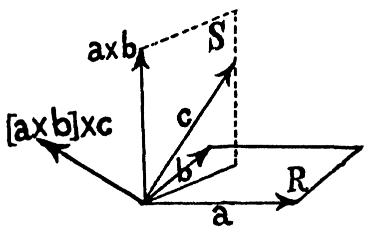
bude dle předcházejících vztahů

$$(\mathbf{abc}) = x_1y_2z_3 + x_2y_3z_1 + x_3y_1z_2 - x_1y_3z_2 - x_2y_1z_3 - x_3y_2z_1$$

čili

$$(\mathbf{abc}) = \begin{vmatrix} x_1, & y_1, & z_1 \\ x_2, & y_2, & z_2 \\ x_3, & y_3, & z_3 \end{vmatrix}. \qquad (15)$$

Dalším důležitým součinem jest $[\mathbf{a} \times \mathbf{b}] \times \mathbf{c}$, zvaný *vektoriálním součinem tří vektorů.* Součin $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ jest opět představen vektorem $\mathbf{p}$, kolmým k rovině R vektorů $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$ (obr. 8.); rovina S položená vektory $\mathbf{p}$ a $\mathbf{c}$ jest tudíž kolmo ku R. Součin $[\mathbf{a} \times \mathbf{b}] \times \mathbf{c}$ vyjádřen jest tudíž vektorem kolmým k rovině S; dle známé věty stereometrické, že všechny kolmice, jež lze vztyčiti v jednom bodě ku přímce, leží v jediné rovině, jest vektor ten položený v R, a to kolmo k průmětu vektoru $\mathbf{c}$ na tuto rovinu.



Obr. 8.

Budiž opět

$$\mathbf{a} = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k},$$
$$\mathbf{b} = x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k},$$
$$\mathbf{c} = x_3\mathbf{i} + y_3\mathbf{j} + z_3\mathbf{k};$$

i bude dle (11)

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (y_1z_2 - z_1y_2)\,\mathbf{i} + (z_1x_2 - x_1z_2)\,\mathbf{j} + (x_1y_2 - y_1x_2)\,\mathbf{k}$$

a podobně

$$\begin{aligned}[\mathbf{a} \times \mathbf{b}] \times \mathbf{c} = & (z_1x_2z_3 - x_1z_2z_3 - x_1y_2y_3 + y_1x_2y_3)\,\mathbf{i} \\ & + (x_1y_2x_3 - y_1x_2x_3 - y_1z_2z_3 + z_1y_2z_3)\,\mathbf{j} \\ & + (y_1z_2y_3 - z_1y_2y_3 - z_1x_2x_3 + x_1z_2z_3)\,\mathbf{k}.\end{aligned}$$

Přičteme-li a odečteme-li v prvním členu na pravé straně této rovnice $x_1x_2x_3\,\mathbf{i}$, ve druhém členu $y_1y_2y_3\,\mathbf{j}$, ve třetím členu $z_1z_2z_3\,\mathbf{k}$, nabudeme

$$\begin{aligned}[\mathbf{a} \times \mathbf{b}] \times \mathbf{c} \\ = & \big(x_2\,(x_1x_3 + y_1y_3 + z_1z_3) - x_1\,(x_2x_3 + y_2y_3 + z_2z_3)\big)\,\mathbf{i} \\ & + \big(y_2\,(x_1x_3 + y_1y_3 + z_1z_3) - y_1\,(x_2x_3 + y_2y_3 + z_2z_3)\big)\,\mathbf{j} \\ & + \big(z_2\,(x_1x_3 + y_1y_3 + z_1z_3) - z_1\,(x_2x_3 + y_2y_3 + z_2z_3)\big)\,\mathbf{k}.\end{aligned}$$

Dle (6) jest však

$$x_1x_3 + y_1y_3 + z_1z_3 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c},$$
$$x_2x_3 + y_2y_3 + z_2z_3 = \mathbf{b} \cdot \mathbf{c};$$

tudíž

$$[\mathbf{a} \times \mathbf{b}] \times \mathbf{c}$$
$$= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}) - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})(x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}),$$

čili

$$[\mathbf{a} \times \mathbf{b}] \times \mathbf{c} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\,\mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\,\mathbf{a}. \qquad (16^a)$$

Podobný význam jako $[\mathbf{a} \times \mathbf{b}] \times \mathbf{c}$ má součin $\mathbf{a} \times [\mathbf{b} \times \mathbf{c}]$; jest to vektor ležící v rovině vektorů **b** a **c** kolmo k průmětu vektoru **a** na touž rovinu. Obdobným způsobem vyvodíme proň vzorec

$$\mathbf{a} \times [\mathbf{b} \times \mathbf{c}] = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\,\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\,\mathbf{c}. \qquad (16^b)$$

Skalární a vektoriální součiny o *čtyřech* vektorech převádíme na právě probrané součiny tří vektorů. Prvním příkladem nám buď součin

$$[\mathbf{a} \times \mathbf{b}] \cdot [\mathbf{c} \times \mathbf{d}];$$

položme $[\mathbf{c} \times \mathbf{d}] = \mathbf{e}$, i jest dle (14)

$$[\mathbf{a} \times \mathbf{b}] \cdot \mathbf{e} = \mathbf{a} \cdot [\mathbf{b} \times \mathbf{e}].$$

Pro $\mathbf{b} \times \mathbf{e}$ obdržíme však dle (16^a)

$$\mathbf{b} \times \mathbf{e} = \mathbf{b} \times [\mathbf{c} \times \mathbf{d}] = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{d})\,\mathbf{c} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\,\mathbf{d},$$

tudíž

$$[\mathbf{a} \times \mathbf{b}] \cdot [\mathbf{c} \times \mathbf{d}] = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}). \qquad (17)$$

Podobně určíme hodnotu součinu

$$[\mathbf{a} \times \mathbf{b}] \times [\mathbf{c} \times \mathbf{d}];$$

položíme-li jako výše $[\mathbf{c} \times \mathbf{d}] = \mathbf{e}$, dostaneme dle (16^a)

$$[\mathbf{a} \times \mathbf{b}] \times \mathbf{e} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{e})\,\mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{e})\,\mathbf{a}.$$

Zavedouce v této rovnici opět $[\mathbf{c} \times \mathbf{d}]$ místo **e**, nabudeme

$$[\mathbf{a} \times \mathbf{b}] \times [\mathbf{c} \times \mathbf{d}] = (\mathbf{a} \cdot [\mathbf{c} \times \mathbf{d}])\,\mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot [\mathbf{c} \times \mathbf{d}])\,\mathbf{a},$$

čili

$$[\mathbf{a} \times \mathbf{b}] \times [\mathbf{c} \times \mathbf{d}] = (\mathbf{acd})\,\mathbf{b} - (\mathbf{bcd})\,\mathbf{a}. \qquad (18^a)$$

Kdybychom byli položili v součinu $[\mathbf{a} \times \mathbf{b}] \times [\mathbf{c} \times \mathbf{d}]$ místo $[\mathbf{a} \times \mathbf{b}]$ pomocný vektor **f**, obdrželi bychom podobným výpočtem vzorec

$$[\mathbf{a} \times \mathbf{b}] \times [\mathbf{c} \times \mathbf{d}] = (\mathbf{abd})\,\mathbf{c} - (\mathbf{abc})\,\mathbf{d}. \qquad (18^b)$$

Srovnáme-li oba výsledky, obdržíme rovnici se skalárními součiniteli:

$$(\mathbf{bcd})\,\mathbf{a} - (\mathbf{acd})\,\mathbf{b} + (\mathbf{abd})\,\mathbf{c} - (\mathbf{abc})\,\mathbf{d} = 0,$$

čili, poněvadž $(\mathbf{acd}) = -(\mathbf{cad})$, též

$$(\mathbf{abc})\,\mathbf{d} = (\mathbf{bcd})\,\mathbf{a} + (\mathbf{cad})\,\mathbf{b} + (\mathbf{abd})\,\mathbf{c}, \tag{19}$$

kteréž rovnici musí vyhovovati kterékoli čtyři vektory **a**, **b**, **c**, **d**.

Přejdeme-li nyní k dyadickým součinům, shledáváme, že má zvláštní důležitost skalární součin z dyadického součinu **ab** a z vektoru **r**. Sluší tu rozeznávati dva případy: buď jest v takovém skalárním součinu činitel **ab** na prvém místě (pak sluje *praefaktorem*), anebo jest na druhém místě (pak sluje *postfaktorem*).

Význam těchto součinů jest tento: $(\mathbf{ab}) \,.\, \mathbf{r}$ značí vektor téhož běhu, jaký má přední člen **a** dyady; skalární část tohoto vektoru jest součin $\mathbf{b} \,.\, \mathbf{r}$. Tudíž můžeme psáti, zachovávajíce abecední pořádek:

$$(\mathbf{ab}) \,.\, \mathbf{r} = \mathbf{a}\,(\mathbf{b} \,.\, \mathbf{r}). \tag{20^a}$$

Součin $\mathbf{r} \,.\, (\mathbf{ab})$ značí však vektor téhož běhu, jaký má zadní člen **b** dyady; skalární část tohoto vektoru jest součin $\mathbf{r} \,.\, \mathbf{a}$. Tudíž jest

$$\mathbf{r} \,.\, (\mathbf{ab}) = (\mathbf{r} \,.\, \mathbf{a})\,\mathbf{b}. \tag{20^b}$$

Z rovnic

$$(\mathbf{ab}) \,.\, \mathbf{r} = \mathbf{a}\,(\mathbf{b} \,.\, \mathbf{r}) = (\mathbf{b} \,.\, \mathbf{r})\,\mathbf{a} = (\mathbf{r} \,.\, \mathbf{b})\,\mathbf{a} = \mathbf{r} \,.\, (\mathbf{ba}) = \mathbf{r} \,.\, (\mathbf{ab})_C$$

plyne věta: Obdržíme týž výsledek, násobíme-li dyadu (jako praefaktor) vektorem anebo násobíme-li vektor sdruženou dyadou (jako postfaktorem).

Z toho, co bylo pověděno o významu součinu $(\mathbf{ab}) \,.\, \mathbf{r}$ (dle 20[a]), jest zřejmo, že jest možno pokládati **ab** za jakýsi operator, kterým lze převésti vektor **r** do polohy vektoru **a** (předního členu dyady), při čemž také velikost jeho určitým způsobem měníme. Podobně (dle 20[b]) postfaktor **ab** převádí vektor **r** do polohy vektoru **b** (zadního členu dyady). Nový vektor rovná se nulle, jestliže v $\left\{\begin{matrix}\text{prvém}\\ \text{druhém}\end{matrix}\right\}$ případě vektor **r** stojí kolmo na $\left\{\begin{matrix}\mathbf{b}\\ \mathbf{a}\end{matrix}\right\}$; neboť skalární součin dvou vektorů, jež stojí na sobě kolmo, rovná se nulle.

Kdežto dyada (lineární) jako praefaktor proměňuje různé vektory **c** ve vektory o témž běhu **a**, redukuje planární mnohočlen dyadový či planární dyada (je-li praefaktorem), na př. **ip** + **jq** všechny vektory **r** v prostoru na vektory rovnoběžné k rovině vektorů **i** a **j**. Neboť

$$(\mathbf{ip} + \mathbf{jq}) \,.\, \mathbf{r} = (\mathbf{ip}) \,.\, \mathbf{r} + (\mathbf{jq}) \,.\, \mathbf{r} = \mathbf{i}\,(\mathbf{p} \,.\, \mathbf{r}) + \mathbf{j}\,(\mathbf{q} \,.\, \mathbf{r}),$$

což jest vektor tvaru $x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$, tedy položený v rovině vektorů **i** a **j**. A podobně, je-li planární dyada postfaktorem, dostaneme

$$\mathbf{r} \,.\, (\mathbf{ip} + \mathbf{jq}) = (\mathbf{r} \,.\, \mathbf{i})\,\mathbf{p} + (\mathbf{r} \,.\, \mathbf{j})\,\mathbf{q},$$

tedy vektor v rovině vektorů **p** a **q**.

Konečně úplný mnohočlen dyadový či dyada úplná proměňuje vektor **r** v jiný vektor **s** v prostoru; obdržímeť pak

$$(\mathbf{il} + \mathbf{jm} + \mathbf{kn}) \,.\, \mathbf{r} = \mathbf{i}\,(\mathbf{l} \,.\, \mathbf{r}) + \mathbf{j}\,(\mathbf{m} \,.\, \mathbf{r}) + \mathbf{k}\,(\mathbf{n} \,.\, \mathbf{r}), \qquad (21^a)$$

tedy vektor tvaru $x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Nebo

$$\mathbf{r} \,.\, (\mathbf{il} + \mathbf{jm} + \mathbf{kn}) = (\mathbf{r} \,.\, \mathbf{i})\,\mathbf{l} + (\mathbf{r} \,.\, \mathbf{j})\,\mathbf{m} + (\mathbf{r} \,.\, \mathbf{k})\,\mathbf{n}. \qquad (21^b)$$

Sluší podotknouti, že uvedená věta o rovnosti dvou skalárních součinů dyady a vektoru, z nichž v prvém dyada jest praefaktorem, ve druhém sdružená dyada postfaktorem, platí i tenkráte, nahradíme-li lineární dyadu úplným mnohočlenem dyadovým.

Analogicky ke skalárnímu součinu dyady a vektoru nebo vektoru a dyady (vzorce (20^a) a (20^b)) definujeme vektoriální součiny těchto útvarů, kladouce totiž

$$(\mathbf{ab}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a}\,(\mathbf{b} \times \mathbf{c}), \qquad (22^a)$$

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{bc}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b})\,\mathbf{c}; \qquad (22^b)$$

v obou případech výsledkem jest dyada.

Podíly dvou vektorů. Někteří pěstitelé vektorové analyse (na př. Gibbs, Föppl atd.) vyhýbají se podílům dvou vektorů a některým jiným pojmům na nich založeným, zavádějíce místo nich jiné operatory, jež níže poznáme; V. Fischer ukázal ve zmíněném již spise: „Vektordifferentiation und Vektorintegration“, že lze s výhodou použíti pojmu podílu dvou vektorů, aby byl základem počtu differenciálního, vztahujícího se k vektorům.

Definujme: Zvratná hodnota vektoru jest vektor téhož běhu, jehož velikost rovná se zvratné hodnotě velikosti daného vektoru. Je-li tudíž $\mathfrak{a} = a\mathfrak{a}_1$, bude

$$\frac{1}{\mathfrak{a}} = \frac{1}{a}\mathfrak{a}_1. \tag{23^a}$$

Pro jednotkový vektor platí

$$\frac{1}{\mathfrak{a}_1} = \mathfrak{a}_1. \tag{23^b}$$

Dále zaveďme výměr: Každé dělení (skalární nebo vektoriální nebo dyadické) jest násobením dělence zvratnou hodnotou dělitele. Tedy podíl skalární jest

$$\frac{\mathfrak{a}\,.}{\mathfrak{b}} = \mathfrak{a}\,.\,\frac{1}{\mathfrak{b}},$$

podíl vektoriální

$$\frac{\mathfrak{a}\times}{\mathfrak{b}} = \mathfrak{a}\times\frac{1}{\mathfrak{b}},$$

a podíl dyadický

$$\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}} = \mathfrak{a}\,\frac{1}{\mathfrak{b}}.$$

Dle rovnic (2) a (7) můžeme psáti

$$\frac{\mathfrak{a}\,.}{\mathfrak{b}} = \frac{a}{b}\cos\widehat{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}, \tag{24^a}$$

$$\frac{\mathfrak{a}\times}{\mathfrak{b}} = \left(\frac{a}{b}\sin\widehat{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}\right)\mathfrak{c}_1; \tag{24^b}$$

podíl $\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}}$ jest pak dán, známe-li směry obou vektorů $\mathfrak{a}$ a $\mathfrak{b}$ a podíl jejich velikostí $\frac{a}{b}$. Sdruženou hodnotu tohoto podílu $\mathfrak{b}\,\frac{1}{\mathfrak{a}}$ označujeme $\left(\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}}\right)_c$.

Pole skalární.

Bod M v prostoru stanovíme průvodičem $\mathbf{r}$, vedeným k tomu bodu z libovolného pevného počátku O; průvodič ten lze psáti buď ve tvaru $\mathbf{r} = r\mathbf{r}_1$ aneb, zavedeme-li pravoúhlou soustavu souřadnic v pravo točivou, ve tvaru

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = \mathbf{x} + \mathbf{y} + \mathbf{z}.$$

Představme si nyní, že každému bodu M v prostoru přísluší jediná určitá hodnota skalární veličiny, která se mění nepřetržitě, přejdeme-li od bodu M k bodům neskonale blízkým. Z tohoto ustanovení mohou býti vyjmuty jednotlivé body, čáry nebo plochy, v nichž objevuje se přetržitost těchto skalárních hodnot.

Část prostoru (rozprostírající se v konečnu nebo do nekonečna), v níž jakási skalární veličina se mění nepřetržitě, mění-li se spojitě poloha bodu v tom prostoru, nazývá se *polem skalárním*. Příklady takových polí jsou: prostor vyplněný hmotou nestejnorodou, v jehož každém bodě jest jiná hustota; pole tepelné, v němž každému bodu přísluší jiná teplota atd.

Veličinu skalární, proměnlivou od bodu k bodu, označujeme písmenem v; i závisí v na poloze bodu v prostoru, jest funkcí průvodiče $\mathbf{r}$, kterým tuto polohu stanovíme. Vyznačujeme tuto závislost rovnicí

$$v = f(\mathbf{r}).$$

Jestliže ve zvláštním případě rozdělení skalární veličiny v v poli jest takové, že rozdíl hodnot v_1 a v_2, jichž tato veličina nabývá v počátečním a v koncovém bodě libovolné úsečky, nezávisí na poloze jejího počátku, nýbrž jenom na délce a na běhu úsečky, slove pole *stejnorodým*.

Pro geometrii pole skalárního mají zvláštní důležitost: differenciální poměr skaláru v dle jiného skaláru, jehož funkcí v jest, a differenciální poměr skaláru v dle jakéhosi vektoru.

V prvním z těchto poměrů bývá proměnnou často skalární část r průvodiče, která jest opět funkcí souřadnic x, y, z; pak jest differenciální poměr skaláru v dle této proměnné dán vzorcem

$$\frac{dv}{dr} = \frac{\partial v}{\partial x}\frac{dx}{dr} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{dy}{dr} + \frac{\partial v}{\partial z}\frac{dz}{dr}. \tag{25}$$

Differenciálními poměry $\frac{dx}{dr}$, $\frac{dy}{dr}$, $\frac{dz}{dr}$ stanoveny jsou cosiny úhlů, jež tvoří průvodič po řadě s osami souřadnými; pro tyto cosiny platí dle (4) hodnoty

$$\frac{dx}{dr} = \mathbf{i} \,.\, \mathbf{r}_1, \quad \frac{dy}{dr} = \mathbf{j} \,.\, \mathbf{r}_1, \quad \frac{dz}{dr} = \mathbf{k} \,.\, \mathbf{r}_1,$$

tudíž substitucí do vzorce (25) obdržíme

$$\frac{dv}{dr} = \frac{\partial v}{\partial x} \mathbf{i} \,.\, \mathbf{r}_1 + \frac{\partial v}{\partial y} \mathbf{j} \,.\, \mathbf{r}_1 + \frac{\partial v}{\partial z} \mathbf{k} \,.\, \mathbf{r}_1$$

čili

$$\frac{dv}{dr} = \left(\frac{\partial v}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial v}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial v}{\partial z} \mathbf{k} \right) . \, \mathbf{r}_1. \tag{26}$$

Ke druhému z vytčených differenciálních poměrů, totiž k differenciálnímu poměru skaláru dle vektoru, dospějeme takto: Od bodu M, jehož poloha jest ustanovena průvodičem $\mathbf{r}$, přejděme k velmi blízkému bodu M', ležícímu ve směru, který jest dán jiným vektorem $\mathbf{s}$. I můžeme pokládati MM' za jakýsi přírůstek průvodiče $\mathbf{r}$ ve směru vektoru $\mathbf{s}$; označíme jej $\Delta_{\mathbf{s}}\mathbf{r}$. Tímto přechodem od M ku M' změnila se skalární veličina v o velmi malou hodnotu Δv.

Utvořme poměr $\frac{\Delta v}{\Delta_{\mathbf{s}}\mathbf{r}}$ čili $\Delta v \frac{1}{\Delta_{\mathbf{s}}\mathbf{r}}$; poněvadž dle (23[a])

$$\frac{1}{\Delta_{\mathbf{s}}\mathbf{r}} = \frac{1}{\Delta s} \mathbf{s}_1,$$

kde Δs značí skalární část velmi malého vektoru $\Delta_{\mathbf{s}}\mathbf{r}$, jest

$$\frac{\Delta v}{\Delta_{\mathbf{s}}\mathbf{r}} = \frac{\Delta v}{\Delta s} \mathbf{s}_1.$$

Přejdeme-li k limitám, promění se $\frac{\Delta v}{\Delta_{\mathbf{s}}\mathbf{r}} = \frac{f(\mathbf{r} + \Delta_{\mathbf{s}}\mathbf{r}) - f(\mathbf{r})}{\Delta_{\mathbf{s}}\mathbf{r}}$ v *differenciální poměr skaláru* v *dle vektoru* $\mathbf{r}$ *ve směru* $\mathbf{s}$, který z příčin, jež poznáme níže, vhodně označujeme jako *částečný* differenciální poměr $\frac{\partial v}{\partial \mathbf{r}_{\mathbf{s}}}$; podíl $\frac{\Delta v}{\Delta s}$ změní se přechodem k mezím v $\frac{dv}{ds}$. Tudíž obdržíme

$$\frac{\partial v}{\partial \mathbf{r}_{\mathbf{s}}} = \frac{dv}{ds} \mathbf{s}_1, \tag{27^a}$$

t. j. differenciální poměr skaláru v dle vektoru $\mathbf{r}$ ve směru $\mathbf{s}$ jest vektor téhož běhu $\mathbf{s}$, jehož skalární částí jest $\frac{dv}{ds}$.

(Pokračování.)

Několik poznámek o determinantech.

Napsal **K. Petr.**

I.

Nejprve chci poukázati na zcela jednoduchý a pokud mi známo dosud nepovšimnutý způsob, jak lze odvoditi vztahy mezi determinanty utvořenými z elementů matice určité hodnosti μ. Říkáme, že matice

$$a_{ik}\,; \quad \begin{array}{l} i = 1, 2, \ldots n \\ k = 1, 2, \ldots m \end{array}$$

jest hodnosti μ, jsou-li všecky determinanty $|a_{rs}|$ stupně vyššího nežli μ-tého rovny nulle a je-li aspoň jeden determinant $|a_{rs}|$ stupně μ od nully různý.

Vyšetřujme, jaké jsou vztahy mezi determinanty stupně μ-tého. Za tím účelem vezmeme v úvahu tento determinant:

$$D = \begin{vmatrix} a_{i_1 j_1}, & a_{i_1 j_2}, & \ldots & a_{i_1 j_\mu}, & x_1 a_{i_1 k_1}, & x_2 a_{i_1 k_2}, & \ldots & x_\mu a_{i_1 k_\mu} \\ a_{i_2 j_1}, & a_{i_2 j_2}, & \ldots & a_{i_2 j_\mu}, & x_1 a_{i_2 k_1}, & x_2 a_{i_2 k_2} & \ldots & x_\mu a_{i_2 k_\mu} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i_\mu j_1}, & a_{i_\mu j_2}, & \ldots & a_{i_\mu j_\mu}, & x_1 a_{i_\mu k_1}, & x_2 a_{i_\mu k_2}, & \ldots & x_\mu a_{i_\mu k_\mu} \\ a_{l_1 j_1}, & a_{l_1 j_2}, & \ldots & a_{l_1 j_\mu}, & y a_{l_1 k_1}, & y a_{l_1 k_2}, & \ldots & y a_{l_1 k_\mu} \\ a_{l_2 j_1}, & a_{l_2 j_2}, & \ldots & a_{l_2 j_\mu}, & y a_{l_2 k_1}, & y a_{l_2 k_2}, & \ldots & y a_{l_2 k_\mu} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{l_\mu j_1}, & a_{l_\mu j_2}, & \ldots & a_{l_\mu j_\mu}, & y a_{l_\mu k_1}, & y a_{l_\mu k_2}, & \ldots & y a_{l_\mu k_\mu} \end{vmatrix}$$

Tento determinant na základě supposice, že matice a_{ik} jest hodnosti μ, a vzhledem ku Laplace-ově větě rozkladné jest rovný nulle, když $y = x_1$. Ze stejných příčin jest rovný nulle i pro $y = x_k$. Poněvadž pak jest to polynom μ-tého stupně, jest nutně

$$D = A(y - x_1)(y - x_2) \ldots (y - x_\mu),$$

kde A jest na y (a rovněž na $x_1, \ldots, x_\mu$, jak snadno nahlédnouti) nezávislé.