Eduard Weyr

O homogenních souřadnicích a invariantech v theorii ploch druhého stupně. [II.]

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 26 (1897), No. 2-3, 121--144

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121620

O homogenních souřadnicích a invariantech v theorii ploch druhého stupně.

Napsal

Eduard Weyr.

(Dokončení.)

16. Kanonické tvary a jich invarianty.

Za kanonické tvary dvou forem kvadratických f a f' volíme tvary, do nichž se transformují, zvolíme-li za základný čtyrstěn společný oběma plochám $f=0$ a $f'=0$ čtyrstěn polárný, t. j. čtyrstěn, jehož vrcholy jsou poly protějších stěn. *Vrcholy tohoto společného polarného čtyrstěnu jsou vrcholy čtyř kuželových ploch obsažených ve svazku ploch*

$$\lambda f+f'=0.$$

Rovnice tato náleží kuželové ploše, vymizí-li diskriminant formy $\lambda f+f'$, t. j. hoví-li λ bikvadratické rovnici (29). Označme λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 kořeny této rovnice a x', x'', x''', $x^{(4)}$ vrcholy příslušných ploch; dále připomeňme, že souřadnice vrcholu annullují všecky čtyři derivace výrazu $\lambda f+f'$. Značíme-li tedy, za příčinou stručnosti, symbolem $f(x_k^{(\nu)})$ derivaci funkce f dle x_k, do níž vloženy za proměnné x hodnoty $x_1^{(\nu)}$, $x_2^{(\nu)}$, $x_3^{(\nu)}$, $x_4^{(\nu)}$, a má-li $f'(x_k^{(\nu)})$ vzhledem k funkci f' význam obdobný, máme linearné rovnice

$$\begin{aligned}\lambda_\nu f(x_1^{(\nu)})+f'(x_1^{(\nu)})&=0,\\ \lambda_\nu f(x_2^{(\nu)})+f'(x_2^{(\nu)})&=0,\\ \lambda_\nu f(x_3^{(\nu)})+f'(x_3^{(\nu)})&=0,\\ \lambda_\nu f(x_4^{(\nu)})+f'(x_4^{(\nu)})&=0,\end{aligned}\qquad (\nu=1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

z nichž řešením vycházejí souřadnice $x_1^{(\nu)}$, $x_2^{(\nu)}$, $x_3^{(\nu)}$, $x_4^{(\nu)}$ vrcholu $x^{(\nu)}$.

Buďte ν a μ dvě různá z čísel 1, 2, 3, 4 a násobme napsané rovnice resp. hodnotami $x_1^{(\mu)}$, $x_2^{(\mu)}$, $x_3^{(\mu)}$, $x_4^{(\mu)}$ a sečtěme výsledky; tím obdržíme

$$\lambda_\nu \Sigma x_h^{(\mu)} f(x_h^{(\nu)}) + \Sigma x_h^{(\mu)} f'(x_h^{(\nu)}) = 0 \qquad (h = 1, 2, 3, 4)$$

a obdobně by ze skupiny čtyř rovnic s kořenem λ_μ plynula rovnice

$$\lambda_\mu \Sigma x_h^{(\nu)} f(x_h^{(\mu)}) + \Sigma x_h^{(\nu)} f'(x_h^{(\mu)}) = 0.$$

Vzhledem k evidentním rovnostem

$$\Sigma x_h^{(\mu)} f(x_h^{(\nu)}) = \Sigma x_h^{(\nu)} f(x_h^{(\mu)}),$$
$$\Sigma x_h^{(\mu)} f'(x_h^{(\nu)}) = \Sigma x_h^{(\nu)} f'(x_h^{(\mu)}),$$

máme odečtením posledních dvou rovnic

$$(\lambda_\mu - \lambda_\nu) \Sigma x_h^{(\nu)} f(x_h^{(\mu)}) = 0,$$

tedy *za supposice, že čtyři kořeny λ jsou vesměs různé,*

$$\Sigma x_h^{(\nu)} f(x_h^{(\mu)}) = 0,$$

načež z předposlední rovnice:

$$\Sigma x_h^{(\nu)} f'(x_h^{(\mu)}) = 0.$$

Tyto dvě rovnice praví, že každé dva z nalezených čtyř vrcholů x', x'', x''', $x^{(4)}$ jsou vzhledem k oběma plochám harmonicky sdruženy, a že tedy rovina vedená třemi vrcholy jest polárnou rovinou čtvrtého vzhledem k oběma plochám daným.

Z posledních dvou rovnic odvoďme při libovolném λ

$$\Sigma x_h^{(\nu)} [\lambda f(x_h^{(\mu)}) + f'(x_h^{(\mu)})] = 0$$

a konstatujme z této rovnice, že čtyřstěn o vrcholech x', x'', x''', $x^{(4)}$ jest polárným čtyřstěnem vzhledem ku všem plochám svazku $\lambda f + f' = 0$.

Zvolíme-li tento polárný čtyrstěn, oběma plochám společný, za základný, budou rovnice ploch tvarů

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + a_{44}x_4^2 = 0,$$
$$a'_{11}x_1^2 + a'_{22}x_2^2 + a'_{33}x_3^2 + a'_{44}x_4^2 = 0;$$

toť jsou kanonické tvary, do nichž lze kvadratické formy f a f' převésti linearnou transformací. Invarianty jsou pak

$$\varDelta = a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}, \qquad \varDelta' = a'_{11}a'_{22}a'_{33}a'_{44},$$
$$\Theta = a'_{11}a_{22}a_{33}a_{44} + a_{11}a'_{22}a_{33}a_{44} + a_{11}a_{22}a'_{33}a_{44} + a_{11}a_{22}a_{33}a'_{44},$$
$$\Theta' = a_{11}a'_{22}a'_{33}a'_{44} + a'_{11}a_{22}a'_{33}a'_{44} + a'_{11}a'_{22}a_{33}a'_{44} + a'_{11}a'_{22}a'_{33}a_{44},$$
$$\Phi = a'_{11}a'_{22}a_{33}a_{44} + a'_{11}a_{22}a'_{33}a_{44} + a'_{11}a_{22}a_{33}a'_{44} + a_{11}a'_{22}a'_{33}a_{44}$$
$$+ a_{11}a'_{22}a_{33}a'_{44} + a_{11}a_{22}a'_{33}a'_{44}.$$

Transformaci lze ještě tak voliti, že v transformované formě f' všecky čtyři koefficienty mají hodnotu 1; k tomu stačí hodnoty $\sqrt{a'_{hh}}\, x_h$ nahraditi novými proměnnými x_h. Tím máme kanonické tvary

$$f = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + a_{44}x_4^2, \qquad f' = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2,$$

a invarianty

$$\varDelta = a_{11}a_{22}a_{33}a_{44},$$
$$\Theta = a_{22}a_{33}a_{44} + a_{11}a_{33}a_{44} + a_{11}a_{22}a_{44} + a_{11}a_{22}a_{33},$$
$$\Phi = a_{33}a_{44} + a_{22}a_{44} + a_{22}a_{33} + a_{11}a_{44} + a_{11}a_{33} + a_{11}a_{22},$$
$$\Theta' = a_{11} + a_{22} + a_{33} + a_{44},$$
$$\varDelta' = 1.$$

Invarianty $\varDelta$, Θ, Φ, Θ' jsou nyní nejjednodušší symmetrické funkce koefficientů a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{44}.

17. Invarianty reciprokých forem.

K dvěma formám kvadratickým

$$f = \Sigma a_{hk}x_h x_k, \qquad f' = \Sigma a'_{hk}x_h x_k$$

utvořme formy reciproké

$$\mathrm{F} = \frac{1}{\varDelta}\, \Sigma\, \mathrm{A}_{hk}\xi_h \xi_k, \qquad \mathrm{F}' = \frac{1}{\varDelta'}\, \Sigma \mathrm{A}'_{hk}\xi_h \xi_k;$$

tyto mají vzhledem k linearné transformaci proměnných ξ simultanní invarianty, jevící se jakožto koefficienty při mocnostech λ v diskriminantu formy $\lambda F + F'$. Píšeme-li tento diskriminant

$$\delta\lambda^4 + \vartheta\lambda^3 + \varphi\lambda^2 + \vartheta'\lambda + \delta',$$

snadno nalezneme, vzhledem k čl. 15.,

$$\delta = \frac{1}{\Delta^4}\Sigma \pm (A_{11}A_{22}A_{33}A_{44}),\quad \delta' = \frac{1}{\Delta'^4}\Sigma \pm (A'_{11}A'_{22}A'_{33}A'_{44}),$$

$$\vartheta = \Sigma\frac{A'_{hk}}{\Delta'}\frac{B_{hk}}{\Delta^3} = \frac{1}{\Delta'\Delta^3}\Sigma A'_{hk}B_{hk},$$

$$\vartheta' = \Sigma\frac{A_{hk}}{\Delta}\frac{B'_{hk}}{\Delta'^3} = \frac{1}{\Delta\Delta'^3}\Sigma A_{hk}B'_{hk},$$

$$\varphi = \frac{1}{\Delta^2\Delta'^2}[\Sigma \pm (A'_{11}A'_{22}A_{33}A_{44}) + \ldots + \Sigma \pm (A_{11}A_{22}A'_{33}A'_{44})];$$

značí-li B_{hk} a B'_{hk} minory determinantů adjungovaných,

$$B = \Sigma \pm (A_{11}A_{22}A_{33}A_{44}),\qquad B' = \Sigma \pm (A'_{11}A'_{22}A'_{33}A'_{44}).$$

Vzhledem k rovnicím, z theorie determinantů známým*)

$$B = \Delta^3,\qquad B' = \Delta'^3,$$
$$B_{hk} = \Delta^2 a_{hk},\qquad B'_{kk} = \Delta'^2 a'_{hk}$$
$$\begin{vmatrix} A_{11}, & A_{12} \\ A_{21}, & A_{22} \end{vmatrix} = \Delta \begin{vmatrix} a_{33}, & a_{44} \\ a_{43}, & a_{42} \end{vmatrix}$$

a tedy i rozložením na minory druhého stupně dle věty *Laplace-ovy*

$$\Sigma \pm (A_{11}A_{22}A'_{33}A'_{44}) = \Delta\Delta'\Sigma \pm (a'_{11}a'_{22}a_{32}a_{22})$$

máme pro hořejší invarianty výrazy

$$\delta = \frac{1}{\Delta},\qquad \delta' = \frac{1}{\Delta'},$$

$$(33)\qquad \vartheta = \frac{1}{\Delta\Delta'}\Sigma A'_{hk}a_{hk} = \frac{\Theta'}{\Delta\Delta'},\quad \vartheta' = \frac{1}{\Delta\Delta'}\Sigma A_{hk}a'_{hk} = \frac{\Theta}{\Delta\Delta'},$$

$$\varphi = \frac{\Phi}{\Delta\Delta'}.$$

---

*) Dr. *F. J. Studnička*, O determinantech, § 6., anebo *Salmon-Fiedler* Vorlesungen über die Algebra der linearen Transformationen, 2. vyd. str. 39 a 41.

Tím vyjádřeny invarianty reciprokých forem pomocí invariantů forem původních. Geometrické applikace těchto formulí následují dole.

18. Geometrický význam vymizení invariantů dvou ploch kvadratických nekuželových.

Vymizí-li Δ, jest plocha $f = 0$ kuželovou, a vymizí-li Δ' jest jí plocha $f' = 0$. Abychom nalezli geometrický význam rovnosti $\Theta = 0$, uveďme nejprve případ, v němž tato rovnost má platnost; to stane se tenkráte, kdy plocha f' jest opsána polárnému tetraedru plochy f. Zvolíme-li tento čtyřstěn za základný, budou rovnice ploch

$$f = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + a_{44}x_4^2 = 0,$$
$$f' = 2a'_{12}x_1x_2 + 2a'_{13}x_1x_3 + 2a'_{14}x_1x_4 + 2a'_{23}x_2x_3 + 2a'_{24}x_2x_4 + 2a'_{34}x_3x_4$$

a tedy $\Theta = 0$. A naopak lze ukázati, *že při $\Theta = 0$ každý polárný čtyrstěn plochy f, jehož tři vrcholy jsou na ploše f', má i čtvrtý vrchol na této ploše.*

Především jest patrno, že tři vrcholy lze vždy na ploše f' umístiti. Volíme-li totiž vrchol A libovolně na této ploše, a je-li α jeho polárná rovina vzhledem k ploše f, nutno druhý vrchol B voliti na průsečné čáře této roviny s plochou f'; je-li pak β polárná rovina bodu B vzhledem k f, nutno položiti třetí vrchol C do jednoho z obou bodů, jež jsou současně na α, β, f'; čtvrtý vrchol D polárného čtyrstěnu jest pak společný bod poárných rovin α, β, γ bodů A, B, C. Zvolíme-li ABCD za základný tetraedr, k němuž formy f a f' transformujeme substitucí o modulu D, máme

$$\overline{\Theta} = D^2\Theta = 0,$$
$$\overline{f} = \overline{a}_{11}\overline{x}_1^2 + \overline{a}_{22}\overline{x}_2^2 + \overline{a}_{33}\overline{x}_3^2 + \overline{a}_{44}\overline{x}_4^2,$$
$$\overline{f'} = \overline{a}_{44}\overline{x}_4^2 + 2\overline{a}'_{12}\overline{x}_1\overline{x}_2 + 2\overline{a}'_{13}\overline{x}_1\overline{x}_3 + \ldots + 2\overline{a}'_{34}\overline{x}_3\overline{x}_4,$$

jelikož plocha f' prochází třemi vrcholy A, B, C. Avšak přímým vyčíslením nalezneme

$$\overline{\Theta} = \overline{a}_{11}\overline{a}_{22}\overline{a}_{33}\overline{a}'_{44} = 0,$$

z čehož soudíme $\overline{a}'_{44} = 0$, jelikož by vymizení kteréhokoliv z prvních tří faktorů mělo v zápětí rovnost $\overline{\Delta} = 0$, t. j. plocha f by byla kuželová, proti supposici. Prochází tedy plochy všemi čtyřmi vrcholy A, B, C, D, jak bylo tvrzeno.

Reciprokým způsobem soudíme, že rovnost $\vartheta = 0$ *značí, že každý polárný čtyrstěn plochy f, jehož tři stěny se dotýkají plochy f', se této plochy i čtvrtou stěnou dotýká.*

Obdobně vychází, že při $\Theta' = 0$ plocha f prochází čtvrtým vrcholem polárného čtyrstěnu plochy f', prochází-li třemi, a že při $\vartheta' = 0$ plocha f se dotýká čtvrté stěny polárného čtyrstěnu plochy f', dotýká-li se tří.

Hořejší rovnice

$$\vartheta = \frac{\Theta'}{\Delta\Delta'}$$

ukazuje, že při $\Theta' = 0$ jest též $\vartheta = 0$, čímž nabýváme věty:

Je-li plocha f' vepsána do polárného čtyrstěnu plochy f, jest plocha f opsána polárnému čtyrstěnu plochy f' a naopak: pak arci existuje nekonečné množství takových čtyrstěnů, jelikož lze tři vrcholy, resp. tři stěny, do jisté míry voliti.

Abychom poznali význam vymizení invariantu Φ, zvolme polárný čtyrstěn plochy f za základný, a volme jej mimo to tak, aby pět z jeho šesti hran se dotýkalo plochy f'. Šestnácti transformačním koefficientům t_{hk} ukládá první požadavek šest vazeb, totiž

$$a_{12} = a_{13} = a_{14} = a_{23} = a_{24} = a_{34} = 0;$$

aby dále hrana $x_1 = x_2 = 0$ se dotýkala plochy f', musí platiti rovnost

$$a'_{33}a'_{44} - a'^2_{34} = 0,$$

a obdobné další čtyry rovnosti vzhledem k dotýkání se hran

$$x_1 = x_3 = 0; \quad x_1 = x_4 = 0; \quad x_2 = x_3 = 0; \quad x_2 = x_4 = 0.$$

Pak ale vyčíslením obdržíme

$$\Phi = a_{33}a_{44}\,(a'_{11}a'_{22} - a'^2_{12})$$

a jelikož a_{33}, a_{44} vzhledem k $\Delta \gtrless 0$ nemohou vymizeti, musí při $\Phi = 0$ platiti

$$a'_{11}a'_{22} - a'^2_{12} = 0,$$

t. j. musí se i šestá hrana dotýkati plochy f'. A poněvadž jest invariant Φ vzhledem ku koefficientům obou ploch symmetricky utvořen, soudíme, *že $\Phi = 0$ má ten význam, že každý polárný čtyrstěn jedné plochy, jehož pět hran se dotýká druhé, se i šestou hranou dotýká druhé plochy.*

Při $\Phi = 0$ jest též $\varphi = \frac{\Phi}{\Delta\Delta'} = 0$, a platí tedy reciproký výrok, jenž se však v tomto případě patrně kryje s původním, a, tudíž nepodává žádné nové věty.

19. **Invarianty Δ, Θ, Φ, Θ', Δ' tvoří úplný system invariantů forem f a f'**, t. j. každý invariant jejich lze vyjádřiti jakožto celistvou a homogenní funkci těchto pěti hodnot; a jelikož index těchto základních invariantů jest 2, jest zároveň patrno, že index každého invariantu forem f a f' jest číslo sudé

Důkaz, jejž lze doslova tak provésti, jak byl podán u ternarných forem l. c. str. 98 a násl., zůstavuji čtenáři; zde stůjtež toliko dva příklady, opírající se o to, co bylo l. c. pověděno o užívání tvarů kanonických.

A. Nechť se vyvine výminka, za kterou lze vytknouti čtyrstěn, jehož vrcholy by procházela jedna z dvou daných ploch druhého stupně, a jehož *dva* páry protějších hran by ležely na druhé ploše.

Zvolme supponovaný čtyrstěn za základný a předpokládejme, že čtyry hrany $x_1 = 0$, $x_2 = 0$; $x_3 = 0$, $x_4 = 0$; $x_1 = 0$, $x_3 = 0$; $x_2 = 0$, $x_4 = 0$ leží na ploše $f' = 0$; to vymáhá, aby

$$a'_{11} = a'_{22} = a'_{33} = a'_{44} = a'_{12} = a'_{13} = a'_{24} = a'_{34} = 0,$$

tak že rovnice plochy f' jest

$$f' = 2a'_{23}x_2x_3 + 2a'_{14}x_1x_4 = 0,$$

kdežto rovnice plochy f, opsané základnímu čtyrstěnu, jest

$$f = 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{14}x_1x_4 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{24}x_2x_4 + 2a_{34}x_3x_4 = 0.$$

Vyčíslením máme

$$\Delta' = a'^2_{23} a'^2_{14},$$

$$\Theta = 2(a_{23}a_{14} - a_{13}a_{24} - a_{12}a_{34})(a'_{23}a_{14} + a'_{14}a_{23}),$$

$$\Theta' = 2a'_{23}a'_{14}(a'_{23}a_{14} + a'_{14}a_{23}),$$

$$\Phi = (a'_{23}a_{14} + a'_{14}a_{23})^2 + 2a'_{23}a'_{14}(a_{23}a_{14} - a_{13}a_{24} - a_{12}a_{34});$$

snadno zjistíme, že tedy platí mezi napsanými čtyřmi invarianty homogenní relace

$$4\Delta'\Theta'\Phi = \Theta'^3 + 8\Delta'^2\Theta;$$

to jest hledaná výminečná rovnice.

Rovnice

$$4\delta'\vartheta'\varphi = \vartheta'^3 + 8\delta'^2\vartheta$$

vyjadřuje reciprokou vlastnost, t. j. za její platnosti existuje čtyrstěn opsaný ploše f, jehož dva páry protějších hran jsou na ploše f'.

Z rovnice poslední plyne dle čl. 17.

$$4\Delta\Theta\Phi = \Theta^3 + 8\Delta^2\Theta',$$

čímž odvozena věta:

Je-li plocha f vepsána do čtyrstěnu, jehož dvěma páry protějších hran prochází plocha f', tu jest plocha f' opsána čtyrstěnu, jehož dvěma páry protějších hran prochází plocha f.

B. *Tečna, vedená ze středu plochy druhého stupně ku kouli opsané polárnému čtyrstěnu, má stálou délku.*

Budiž rovnice centrálné plochy v pravoúhlých souřadnicích

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$

tedy, po zavedení souřadnic Hesse-ových,

$$f = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} - x_4^2;$$

rovnice koule

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 - \varrho^2 = 0,$$

a tedy po zavedení oněch souřadnic

$$f' = (x_1 - \alpha x_4)^2 + (x_2 - \beta x_4)^2 + (x_3 - \gamma x_4)^2 - \varrho^2 x_4^2.$$

Dle čl. 18. jest plocha f' opsána polárnému čtyrstěnu plochy f, vymizí-li simultanní invariant Θ; avšak vyčíslením nalezáme

$$\Theta = \frac{1}{a^2b^2c^2}\left[\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \varrho^2 - (a^2 + b^2 + c^2)\right],$$

a máme tedy

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \varrho^2 = a^2 + b^2 + c^2,$$

čímž věta dokázána.

C. Ve svazku ploch $\lambda f' + f'' = 0$ se vyskytuje obecně jediná, jenž jest opsána polárným čtyrstěnům dané plochy $f = 0$.

Aby $\lambda f + f'' = 0$ hověla tomuto požadavku, musí invariant. Θ forem f a $\lambda f' + f''$ vymizeti, t. j. musí

$$\Sigma\,(\lambda a'_{hk} + a''_{hk})\,A_{hk} = 0,$$

čili

$$\lambda \Sigma a'_{hk} A_{hk} + \Sigma a''_{hk} A_{hk} = 0,$$

t. j.

$$\lambda\Theta_1 + \Theta_2 = 0,$$

značí-li Θ_1 a Θ_2 obdobný invariant forem f a f', resp. f a f'' Tím jest λ a tudíž žádaná plocha stanovena. — Hoví-li *dvě* plochy svazku, a volíme-li je za f' a f'', máme $\Theta_1 = \Theta_2 = 0$, a *tedy hoví pak každá plocha svazku onomu požadavku.* *)

20. **Případ, kdy diskriminant jedné neb druhé plochy vymizí,** jsme dosud vylučovali; přihledněme nyní i v tomto případu ku geometrickému významu vymizení simultanních invariantů ploch $f = 0$ a $f' = 0$.

Mějme tedy nejprve $\Delta' = 0$, t. j. supponujme, že plocha $f' = 0$ jest kuželem; zvolíme-li vrchol jeho za základný bod

$$x_1 = x_2 = x_3 = 0,$$

tu f' nebude obsahovati proměnné x_4, t, j. hodnoty a'_{14}, a'_{24}, a'_{34}, a'_{44} vymizejí. Pak nalezneme

*) Další příklady viz *Salmon-Fiedler*, Analytische Geometrie des Raumes, I. díl kap. IX.

$$\Theta' = a_{44}\Sigma \pm (a'_{11}a'_{22}a'_{33}),$$

a vymizí tedy Θ' tenkráte, kdy buď $a_{44} = 0$, t. j. plocha f prochází vrcholem kužele f', aneb kdy

$$\Sigma \pm (a'_{11}a'_{22}a'_{33}) = 0,$$

kdy tedy ternarná forma f' se rozloží na dva linearné faktory, t. j. kdy kužel se skládá z dvou rovin. V obou případech prochází plocha f vrcholy polárných čtyrstěnů plochy f', jako v případě, kdy $\Delta' \gtrless 0$.

Stanovme rovnici kužele, opsaného ploše f z bodu

$$x_1 = x_2 = x_3 = 0.$$

Polárná rovina tohoto bodu má rovnici

$$a_{14}x_1 + a_{24}x_2 + a_{34}x_3 + a_{44}x_4 = 0,$$

značí tedy

$$\lambda f - (a_{14}x_1 + a_{24}x_2 + a_{34}x_3 + a_{44}x_4)^2 = 0$$

plochu druhého stupně, dotýkající se plochy f podél kuželosečky, v níž ji polárná rovina protíná; učiníme-li specialně $\lambda = a_{44}$, neobsahuje poslední rovnice proměnné x_4 a náleží tudíž řečenému kuželi, jakož i přímo plyne tím, že kuželové ploše musí hověti souřadnice vrcholu 0, 0, 0, x_4. Píšeme-li rovnici tak nalezeného kužele ve tvaru

$$\Sigma\alpha_{hk}x_h x_k = 0, \qquad (h, k = 1, 2, 3; \quad \alpha_{hk} = \alpha_{kh}),$$

máme

$$\begin{aligned}
\alpha_{11} &= a_{11}a_{44} - a_{14}^2, & \alpha_{12} &= a_{12}a_{44} - a_{14}a_{24},\\
\alpha_{22} &= a_{22}a_{44} - a_{24}^2, & \alpha_{13} &= a_{13}a_{44} - a_{14}a_{34},\\
\alpha_{33} &= a_{33}a_{44} - a_{34}^2, & \alpha_{23} &= a_{22}a_{44} - a_{24}a_{34}
\end{aligned}$$

a vyčíslením shledáme

$$\begin{aligned}
\Phi = {} & \alpha_{11}(a'_{22}a'_{33} - a'^2_{23}) + \alpha_{22}(a'_{3}\ {}_{1} - a'^2_{31})\\
& + \alpha_{33}(a'_{11}a'_{22} - a'^2_{12}) + 2\alpha_{23}(a'_{12}a'_{13} - a'_{11}a'_{23})\\
& + 2\alpha_{31}(a'_{23}a'_{21} - a'_{22}a'_{31}) + 2\alpha_{12}(a'_{31}a'_{32} - a'_{33}a'_{12}).
\end{aligned}$$

To jest ale simultanní invariant ternarných forem (l. c. str. 82. výraz Θ')

$$\Sigma a'_{hk} x_h x_k, \quad \Sigma \alpha_{hk} x_h x_k, \quad (h, k = 1, 2, 3; \quad a'_{hk} = a'_{kh}; \quad \alpha_{hk} = \alpha_{kh}),$$

a vymizení jeho má ten význam, že kužel dotyčný prochází hranami polárných trojhranů kužele daného f'.

Obdobně nalezneme

$$\begin{aligned} a_{44}\Theta = & \; a'_{11}(\alpha_{22}\alpha_{33} - \alpha_{23}^2) + a'_{22}(\alpha_{33}\alpha_{11} - \alpha_{31}^2) \\ & + a'_{33}(\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}^2) + 2a'_{23}(\alpha_{12}\alpha_{13} - \alpha_{11}\alpha_{23}^2) \\ & + 2a'_{31}(\alpha_{23}\alpha_{21} - \alpha_{22}\alpha_{31}) + 2a'_{12}(\alpha_{31}\alpha_{32} - \alpha_{33}\alpha_{12}), \end{aligned}$$

což opět jest simultanní invariant napsaných ternarných forem (l. c. výraz Θ); má tedy vymizení invariantu Θ nyní ten význam, že daný kužel f' prochází polarnými trojhrany kužele opsaného z jeho vrcholu ploše f.

Rozloží-li se daný kužel f' na dvě roviny, tu, jakož jsme již vytkli,

$$\Delta' = 0, \quad \Theta' = 0.$$

Zvolíme-li tyto dvě roviny za základní roviny $x_1 = 0$ $x_2 = 0$, máme

$$f' = 2a'_{12} x_1 x_2$$

a tedy

$$\Phi = a'^2_{12}(a_{34}^2 - a_{33}a_{44}).$$

Vymizí tedy Φ jen při $a_{34}^2 - a_{33}a_{44} = 0$, t. j. tenkráte, kdy průsečnice oněch dvou rovin se dotýká plochy f. -- Dále nalezáme

$$\Theta = 2a'_{12} A_{12},$$

a vymizení invariantu Θ má ten význam, že dané dvě roviny jsou harmonicky sdruženy vzhledem k ploše f. Skutečně má pol roviny $x_1 = 0$ souřadnice $A_{11} : A_{12} : A_{13} : A_{14}$ a zapadá tudíž do roviny $x_2 = 0$ při $A_{12} = 0$. Platí-li současně rovnosti $\Phi = 0$, $\Theta = 0$, pak jsou dané roviny vzhledem k f sdruženy a mimo to jest jejich průsečnice tečnou této plochy, t. j. jedna se dotýká plochy f a druhá prochází bodem dotyčným.

Kterak vyjádříme invariantivný fakt, že obě roviny $x_1 = 0$ a $x_2 = 0$, z nichž se skládá plocha f', se dotýkají plochy f? Označme vrcholy základného čtyrstěnu I, II, III, IV a položme bod II do dotyčného bodu roviny $x_1 = 0$, a bod I do dotyčného bodu roviny $x_2 = 0$; dále buďte za hrany I, III a I, IV zvoleny plošné přímky plochy f v rovině I, III, IV položené, a za hrany II, III a II, IV její plošné přímky v rovině II, III, IV. Pak patrně máme

$$f = 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{34}x_3x_4, \qquad f' = 2a'_{12}x_1x_2,$$

a tedy

$$\Delta = a_{12}{}^2a_{34}{}^2, \qquad \Theta = 2a'_{12}a_{12}a_{34}{}^2, \qquad \Phi = a'_{12}{}^2a_{34}{}^2,$$

z čehož homogenní relaci

$$\Theta^2 = 4\Delta\Phi,$$

vyjadřující obecně fakt vytčený.

V dalším specialném případě kdy plocha f' se redukuje na dvojnásobnou rovinu, máme, zvolíce tuto rovinu za $x_1 = 0$,

$$f' = a'_{11}x_1^2,$$

a tedy

$$\Delta' = 0, \qquad \Theta' = 0, \qquad \Phi = 0, \qquad \Theta = a'_{11}A_{11},$$

tak že $\Theta = 0$ má ten význam, že se ona rovina dotýká plochy f.

Jsou-li konečně obě dané plochy f a f' plochami kuželovými, máme $\Delta = 0$, $\Delta' = 0$; položíme-li základný bod III do vrcholu kužele f a základný bod IV do vrcholu kužele f', máme

$$a_{31} = a_{32} = a_{33} = a_{33} = 0,$$
$$a'_{41} = a'_{42} = a'_{43} = a'_{44} = 0,$$

a všecky A_{hk} jsou nullami až na A_{33}, a všecky A'_{hk} až na A_{44}. Tím nalézáme $\Theta = a'_{33}A_{33}$ a tudíž vymizí Θ, když buď $a'_{33} = 0$, t. j. kdy kužel f' prochází vrcholem kužele f, aneb když $A_{33} = 0$, t. j. když se f rozloží na dvě roviny. Obdobně $\Theta' = 0$ má buď ten význam, že f prochází vrcholem kužele f', aneb že se f' rozloží na dvě roviny. Význam vymizení invariantu Φ potrvá, t. j. pak existují polárné trojhrany jednoho kužele, jejichž hrany se dotýkají druhého.

Je-li specialně f kužel a f' system dvou rovin, pak dle předchozí úvahy $\Delta = 0$, $\Delta' = 0$, $\Theta' = 0$, a Θ vymizí, je-li vrchol kužele na f', t. j. na jedné z obou rovin, Φ pak vymizí, dotýká-li se průsečnice obou rovin kužele f.

Skládá-li se jak f tak f' z dvou rovin, vymizí patrně Δ, Δ', Θ, Θ'; Φ pak tenkráte, procházejí-li všecky čtyry roviny jedním bodem, jakož snadno plyne, zvolí-li se tři z nich za roviny základné.

21. Simultanní kontravarianty forem f a f'.

Právě tak jako diskriminant formy $\lambda f + f'$ vedl k simultanním invariantům forem f a f', vede kontravariant σ, v čl. 14. vytčený, utvořený pro formu $\lambda f + f'$ k simultanním kontravariantům forem f a f'.

Označíme-li kontravariant (20) formy $f = \Sigma a_{hk} x_h x_k$ způsobem určitějším pomocí symbolu $\sigma(a_{hk}, \xi)$, jest $\sigma(\lambda a_{hk} + a'_{hk}, \xi)$ kontravariantem formy $\lambda f + f'$, t. j. máme při libovolném λ

$$\sigma(\lambda \bar{a}_{hk} + \bar{a}'_{hk}, \bar{\xi}) = D^2 \sigma(\lambda a_{hk} + a'_{hk}, \xi),$$

transformují-li se proměnné ξ transponovanou substitucí (28). Z této rovnice soudíme, že položíme-li

$$\sigma(\lambda a_{hk} + a'_{hk}, \xi) = \sigma\lambda^3 + \tau\lambda^2 + \tau'\lambda + \sigma',$$

hodnoty σ, τ, τ', σ' jsou kontravarianty o indexu 2; hodnota σ jest ovšem kontravariant (20) formy f, a σ' týž kontravariant pro formu f', kdežto τ, τ' jsou simultanními kontravarianty obou forem.

V příčině vyčíslení kontravariantů τ a τ' podotkněme, že

$$\tau' = \left[\frac{\partial \sigma(\lambda a_{hk} + a'_{hk}, \xi)}{\partial \lambda}\right]_{\lambda = 0},$$

$$2\tau = \left[\frac{\partial^2 \sigma(\lambda a_{hk} + a'_{hk}, \xi)}{\partial \lambda^2}\right]_{\lambda = 0},$$

čímž

$$(34) \qquad \tau' = \begin{vmatrix} a_{11}, & a'_{12}, & a'_{13}, & a'_{14}, & \xi_1 \\ a_{21}, & a'_{22}, & a'_{23}, & a'_{24}, & \xi_2 \\ a_{31}, & a'_{32}, & a'_{33}, & a'_{34}, & \xi_3 \\ a_{41}, & a'_{42}, & a'_{43}, & a'_{44}, & \xi_4 \\ 0, & \xi_2, & \xi_3, & \xi_4, & 0 \end{vmatrix} + \text{atd.}$$

kde zkratka atd. značí součet obdobných dalších tří determinantův, a

$$(35) \qquad \tau = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a'_{12}, & a'_{13}, & \xi_1 \\ a_{21}, & a_{22}, & a'_{23}, & a'_{24}, & \xi_2 \\ a_{31}, & a_{32}, & a'_{33}, & a'_{34}, & \xi_3 \\ a_{41}, & a_{42}, & a'_{43}, & a'_{44}, & \xi_4 \\ 0, & 0, & \xi_3, & \xi_4, & 0 \end{vmatrix} + \text{atd.},$$

kde zkratka atd. značí součet obdobných pěti determinantů. Rozvineme-li tyto determinanty dle elementů posledních řádků, vidíme ihned, že τ a τ' jsou kvadratické v proměnných ξ a kubické v koefficientech a_{hk} a a'_{hk}; a s. jest τ kvadratické vzhledem k hodnotám a_{hk} a linearné vzhledem k a'_{hk}, kdežto τ' jest linearné v hodnotách a_{hk} a kvadratické v hodnotách a'_{hk}.

Ostatně lze kontravarianty σ, τ, τ', σ' *pomocí operací* (l. c. str. 95.)

$$\Gamma = \frac{\partial}{\partial a_{11}}\xi_1^2 + \frac{\partial}{\partial a_{22}}\xi_2^2 + \frac{\partial}{\partial a_{33}}\xi_3^2 + \frac{\partial}{\partial a_{44}}\xi_4^2 + \frac{\partial}{\partial a_{12}}\xi_1\xi_2 + \frac{\partial}{\partial a_{13}}\xi_1\xi_3$$

$$+ \frac{\partial}{\partial a_{14}}\xi_1\xi_4 + \frac{\partial}{\partial a_{23}}\xi_2\xi_3 + \frac{\partial}{\partial a_{24}}\xi_2\xi_4 + \frac{\partial}{\partial a_{34}}\xi_3\xi_4\,,$$

$$\Gamma' = \frac{\partial}{\partial a'_{11}}\xi_1^2 + \ldots + \frac{\partial}{\partial a'_{34}}\xi_3\xi_4\,,$$

vyvoditi z invariantů forem f a f'; vskutku lze snadno zverifikovati, že platí rovnosti

$$\Gamma(\Theta) = -\tau\,,\ \Gamma'(\Theta) = -\sigma\,,\ \Gamma'(\Theta') = -\sigma'\,,\ \Gamma'(\Theta') = -\tau'\,,$$
$$\Gamma(\Phi) = -\tau'\,,\quad \Gamma'(\Phi) = -\tau.$$

Počítáme-li kontravarianty σ, τ, τ', σ' pro kanonické tvary

$$f = a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_3^2 + a_4x_4^2, \qquad f' = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2,$$

snadno nalezneme

$$\begin{aligned} -\sigma &= a_2a_3a_3\xi_1^2 + a_3a_4a_1\xi_2^2 + a_4a_1a_2\xi_3^2 + a_1a_2a_3\xi_4^2, \\ -\sigma' &= \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 + \xi_4^2, \\ -\tau &= (a_2a_3 + a_2a_4 + a_3a_2)\,\xi_1^2 + (a_1a_3 + a_1a_4 + a_3a_4)\,\xi_2^2 \\ &\quad + (a_1a_2 + a_1a_4 + a_2a_4)\,\xi_3^2 + (a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3)\xi_4^2, \\ -\tau' &= (a_2 + a_3 + a_4)\,\xi_1^2 + (a_1 + a_3 + a_4)\,\xi_2^2 \\ &\quad + (a_1 + a_2 + a_4)\,\xi_3^2 + (a_1 + a_2 + a_3)\,\xi_4^2. \end{aligned} \tag{36}$$

Každý kontravariant forem f a f', jenž v proměnných ξ jest kvadratický, lze položiti do tvaru

$$A\sigma + B\tau + C\tau' + D\sigma',$$

v němž A, B, C, D jsou invarianty téhož indexu. Lze totiž jako l. c. pag. 102, ukázati, že takový kontravariant může při kanonických formách f a f' obsahovati pouze čtverce proměnných ξ, a tyto pak lze řešením posledních čtyr rovnic vyjádřiti kontravarianty σ, τ, τ', σ' a t. linearně.

Přihlížejíce ke kanonickým tvarům vidíme, že kvadratický kontravariant obsahuje pouze čtverce proměnných ξ, t. j„ že *repraesentuje, položen rovným nulle, plochu druhé třídy, jež s danými plochami má společný čtyrstěn polarný.*

22. **Geometrický význam vymizení základních kontravariantů.**

Rovnice $\sigma = 0$ vyjadřuje, že rovina ξ se dotýká plochy f a rovnice $\sigma' = 0$, že se dotýká plochy f'.

Praví tedy rovnice

$$\sigma\lambda^3 + \tau\lambda^2 + \tau'\lambda + \sigma' = 0,$$

že se rovina ξ dotýká plochy $\lambda f + f' = 0$; z toho patrno, že se dané roviny ξ dotýkají *tři* plochy svazku $\lambda f + f' = 0$, a sice ty, jež příslušÍ kořenům λ napsané rovnice. Pro tyto plochy se průsečná jich čára s rovinou ξ skládá ze dvou přímek, z čehož lze předvídati, že levá strana poslední rovnice jest as faktorem v diskriminantu kuželosečky

$$\lambda f + f' = 0, \qquad \xi_1 x\lambda + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 + \xi_4 x_4 = 0,$$

aneb jednodušeji řečeno, že σ bude as faktorem diskriminantu kuželosečky

$$f = 0, \qquad \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 + \xi_4 x_4 = 0.$$

A skutečně, supponujeme-li f v kanonickém tvaru

$$a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 + a_4 x_4^2,$$

obdržíme eliminací x_4 z posledních dvou rovnic formu ternarnou

$$\xi_4^2 (a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2) + a_4 (\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3)^2 = 0,$$

jejíž diskriminant jest

$$\xi_4^4 (a_2 a_3 a_4 \xi_1^2 + a_3 a_4 a_1 \xi_2^2 + a_4 a_1 a_2 \xi_3^2 + a_1 a_2 a_3 \xi_4^2),$$

t. j. $-\xi_4^4 \sigma$; při čemž ovšem supponujeme, že ξ_4 nemizí.

Je-li $f = \Sigma a_{hk} x_h x_k$ obecná forma a eliminujeme-li z rovnice

$$f = 0, \quad \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 + \xi_4 x_4 = 0$$

proměnnou x_4, obdržíme ternarnou formu

$$\begin{aligned}(37)\quad & \xi_4^2 (a_{11} x_1^2 + \ldots + 2 a_{23} x_2 x_3) + a_{44} (\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3)^2 \\ & - \xi_4 (2 a_{14} x_1 + 2 a_{24} x_2 + 2 a_{34} x_3)(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3) = 0,\end{aligned}$$

rovnici kužele promítajícího ze základního bodu IV kuželosečku společnou ploše f a rovině ξ; snadno lze zverifikovati, že diskriminant této formy jest opět $-\xi_4^4 \sigma$.

Plocha $f' = 0$ vede obdobně k ternarné formě

$$\begin{aligned}(38)\quad & \xi_4^2 (a'_{11} x_1^2 + \ldots + 2 a'_{23} x_2 x_3) + a'_{44} (\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3)^2 \\ & - \xi_4 (2 a'_{14} x_1 + 2 a'_{24} x_2 + 2 a'_{34} x_3)(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3) = 0.\end{aligned}$$

Invarianty těchto dvou ternarných forem jsou koefficienty při mocnostech λ v diskriminantu formy

$$\xi_4^2 [(\lambda a_{11} + a'_{11}) x_1^2 + \ldots + 2 (\lambda a_{23} + a'_{23}) x_2 x_3],$$

t. j. v hodnotě $-\xi_4^4 \sigma_{\lambda f + f'}$, čili v hodnotě

$$-\xi_4^4 (\sigma \lambda^3 + \tau \lambda^2 + \tau' \lambda + \sigma').$$

Značí tedy $\sigma = 0$, že se čára $f = 0$, $\Sigma \xi x = 0$ rozloží na dvě přímky, a $\sigma' = 0$, že se čára $f' = 0$, $\Sigma \xi x = 0$ rozloží na dvě přímky; *dále $\tau = 0$, že druhá čára jest opsána polarným trojúhelníkům první, a $\tau' = 0$, že první jest opsána polárným trojúhelníkům druhé* (l. c. str. 89.).

Rovina ξ se dotýká průsečné čáry ploch $f = 0$ a $f' = 0$, když se obě čáry dotýkají, t. j. když se dotýkají kužele (37) a (38); to se stane tenkráte, kdy rovnice

$$\sigma \lambda^3 + \tau \lambda^2 + \tau' \lambda + \sigma' = 0$$

má dva stejné kořeny λ, t. j. když vymizí její diskriminant

$$(39)\quad 4 (3 \sigma' \tau - \tau'^2)(3 \sigma \tau' - \tau^2) - (9 \sigma \sigma' - \tau \tau')^2 = 0.$$

Toť tedy rovnice průsečné čáry ploch f a f' v souřadnicích ξ: proměnné ξ do ní vcházejí v 8. stupni, *a jest tedy bikvadratická čára, společná dvěma plochám druhého stupně, osmé třídy.*

Tážeme-li se po obalující ploše všech rovin ξ, jež protínají plochy f a f' v takových kuželosečkách, že lze opsati první trojúhelník, jenž jest druhé vepsán, tedy máme dle l. c. pag. 91. výminku

$$(-\xi_4\tau)^2 = 4(-\xi_4^4\sigma)(-\xi_4^4\tau'),$$

t. j. jelikož $\xi_4 \gtrless 0$,

$$\tau^2 = 4\sigma\tau'$$

jakožto rovnici žádané plochy obalující.

23. **Kovarianty forem f a f'.**

Značíme-li stále literami A_{hk}, A'_{hk} minory diskriminantů Δ a Δ' kvadratických forem

$$f = \Sigma a_{hk} x_h x_k, \qquad f' = \Sigma a'_{hk} x_h x_k,$$

pak jsou

$$(40) \qquad -\sigma = \Sigma A_{hk}\xi_h\xi_k = 0, \quad -\sigma' = \Sigma A'_{hk}\xi_h\xi_k = 0,$$

rovnice týchž ploch v souřadnicích roviny. Oběma rovnicemi (39) jest stanovena rozvinutelná plocha, opsaná všem plochám soustavy

$$(41) \qquad \lambda\Sigma A_{hk}\xi_h\xi_k + \Sigma A'_{hk}\xi_h\xi_k = 0.$$

Rovnice plochy (41) v souřadnicích x jest dle čl. 12.

$$(42) \quad \begin{vmatrix} \lambda A_{11} + A'_{11}, & \lambda A_{12} + A'_{12}, & \lambda A_{13} + A'_{13}, & \lambda A_{14} + A'_{14}, & x_1 \\ \lambda A_{21} + A'_{21}, & \lambda A_{22} + A'_{22}, & \lambda A_{23} + A'_{23}, & \lambda A_{24} + A'_{24}, & x_2 \\ \lambda A_{31} + A'_{31}, & \lambda A_{32} + A'_{32}, & \lambda A_{33} + A'_{33}, & \lambda A_{34} + A'_{34}; & x_3 \\ \lambda A_{41} + A'_{41}, & \lambda A_{42} + A'_{42}, & \lambda A_{43} + A'_{43}, & \lambda A_{44} + A'_{44}, & x_4 \\ x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & 0, \end{vmatrix} = 0$$

čili, seřadíme-li dle mocnosti hodnoty λ,

$$K_3\lambda^3 + K_2\lambda^2 + K_1\lambda + K_0 = 0.$$

Kořeny λ této rovnice při daných hodnotách x_1, x_2, x_3, x_4 podávají ony tři plochy soustavy (41), jež procházejí bodem x.

Transformujeme-li linearnou substitucí hodnoty x_ν na $\overline{x_\nu}$, čímž ξ_ν, a_{hk}, A_{hk}... přejdou na $\overline{\xi_\nu}$, $\overline{a_{hk}}$, $\overline{A_{hk}}$,... přejde plocha (41) patrně na plochu

$$\lambda \Sigma \overline{A}_{hk} \overline{\xi}_h \overline{\xi}_k + \Sigma \overline{A}'_{hk} \overline{\xi}_h \overline{\xi}_k = 0.$$

a má tedy rovnice (41) utvořená s hodnotami transformovanými $\overline{A}_{hk}$, $\overline{A}'_{hk}$, $\overline{x_\nu}$ tytéž tři kořeny λ jako rovnice (42). Z toho soudíme, že platí proporce

$$K_3 : K_2 : K_1 : K_0 = \overline{K}_3 : \overline{K}_2 : \overline{K}_1 : \overline{K}_0$$

Avšak snadno nahlédneme, že hodnoty K_3 a K_0 jsou $-\Delta^2 f$ a $-\Delta'^2 f'$ a že hodnoty K_2, K_1, obsahují faktora Δ resp. Δ' tak že lze psáti

$$K_3 = -\Delta^2 f,\ K_2 = -\Delta T,\ K_1 = -\Delta' T',\ K_0 = -\Delta'^2 f',$$

a ovšem

$$\overline{K}_3 = -\overline{\Delta}^2 \overline{f},\ \overline{K}_2 = -\overline{\Delta}\overline{T},\ \overline{K}_1 = -\overline{\Delta}'\overline{T}',\ \overline{K}_0 = \overline{\Delta}'^2 \overline{f}'.$$

Jelikož ale

$$\overline{f} = f,\ \overline{\Delta} = D^2 \Delta,\ \overline{f}' = f'\ \overline{\Delta}' = D^2 \Delta',$$

soudíme z poslední proporce, že všecky čtyry hodnoty K_3, K_2 K_1, K_0 jsou *kovarianty indexu 4,* aneb že *hodnoty* T, T' *jsou kovarianty indexu* 2 *forem* f *a* f'.

Abychom naznačený tvar výrazů K zjistili, uvažme, že K_3 je determinant, v nějž (42) přejde, nahradímeli hodnoty $\lambda A_{hk} + A'_{hk}$ hodnotami A_{hk}; na základě rovnice (23) pak soudíme, že

$$K_3 = -\Sigma \delta_{hk}\, x_h\, x_k,$$

značíme-li δ_{hk} minor determinantu δ adjungovaného k Δ:

$$\delta = \Sigma \pm (A_{11}\ A_{22}\ A_{33}\ A_{44}).$$

Avšak dle známé věty platí rovnost $\delta_{hk} = \Delta^2 a_{hk}$, čímž skutečně

$$K_3 = -\Delta^2\ \Sigma\ a_{hk} \cdot x_h\ x_k = -\Delta^2 f;$$

obdobně

$$K_0 = -\Delta'^2 \Sigma a'_{hk} \; x_h \; x_k = -\Delta'^2 f'.$$

Dále nalezneme, právě tak jako v čl. 21., že

$$K_2 = \begin{vmatrix} A'_{11}, & A'_{12}, & A_{13}, & A_{14}, & x_1 \\ A'_{21}, & A'_{22}, & A_{23}, & A_{24}, & x_2 \\ A'_{31}, & A'_{32}, & A_{33}, & A_{34}, & x_3 \\ A'_{41}, & A'_{42}, & A_{43}, & A_{44}, & x_4 \\ x_1, & x_2, & 0, & 0, & 0 \end{vmatrix} + \text{atd.}$$

kde skratka atd. značí součet obdobných determinantů. Rozložímeli první determinant dle čtyřčlenných determinantů, utvořených z elementů třetího a čtvrtého sloupce, a obdobně ostatní determinanty, jest patrno, že každý člen v K_2 obsahuje jakožto faktor čtyrčlenný minor determinantu δ; takový minor se ale rovná součinu z Δ a přiřaděného čtyřčlenného minoru tohoto determinantu čímž dokázáno, že výraz K_2 má tvar $-\Delta$T,kde T značí racionalnou celistvou a homogenní funkci jak konceffícicentů a_{hk} a'_{hk}, tak proměnných x. Obdobně plyne tvar $-\Delta'$T' pro K_1.

Pro kanonické tvary máme

$$f = a_1 x_1^2 + a_2{}^2 x_2^2 + a_3 x_3{}^2 + a_4 x_4{}^2, \quad f' = x_1{}^2 + x_2{}^2 + x_3{}^2 + x_4{}^2,$$

$$\begin{aligned} T &= a_1 (a_2 + a_3 + a_4) x_1{}^2 + a_2 (a_1 + a_3 + a_4) x_2{}^2 \\ &\quad + a_3 (a_1 + a_2 + a_4) x_3{}^2 \; a_4 + (a_1 + a_2 + a_3) x_4{}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (43) \quad T' &= a_2 (a_2 a_3 + a_2 a_4 + a_3 a_4) x_1{}^2 + a_2 (a_1 a_3 + a_1 a_4 \\ &\quad + a_3 a_4) x_2{}^2 + a_3 (a_1 a_2 + a_1 a_4 + a_2 a_4) x_3{}^2 \\ &\quad + a_4 (a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_2 a_3) x_4{}^2. \end{aligned}$$

Každý kvadratický kovariant forem f a f' lze položiti do tvaru

$$Af + BT + B'T' + A'f',$$

v němž A, A', B, B', *jsou invarianty a s. poslední dva o indexu o dvě jednotky vyšším, než první dva.* Lze totiž týmž způsobem, jako l. c. pag. 100 ukázati, že takový kovariant může obsahovati toliko čtverce proměnných x, vycházíme-li z forem kanonických; řešením posledních čtyr rovnic (43) lze však $x_1{}^2$, $x_2{}^2$, $x_3{}^2$, $x_4{}^2$, vyjádřiti lianearně pomocí f, f', T, T'.

Přihlížejíce ke tvarům kanonickým, vidíme, že *kvadratický kovariant, položen roven nulle, repraesentuje plochu druhého stupně, jež má s danými plochami f a f' společný polárný čtyrstěn.*

24. Geometrický význam kovariantů T a T′, jich nahrazení reciprokými polárami daných ploch.

Rovnice

$$\Sigma A_{hk}\xi_h\xi_k = 0, \quad \Sigma x_h\xi_h = 0$$

repraesentují kužel opsaný z daného bodu x ploše f. Eliminujeme-li z obou souřadnici ξ_4 — při čemž ovšem předpokládáme $x_4 \gtrless 0$ — obdržíme ternarnou formu hodnot ξ_1, ξ_2, ξ_3, jež repraesentuje stopu onoho kužele na základní rovině I II III; obdobně elimiací ξ_4 z rovnic

$$\Sigma\ A'_{hk}\ \xi_h\ \xi_k = 0, \quad \Sigma\ x_h\ \xi_k = 0$$

obdržíme druhou ternarnou formu. Tak jako v čl. 22. soudíme opět, že invarianty těchto dvou ternarných forem jsou

$$-x_4^4\ K_3, -x_4^4\ K_2, -x_4^4\ K_1 - x_4^4\ K_0,$$

t. j.

$$-x_4^4\ \Delta^2 f, -x_4^4\ \Delta T, -x_4^4\ \Delta'\ T', -x_4^4\ \Delta'^2 f'.$$

Rovnice T′ $= 0$ *charakterisuje tedy body x, z nichž kužele plochám f a f' opsané mají tu vlastnost, že první prochází polarnými trojhrany druhého,* a T $= 0$ *jest geometrickým místem vrcholů opsaných kuželů, z nichž druhý prochází polarnými trojhrany prvního.*

Oba opsané kužele se dotýkají, t. j. *bod x se nalézá na rozvinutelné ploše oběma plochám f a f' opsané,* má-li rovnice (41) dva stejné kořeny λ, t. j. má-li rovnice

$$-x_4^4\ (\lambda^3\Delta^2 f + \lambda^2\Delta T + \lambda\Delta' T' + \Delta'^2 f') = 0$$

dva stejné kořeny λ. To vymáhá vymizení jejího diskriminantu

$$4\,(3\Delta'^2 f'\Delta T - \Delta'^2 T'^2)\,(3\Delta^2 f\Delta' T' - \Delta^2 T^2) - (9\Delta^2 f\Delta'^2 f' \\ -\Delta T\Delta' T')^2 = 0,$$

aneb, krátíme-li faktorem $\Delta^2\Delta'^2$

$$18\Delta\Delta' ff' T T' + T^2 T'^2 - 27\Delta^2\Delta'^2 f^2 f'^2 - 4\Delta' f T'^3 - 4\Delta f' T^3 = 0;$$

tato rovnice ukazuje, že rozvinutelná plocha jest stupně osmého, a že ovšem jest kovariantivnou plochou daných ploch f a f'.

Jakožto příklad k úvaze článku předchozího stanovme reciprokou polaru plochy f vzhledem k f', t. j. geometrické místo polů všech tečných rovin plochy f vzatých vzhledem k f'; plocha takto vytčená bude patrně kovariantivná, a jsouc druhého stupně, bude ji lze vyjádřiti kovarianty f, f', T, T'.

Vyjdeme-li z kanonických tvarů (42), jest rovnice plochy f v souřadnicích roviny:

$$a_2\, a_3\, a_4\, \xi_1^{\,2} + a_1\, a_3\, a_4\, \xi_2^{\,2} + a_1\, a_2\, a_4\, \xi_3^{\,2} + a_1\, a_2\, a_3\, \xi_4^{\,2} = 0.$$

Pol x roviny ξ vzhledem k f' má souřadnice $x_\nu = \xi_\nu$, a hoví tudíž tento pol rovnici

$$S = a_2\, a_3\, a_4\, x_1^{\,2} + a_1\, a_3\, a_4\, x_2^{\,2} + a_1\, a_2\, a_4 x_3^2 + a_1\, a_2\, a_3\, x_4^{\,2} = 0.$$

Vzhledem k (42) snadno zverifikujeme, že platí totožnost

$$S = (a_2\, a_3\, a_4 + a_1\, a_3\, a_4 + a_1\, a_2\, a_4 + a_1\, a_2\, a_3)(x_1^{\,2} + x_2^{\,2} + x_3^{\,2} + x_4^{\,2}) - T',$$

t. j.

$$(44) \qquad S = \Theta f' - T'.$$

Výraz $\Theta f' - T'$ jest patrně kovariant indexu 2, a položen roven nulle repraesentuje onu reciprokou polaru. Obdobně výraz

$$(45) \qquad S' = \Theta' f - T$$

položen roven nulle repraesentuje polárnou plochu plochy f' vzhledem k f vzatou.

Poněvadž

$$T = \Theta' f - S', \quad T' = \Theta f' - S,$$

můžeme kovarianty T a T' nahraditi novými kovarianty S a S', a tedy každý kvadratický kovariant forem f a f' vyjádřiti hodnotami f, f', S, S'.

Z napsaných rovnic jest patrno, že jednak plochy f, T, S', jinak tři plochy f', T', S mají společný pronik.

25. Transformace dvou kvaternarných kvadratických forem do tvarů kanonických jest opět jednou z hlavních applikací předchozích úvah o kovariantech a o kontravariantech.

Přejdou-li dané formy

$$f = \Sigma a_{hk}\, x_h\, x_k, \quad f' = \Sigma\, a'_{hk}\, x_h\, x_k$$

linearnou transformací o modulu D do kanonických tvarů

$$\bar{f} = \bar{a}_{11}\bar{x}_1^{\,2} + \bar{a}_{22}\bar{x}_2^{\,2} + \bar{a}_{33}\bar{x}_2^{\,2} + \bar{a}_{44}\bar{x}_4^{\,2},$$
$$\bar{f}' = \bar{x}_1^{\,2} + \bar{x}_2^{\,2} + \bar{x}_3^{\,2} + \bar{x}_4^{\,2},$$

přejde při libovolném λ forma $\bar{f} - \lambda\bar{f}$ do $f - \lambda f'$, obdržíme tedy diskriminant; druhé formy tím, že násobíme čtvercem modulu diskriminant formy první, t. j.

$$(\bar{a}_{11} - \lambda)\,(\bar{a}_{22} - \lambda)\,(\bar{a}_{33} - \lambda)\,(\bar{a}_{44} - \lambda) = D^2\,|a_{hk} - \lambda a'_{hk}|.$$

Z toho patrno, že koefficienty $\bar{a}_{hk}$ jsou kořeny bikvadratické rovnice

$$|a_{hk} - \lambda'_{hk}| = 0.$$

Utvoříme-li nyní pro kanonické tvary $\bar{f}, \bar{f}'$ dle rovnic (42) kovarianty T, T', lze řešením těchto rovnic dle $\bar{x}_1^{\,2}, \bar{x}_2^{\,2}, \bar{x}_3^{\,2}, \bar{x}_4^{\,2}$ tyto čtverce vyjádřiti pomocí hodnot $\bar{f}, \bar{f}'$, $\bar{T}, \bar{T}'$, $\bar{a}_{hh}$, t. j. pomocí hodnot f, f', $D^2 T$, $D\,T'$, a_{hh}, jež jsou vesměs známy, jelikož vzhledem k diskriminantu formy f' máme

$$D^2\Delta' = 1, \qquad D^2 = \frac{1}{\Delta'}.$$

Nalezené výkazy pro $\bar{x}_1^{\,2}, \bar{x}_2^{\,2}, \bar{x}_3^{\,2}, \bar{x}_4^{\,2}$ se musejí ovšem praesentovati jakožto úplné čtverce linearných funkcí souřadnic x, jež stačí odmocniti, aby se objevily žádané transformační formule.

Téhož cíle dojdeme pomocí kontravariantů. Dle formulí (36) lze totiž hodnoty $\bar{\xi}_1^{\,2}, \bar{\xi}_2^{\,2}, \bar{\xi}_3^{\,2}, \bar{\xi}_4^{\,2}$ vyjádřiti pomocí hodnot $\bar{\sigma}$ $\bar{\sigma}'$, $\bar{\tau}$, $\bar{\tau}'$, a_{hh}, t. j. pomocí hodnot $D^2\sigma$, $D^2\sigma'$, $D^2\tau$, $D^2\tau$, a_{hh}; výrazy ty budou opět úplnými čtverci linearných funkcí hodnot ξ, jichž odmocněním nabýváme transformačních formulí, převádějících $\bar{\xi}$ do ξ. Tím opět nalezena transformace, jež převádí f a f' do kanonických tvarů.

Příslušné formule pro jich rozvláčnost sem neklademe.

26 Jacobi-ho kovariant a kontravariant.

Tak jako l. c. pag. 113 lze i zde ukázati, že Jacobi-ho determinant čtyř forem f f', f'', f''', o čtyrech proměnných x_1, x_2, x_3, x_4,

$$J = \Sigma \pm \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial f'}{\partial x_2} \frac{\partial f''}{\partial x_3} \frac{\partial f'''}{\partial x_4}\right)$$

jest kovariantem indexu 1. Jsou-li f, f', f'', f''' formy kvadratické, tu t. z. plocha *Jacobi-ho* $J = 0$ patrně jest geometrickým místem bodů x, jejichž polárné roviny, vzhledem k plochám $f = 0$, $f' = 0$, $f'' = 0$, $f''' = 0$ stanovené, procházejí jedním bodem. V případě, kdy tyto čtyry plochy mají společný polárný čtyrstěn a kdy tedy lze předpokládati

$$f = \Sigma a_h x_h^2, \quad f' = \Sigma a'_h x_h^2, \quad f'' = \Sigma a''_h x_h^2, \quad f''' = \Sigma a'''_h x_h^2,$$

snadno nalezneme

$$J = 16\, x_1 x_2 x_3 x_4\, \Sigma \pm (a_1 a'_2 a''_3 a'''_4),$$

tak že plocha *Jacobi-ho* v tomto případu se skládá ze čtyř stěn společného čtyrstěnu polárného.

Zvolíme-li za čtyři plochy dvě libovolné plochy f, f', a kovariantivné plochy $T = 0$, $T' = 0$, obdržíme při kanonických tvarech (43) *Jacobi-ho* kovariant

$$J = 16\,(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)(a_1 - a_4)(a_2 - a_3)(a_2 - a_4\,(a_3 - a_4)\; x_1 x_2 x_3 x_4.$$

Jako l. c. pag. 115 plyne i zde, *že každý kovariant forem f a f' lze vyjádřiti jakožto racionalnou, celistvou funkci o invariantivných koefficientech výrazů f a f' a kovariantů* T, T', J. Je-li index daného kovariantu číslo sudé, lze jej vyjádřiti již pomocí f, f', T, T', je-li ale číslem lichým, lze jej položiti do tvaru JL, a L značí kovariant o indexu sudém.

Tak na př. jest čtverec J^2 kovariant o indexu 2, a lze jej tudíž vyjádřiti racionalně pomocí f, f' T, T' invariantů Δ, Δ', Θ, Φ, Θ'; příslušný výraz jest v *Salmon-Fiedler*, Analytische Geometrie des Raumes, I. díl (2. vydání) na str 292. podán. Zcela obdobně vychází, *že každý kontravariant kvadratických forem f a f' lze vyjádřiti jakožto racionalnou funkcí kontravariantů* σ, σ', τ, τ' *a jich funkcionalného determinantu* I, *o invariantivných koefficientech.* Je-li index kontravariantu číslo sudé, lze jej vyjádřiti pomocí σ, τ, σ', τ', je-li ale liché, má nutně tvar IL, v němž L značí kontravariant o indexu sudém. *Jacobi-ho* kontravariant I, utvořený z výrazů σ, σ', τ, τ', má index 7, jakož snadno způsobem l. c. pag. 117 vyloženým vychází, a redukuje se v případě kanonických forem f, f' v podstatě na součin $\xi_1 \xi_2 \xi_3 \xi_4$, tak že rovnice $I = 0$ repraesentuje vrcholy společného polárného čtyrstěnu daných ploch.

Poukazuje v příčině dalších příkladův a applikaci na cit. dílo *Salmon Fiedlerovo*, zůstavuji obdobné úvahy o smíšených formách době pozdější.

Příspěvek ku stanovení středů křivosti trajektorií vytvořených při pohybu nepromënného útvaru rovinného v jeho rovině.

Napsal

Bedřich Procházka.

professor na realce Karlinské

Ve článku: „O jistém druhu křivek", uveřejněném ve IV. čísle XXIV. ročníku tohoto časopisu, použil jsem při sestrojování středu křivosti konstrukce, které se dá s prospěchem užíti také při *trochoidách*, a jelikož lze každý pohyb nepromënného útvaru rovinného v jeho rovině se šinoucího pokládati za pohyb kotálení, také ***při trajektoriích vytvořených body libovolně se pohybujícího nepromënného útvaru rovinného.***

1. Kotálí-li se křivka A, nalézající se v pohybující se rovině A, po křivce K, ležící v rovině M, kteráž svou polohu nemění, pak můžeme pokládati tento pohyb za pohyb *torný* a současný pohyb *posuvný* křivky A po křivce K, při nichž se rovná oblouk, kterým se ona křivka tře, oblouku této křivky, po kterém se posouvá. Následkem současných těchto dvou pohybů, které v každém okamžiku jsou vlastně pohyby otáčení kol středů křivosti ^1o a ^2o křivek A a K, zůstane bod jejich dotyku s v poloze stálé a bude okamžitým středem otáčení, kterým procházejí normaly trochoid vytvořených body hybné roviny.

Zvolíme-li při posouvání křivky A úhlovou rychlost otáčení kol středu ^2o za jednotku, pak představuje vzdálenost $\overline{a^2o}$ jakéhokoliv bodu a, náležejícího pohybující se rovině A, od