Josef Husák

Přibližné řešení kvadratury kruhu

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 26 (1897), No. 4, 255--257

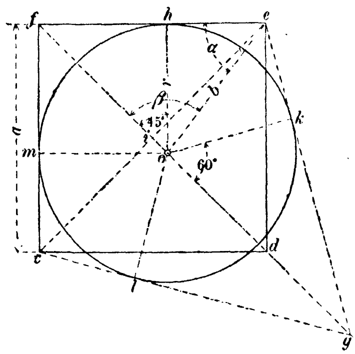
Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121662

Přibližné řešení kvadratury kruhu.

Podává

Josef Husák,
fotograf v Berouně.

Budiž *cdef* čtverec o straně *a*. Nad úhlopříčnou *ce* sestrojme rovnostranný trojúhelník *ceg* a do deltoidu *cfeg* vepišme kružnici *hklm* o středu *o*. Pak lze dokázati, že *plocha kruhu hklm přibližně = ploše čtverce cdef a že chyba nepřesahuje 0 6%*.



Důkaz. Označme poloměr kruhu $oh = r$ a délku $oe = b$ Střed *o* obdržíme půlením úhlu *feg*.

Poněvadž $\sphericalangle fei = 45^0$ a $\sphericalangle ieg = 60^0$, jest

$$\alpha = \frac{60^0 + 45^0}{2} = 30^0 + \frac{45^0}{2}$$

a z toho dále

$$\beta = 180^0 - 45^0 - \alpha = 60^0 + \frac{45^0}{2}.$$

Chtějíce vypočísti poloměr *r* ze strany *a*, vypočteme především *b* a z toho pak *r*.

Z $\triangle$ *feo* jest

$$a : b = \sin\beta : \sin 45^0 = \sin\left(60^0 + \frac{45^0}{2}\right) : \sin 45^0,$$

z čehož

$$b = \frac{a \sin 45^0}{\sin\left(60^0 + \frac{45^0}{2}\right)}.$$

Jest pak dále

$$r = b \sin \alpha = b \sin \left(30^0 + \frac{45^0}{2}\right)$$

a po dosazení za b

$$r = \frac{a \sin 45^0 \sin \left(30^0 + \frac{45^0}{2}\right)}{\sin \left(60^0 + \frac{45^0}{2}\right)} = \frac{a \sin 45^0 \sin \left(30^0 + \frac{45^0}{2}\right)}{\cos \left(30^0 - \frac{45^0}{2}\right)}.$$

Rozvine-li se v čitateli $\sin \left(30^0 + \frac{45^0}{2}\right)$ a ve jmenovateli $\cos \left(30^0 + \frac{45^0}{2}\right)$ a dělí-li se pak čitatel i jmenovatel $\cos \frac{45^0}{2}$, obdrží se:

$$r = \frac{a \sin 45^0 \left(\sin 30^0 + \cos 30^0 \operatorname{tg} \frac{45^0}{2}\right)}{\cos 30^0 + \sin 30^0 \operatorname{tg} \frac{25^0}{2}}.$$

Jest však

$$\sin 45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sin 30^0 = \frac{1}{2}, \quad \cos 30^0 = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

takže

$$r = \frac{a\sqrt{2}\left(1 + \sqrt{3} \operatorname{tg} \frac{45^0}{2}\right)}{2\left(\sqrt{3} + \operatorname{tg} \frac{45^0}{2}\right)}.$$

Vypočte-li se dále $\operatorname{tg} \frac{45^0}{2}$ z hodnoty $\operatorname{tg} 45^0 = 1$ dle známého vzorce pro tangentu polovičného úhlu, bude

$$\operatorname{tg} \frac{45^0}{2} = -1 + \sqrt{2},$$

což dosazeno dá

$$r = \frac{a\sqrt{2}\,(1 - \sqrt{3} + \sqrt{6})}{2(\sqrt{3} + \sqrt{2} - 1)}.$$

Učiníme-li dle známých pravidel jmenovatele směrným, obdržíme

$$r = \frac{a(\sqrt{6}+\sqrt{2}-\sqrt{3}-1)}{2} = \frac{a(\sqrt{3}+1)(\sqrt{2}-1)}{2}.$$

Poněvadž

$$\sqrt{3}+1 = 2{\cdot}7320508$$

a

$$\sqrt{2}-1 = 0{\cdot}4142136,$$

vychází

$$r = 0{\cdot}56582625a$$

a z toho dále $r^2 = 0{\cdot}32015934a^2$,

tedy plocha kruhu $\pi r^2 = 1{\cdot}00581023a^2$.

Z výsledku toho zřejmo, že *plocha kruhu jest přibližně o 0·6%, větší než plocha čtverce, c. b.* d.

Jedná-li se naopak o kvadraturu daného kruhu, t. j. o přeměnu jeho ve stejnoplochý čtverec, pokračujeme na základě právě uvedeného takto:

Středem o daného kruhu veďme libovolnou přímku fg a k této přímce narýsujme úhly $foh = 45^0$ a $gok = 60^0$; tím obdrží se na kružnici body h a k; tečny v těchto bodech sestrojené ke kruhu určují body e a f, čímž úloha řešena.

Pozn.redakce. Kratší cestou lze k výsledku dospěti takto: V deltoidu $cfeg$ jsou strany

$$cf = fe = a,\quad cg = ge = a\sqrt{2}$$

a úhlopříčky

$$ce = a\sqrt{2},\quad fg = \frac{a}{2}\sqrt{2}\,(1+\sqrt{3}).$$

Jest tudíž obsah jeho

$$P = \frac{1}{2}\overline{ce}\,.\,\overline{fg} = \frac{a^2}{2}(1+\sqrt{3});$$

avšak také jest

$$P = (\overline{cf}+\overline{cg})\,.\,r = ar\,(1+\sqrt{2}),$$

pročež

$$r = \frac{a^2(1+\sqrt{3})}{2a\,(1+\sqrt{2})} = \frac{a}{2}(\sqrt{3}+1)(\sqrt{2}-1).$$