Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Karel Vorovka

O pravděpodobnosti příčin

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 43 (1914), No. 1, 81--93

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121670

O pravděpodobnosti příčin.

Napsal dr. K. Vorovka.

Studujíce některé odvětví mathematiky požadujeme obyčejně, abychom poznali obecné methody, kterými bylo by možno každou předloženou úlohu řešiti. Tak na př. analytická geometrie podává obecný návod, jak najíti bod dvěma geometrickým místům společný. Naproti tomu v planimetrii často býváme odkázáni na vtip, na šťastný nápad, a kolikrát již asi mnohý z nás odložil úlohu planimetrickou nemoha nalézti cesty k jejímu rozřešení!

Počet pravděpodobnosti patří právě k těm částem mathematiky, kde obecné methody zdánlivě chybějí. Pamatuji se, jak před lety mne odstrašila od dalšího studia počtu pravděpodobnosti znamenitá kniha Bertrandova „Calcul des probabilités“. Spisovatel počíná si tam velmi obezřele — jak jsem ovšem teprve mnohem později prohlédl. Burcuje pozornost čtenářovu a vybízí jej k opatrným závěrům tím, že rychle za sebou nechá jej podlehnouti klamům v několika příkladech, které neobyčejně svádějí k závěrům chybným. A v počtu pravděpodobnosti věru musíme se míti na pozoru! Vždyť známe z historie památné příklady, jak i duchové vynikající, jako byli Leibnitz aneb d'Alembert, usuzovali v jednoduchých úlohách tohoto počtu zcela nesprávně. Bylo to tedy velmi dobře odůvodněno, že Bertrand umístil obecný návod k řešení podobných příkladů teprve do kapitol pozdějších, a raději upozornil hned zprvu čtenáře, jak nebezpečno jest v počtu pravděpodobnosti spoléhati na „premiers aperçus“.

Nechci však v tom Bertranda napodobiti a pokusím se napřed vyložiti obecný vzorec ku řešení úloh o t. zv. pravděpodobnosti příčin, a pak teprve vrátíme se k onomu Bertrandovu příkladu, který svého času i znamenité znalce počtu pravděpodobnosti svedl k chybnému závěru.

Zesnulý professor Pánek, bývalý redaktor tohoto časopisu, přimlouval se zde ve XII. ročníku, aby theorém o pravděpodobnosti příčin byl také vykládán na střední škole. Snad v nynější době, kdy učebnice Bydžovského vykládá předůležitý *zákon velkých čísel*, nebude zbytečným stručný pohled na jiný důležitý princip počtu pravděpodobnosti.

Stojí před námi dvě stejná osudí, která zvenčí ničím od sebe se nerozeznávají. Víme však předem — čili *a priori* —, že jedno z nich A obsahuje dvě bílé koule a druhé B jednu kouli bílou a jednu černou. Naší úlohou jest hádati, které z obou jest osudí B. Zvolíme-li nahodile jedno z obou osudí, tu pravděpodobnost, že uhodli jsme osudí B, jest *a priori* rovna $\frac{1}{2}$. Poměry však se pozmění, přistoupí-li ku vědění, které nám *a priori* bylo dáno, ještě nějaká zkušenost. Tuto zkušenost si na př. zjednáme tím, že do zvoleného osudí sáhneme a vyzvedneme jednu z obou koulí. Táhneme-li černou, nabýváme úplné jistoty a přestává počítání jakékoli pravděpodobnosti. Táhneme-li však kouli bílou, tu tato *zkušenost* nezůstane bez vlivu na náš úsudek a budeme již s jinou pravděpodobností očekávati, že osudí námi zvolené obsahuje druhou kouli černou. Tato nová pravděpodobnost, teprve po vykonané zkoušce stanovená, nazývá se pravděpodobnost *a posteriori**)

Někdo by v tomto případě usuzoval — ovšem nesprávně — že pravděpodobnost i po zkušenosti zůstala rovna $\frac{1}{2}$; odvolával by se na to, že koule v osudí zbývající může právě tak snadno býti bílá jako černá. Správně však budeme pro ono osudí již jen s pravděpodobností $\frac{1}{3}$ očekávati, že obsahuje také kouli

---

*) Názvy a priori = z dřívějšího, a posteriori = z pozdějšího, zavedeny byly do počtu pravděpodobnosti Jakubem Bernoullim v posmrtném díle Ars conjectandi 1713. Příčina předchází, jest dřívější — účinek následuje, jest pozdější.

černou; neboť jsou celkem tři bílé koule, které všechny stejně snadno mohou býti taženy. Z těchto tří možných případů jest však jen jeden tomu příznivy, aby koule v osudí zbývající byla skutečně černá.

Z příkladu právě uvedeného lze snadno poznati širší typ úloh sem spadajících. Jsou opět dána dvě stejná osudí, z nichž A obsahuje ve značné převaze koule bíle a druhé B má převahu černých. Učinili jsme pokus několika po sobě následujícími tahy kouli zpět vracejíce, a ukázala se vícekráte koule bílá než černá. Jaká jest pravděpodobnost, že k tahům zvolili jsme osudí A? — Zde opět již budeme souditi *a posteriori*; pozorujeme účinek a soudíme zpět na příčinu, totiž na převahu bílých koulí v osudí. Proto se používá méně vhodného názvu „pravděpodobnost příčin". Správněji mělo by se říkati pravděpodobnost hypothes, domněnek. Úkaz pozorovaný — na př. převaha bílých koulí v tazích — možno totiž vysvětlovati dvěma různými domněnkami. Předně tou domněnkou, že tahy dějí se z osudí A; to jest patrně hypothesa pravděpodobnější. Druhá, méně pravděpodobná, ale přece jen přípustná domněnka byla by, že tahy děly se z osudí B, které má převahu černých koulí, že však náhoda byla přízniva bílým. Naší úlohou jest pravděpodobnosti všech možných domněnek číselně vyjádřiti.

A tu ihned otevírá se před námi široký výhled na problémy zcela podobné. Příklady:

Kostka byla vržena 10kráte a 8krát padla šestka. Rozhodnouti mezi dvěma domněnkami; buď že kostka je falešná, aneb že úkaz pozorovaný stal se pouhou náhodou.

Dostáváme zprávu o neuvěřitelném nějakém ději a máme posouditi, co má větší pravděpodobnost, zda možnost výjimečné náhody či nepravdivost zprávy?

Pozorujeme husté skupení hvězd; vypočítati pravděpodobnost, že jest to skupina fysická a nikoliv jen optická.

Čísla atomových vah blíží se velice číslům celým; jest to pouhá náhoda, či má to hlubší důvod v nějakém přírodním zákonu?

Laplace zjistil, že v Paříži byl po dlouhou řadu let relativní počet novorozeňat mužského pohlaví menší než v Londýně. Jest vyjádřiti číselně pravděpodobnost, že tento rozdíl nebyl způsoben náhodou, nýbrž nějakou stálou příčinou.

Tato perspektiva problémů vysvětluje, proč Condorcet, Laplace, Poisson a mnozí jiní mathematikové s takovým nadšením přikročili k překotným a neospravedlněným applikacím počtu pravděpodobnosti. Proto jest nutno hned předem prozraditi, že většina podobných úloh se číselnému vyjádření vymyká, jak ostatně i z dalšího vysvitne.

Přistupme nyní k obecné formulaci úlohy. Byl pozorován nějaký úkaz, který mohl býti způsoben několika různými příčinami. Každé z nich přísluší určitá a nám *a priori* známá pravděpodobnost. Označme tyto pravděpodobnosti $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n$. Při tom ovšem předpokládáme, že těchto n možností se navzájem vylučuje a že jiných možností není, což vyjádří se rovnicí $\omega_1 + \omega_2 + \ldots + \omega_n = 1$. Působí-li však některá z těchto příčin, nemusí úkaz pozorovaný nastati *nutně*, nýbrž opět jen s nějakou nám předem známou pravděpodobností p_k, kdež přípona k označuje, která z příčin působí. Máme vypočítati, jaká pravděpodobnost *a posteriori*, t. j. na základě zkušenosti přísluší kterékoliv z možných příčin.

Abychom tuto úlohu mohli řešiti, musíme si sestaviti vhodné schema, vhodný obraz. Mysleme si osudí, které obsahuje značný počet bílých a černých koulí, jež očíslovány jsou číslicemi od 1 do n. Tím rozděleny jsou do n skupin a je snadno jich počet v každé skupině tak zvoliti, aby pravděpodobnost, že tažena bude koule ze skupiny k-té, byla *a priori* rovna ω_k. Je-li totiž celkový počet všech koulí N, pak nechť k-tá skupina obsahuje celkem $O_k = \omega_k . N$ koulí. Koule stejně očíslované a tedy do jedné skupiny patřící nechť sestávají z bílých a černých v takovém poměru, aby pro tah bílé koule z určité skupiny pravděpodobnost byla p_k. Toho patrně docílíme, jestliže ze všech koulí k-té skupiny v počtu O_k učiníme $o_k = p_k O_k$ bílých a ostatní černé. Tím jest již naše schema připraveno. Jednotlivé příčiny jsou patrně zastoupeny různými skupinami. Úkaz pozorovaný, toť tah bílé koule. Tážeme-li se v původní úloze po příčině úkaz způsobivší, znamená to v našem schematu otázku, s jakou pravděpodobností lze čekati, že na tažené bílé kouli bude napsána číslice k. K této otázce však možno snadno odpověděti. Kterákoli bílá koule z kterékoli skupiny může býti stejně snadno tažena. V k-té skupině jest bílých koulí $o_k = p_k O_k = p_k \omega_k N$. Všech bílých koulí jest $o_1 + o_2 + \ldots + o_n$. Pravděpodobnost hledaná tedy jest vyjádřena zlomkem

$$\frac{o_k}{o_1 + o_2 + \ldots + o_n}.$$

Dosazením hořejšího výrazu za všecka o_k a zkrácením dojdeme konečného vzorce pro pravděpodobnost k-té hypothesy stanovenou *a posteriori*:

$$h_k = \frac{\omega_k p_k}{\omega_1 p_1 + \omega_2 p_2 + \ldots + \omega_n p_n}.$$

Jednoduchý tento vzorec jest principiální důležitosti pro počet pravděpodobnosti a uvádí se často pod názvem *Bayesův theorém.**) Jeho používání osvětlíme několika příklady:

1. V prvém našem příkladě o dvou osudích z nichž prvé obsahuje dvě bílé koule a druhé 1 bílou a 1 černou, jest patrně $\omega_1 = \omega_2 = \frac{1}{2}$, $p_1 = 1$, $p_2 = \frac{1}{2}$. Byla-li tažena koule bílá, pak pravděpodobnost, že jedná se o druhé osudí, jest

$$h_2 = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{1}{3}.$$

jak jsme již dříve přímou úvahou odvodili.

2. Příklad Bertrandův. — Každá ze tří stejných skřínek A, B, C opatřena jest dvěma zásuvkami. Obě zásuvky skřínky A obsahují po jednom zlatém penízi, obě zásuvky skřínky B obsahují po jednom stříbrném penízi a ve skřínce C obsahuje jedna zásuvka peníz zlatý a druhá peníz stříbrný. V jedné skřínce byla otevřena jedna zásuvka a nalezen v ní peníz zlatý. Jaká jest pravděpodobnost, že je to skřínka C?

Zde jest patrně pravděpodobnost *a priori*, že některou skřínku vyvolíme, pro všechny skřínky stejná $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \frac{1}{3}$.

*) Dle angl. mathematika J. Bayesa, který k výpočtům takovým dospěl při řešení zcela zvláštní úlohy o kulečníku. V celé obecnosti vyložen však princip tento teprve Laplacem.

Že pak v zásuvce nahodile otevřené najdeme peníz zlatý, toho pravděpodobnosti jsou $p_1 = 1$, $p_2 = o$, $p_3 = \frac{1}{2}$. Tudíž pravděpodobnost *a posteriori*, že našli jsme skřínku C, jest

$$h_3 = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{1}{3}.$$

V příkladě tomto jsou poměry takové, že získaná zkušenost zůstane bez vlivu na pravděpodobnost hypothesy, která jest jak *a priori* tak *a posteriori* stejně rovna $\frac{1}{3}$. To asi bylo příčinou omylu, kterému někteří mathematikové podlehli. Soudili totiž takto: Zkušenost získaná — zlatý peníz v zásuvce — vylučuje případ skřínky B. Tím ze tří skřínek zbývají jen dvě a tudíž se pravděpodobnost změní z $\frac{1}{3}$ na $\frac{1}{2}$. Že ale takto souditi nesmíme, to bylo již v příkladu prvním vyloženo.

3. V Borelově učebnici čteme tento příklad: Ze dvou tříd po 20 žácích obsahuje prvá 10 dobrých žáků, 5 prostředních a 5 špatných, druhá 5 dobrých, 5 prostředních a 10 špatných žáků. Inspektor vyzkoušel z každé třídy jednoho žáka nahodile zvoleného a shledal, že žák třídy A jest lepší než žák třídy B. Jaká jest pravděpodobnost, že třída A jest první z obou tříd?

Kombinujeme-li do párů po jednom žáku z každé třídy, jest $10 \times 15 + 5 \times 10 = 200$ kombinací, při kterých se žák prvé třídy jeví lepším; podobně jest $10 \times 5 + 5 \times 5 + 5 \times 10 = 125$ kombinací, ve kterých se oba žáci jeví stejnými; a konečně jest $5 \times 10 + 5 \times 5 = 75$ kombinací, v nichž se jeví lepším žák třídy druhé. Všechny tyto kombinace jsou stejně možny. Pravděpodobnost, že prvá třída dodá do páru žáka lepšího, jest

$$p_1 = \frac{200}{200 + 125 + 75} = \frac{1}{2};$$

podobně, že druhá třída dodá do páru žáka lepšího, jest

$$p_2 = \frac{75}{200 + 125 + 75} = \frac{3}{16}.$$

Z toho, uvážíme-li ještě, že třída A mohla býti *a priori* stejně snadno buď lepší či horší, vychází *a posteriori*

$$h_1 = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{16}} = \frac{8}{11} = 0\dot{7}\dot{2}$$

4. Značné nesnáze mohou vzniknouti, když nelze číselně vyjádřiti pravděpodobnosti $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n$, které *a priori* jednotlivým hypothesám přísluší. V učebnicích illustruje se to obyčejně příkladem následujícího typu:

Petr hraje v kostky s hráčem mu neznámým. Největší výhra připadá tomu, kdo hned prvním vrhem na obou kostkách vrhne po šestce. Jakmile došla řada na neznámého, vrhnul tento dvě šestky. Jaká je pravděpodobnost, že je to falešný hráč?

Budiž ω_1 pravděpodobnost *a priori*, že neznámý hraje falešně, a ω_2 že hraje poctivě Pak pravděpodobnost, že při poctivé hře podaří se mu onen vrh, jest

$$p_2 = \frac{1}{36},$$

kdežto při falešné hře jest $p_1 = 1$. Pravděpodobnost, že nehraje poctivě, jest tedy *a posteriori*

$$h_1 = \frac{\omega_1 \cdot 1}{\omega_1 \cdot 1 + \omega_2 \cdot \frac{1}{36}}.$$

Kdybychom v tomto zlomku kladli

$$\omega_1 = \omega_2 = \frac{1}{2},$$

vycházelo by

$$h_1 = \frac{36}{37} = 0{\cdot}97\ldots,$$

což by znamenalo skoro jistotu, že jedná se o podvod. To jest ovšem výsledek, který se příčí zdravému rozumu; úloha tato není řešitelna, protože nelze *a priori* vyčísliti, ba často ani zhruba oceniti pravděpodobnost, že setkali jsme se s člověkem nepoctivým.

5. Abychom jasně poznali rozdíl mezi úlohou, kde oceňování pravděpodobností *a priori* jest provedeno jednou bez informací a podruhé s informacemi, tomu snad poslouží ještě tento poslední příklad:

Osudí obsahuje bílé a černé koule ve známém celkovém počtu n; při prvém tahu objevila se koule bílá, která byla zase zpět vložena. Jaká je pravděpodobnost, že osudí obsahuje m koulí bílých a ostatní černé?

a) Nejsme-li informováni, jakým způsobem bylo osudí plněno, pak z nedostatku důvodů svědčících spíše jednomu než druhému složení musíme každý poměr považovati za stejně pravděpodobný. *A priori* budou tedy pravděpodobnosti

$$\omega_0 = \omega_1 = \omega_2 = \ldots = \omega_n = \omega$$

vesměs stejné; při tom indexy 0, 1, 2, ... n označují, kolik bílých koulí v osudí předpokládáme. Je-li splněna k-tá hypothesa, že v osudí jest k bílých koulí, pak pravděpodobnost, že uskuteční se zjev pozorovaný, totiž tah bílé koule, jest

$$p_k = \frac{k}{n}.$$

Použitím Bayerova vzorce vychází pak *a posteriori* pravděpodobnost, že v osudí jest právě m bílých koulí, co zlomek

$$h_m = \frac{\omega \cdot \frac{m}{n}}{\omega \cdot \frac{0}{n} + \omega \cdot \frac{1}{n} + \omega \cdot \frac{2}{n} + \ldots + \omega \cdot \frac{n}{n}},$$

který zkrácen dává

$$\frac{2m}{n\,(n+1)}.$$

b) Ve skutečnosti však zdá se býti psychologicky zjištěným faktem, že někteří lidé dávají určitým číslům přednost před jinými. Složení osudí by se tedy řídilo různým zákonem pravděpodobnosti dle toho, zdali by osoba osudí připravující buď vědomě se rozhodovala pro různá čísla, aneb zda-li by snad sahala pouze do větší zásoby bílých a černých koulí pro koule jednotlivé a vkládala je do našeho osudí.

Uvažujme právě tuto druhou možnost. Sestavení osudí bude ponecháno náhodě. Z veliké zásoby koulí, která pro tah bílé neb černé koule bude stále poskytovati pravděpodobnost rovnou na př. $\frac{1}{2}$, bude postupně vytaženo oněch n koulí, které mají tvořiti obsah osudí. Tu již nebudou pravděpodobnosti *a priori* pro každé složení osudí sobě rovny. Má-li totiž z oné zásoby býti taženo napřed k bílých koulí a pak $n-k$ černých, tu složená pravděpodobnost vypočítá se co součin

$$\left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Téhož počtu bílých koulí možno však docíliti také každým jiným pořádkem, v němž oněch k bílých a $n-k$ černých koulí za sebou může býti taženo. Takových permutací s opakovanými prvky možno však vytvořiti

$$\frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{k}.$$

Tím vychází *a priori* celková pravděpodobnost

$$\omega_k = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Dosadíme-li nyní do Bayesova vzorce, obdržíme v čitateli

$$\omega_m p_m = \binom{n}{m}\left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \frac{m}{n} = \binom{n-1}{m-1}\left(\frac{1}{2}\right)^n,$$

ve jmenovateli pak

$$\frac{1}{n}\left[\binom{n}{1}1 + \binom{n}{2}2 + \binom{n}{3}3 + \ldots + \binom{n}{n}n\right] \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Výraz v závorce má však hodnotu $n \,.\, 2^{n-1}$ *). Konečný výsledek pak jest

$$h'_m = \frac{1}{2^{n-1}} \cdot \binom{n-1}{m-1}.$$

Přirovnejme nyní číselně případ *a*) s případem *b*). Předpokládejme na př. $n = 8$.

*) Viz 16. úlohu z ročníku XLII.

Při prvé úvaze přísluší největší pravděpodobnost domněnce, že osudí obsahuje všechny koule bílé. Vychází

$$h_8 = \frac{8}{36} = 0{\cdot}222 \ldots$$

Při druhé úvaze přísluší největší pravděpodobnost domněnce, že osudí obsahuje 4 bílé koule, a jest vyjádřena zlomkem

$$\frac{1}{2^7} \,.\, 35 = 0{\cdot}273 \ldots;$$

stejná pravděpodobnost přísluší také domněnce, že bylo by 5 bílých koulí Domněnka, že by osudí obsahovalo jen bílé koule, byla by v druhé úvaze vyznačena jen velmi malou pravděpodobností

$$h'_8 = \frac{1}{2^7} = 0{\cdot}007 \ldots$$

Dosavad jsme se zabývali úsudky, které nás od známého účinku vedly nazpět ku příčině jej způsobivší. Dle zkušenosti, kterou jsme získali, můžeme však také souditi, jak v budoucnu za podobných okolností úkazy budou probíhati. Jako *a priori* soudíme s pravděpodobností rovnou $\frac{1}{6}$, že kostka na stůl vržená ukáže na př. šestku, právě tak můžeme *a posteriori* vypočítati pravděpodobnost, že mezi příštími tahy z osudí předchozími tahy zkoušeného bude určitý počet koulí bílých a černých. Při tom neznáme sice přesné složení osudí, ale můžeme přece pomocí předchozí zkušenosti, kterou jsme si dřívějšími tahy opatřili, i příští tahy s určitou pravděpodobností očekávati. Něco podobného děje se stále ve vědách přírodních, které ze zkušenosti soudí analogií a indukcí na příští úkazy.

Zabývejme se tedy touto úlohou: Bylo r-kráte zjištěno, že když dostavil se úkaz A, následoval vždy po něm úkaz B. Jaká jest pravděpodobnost, že i v budoucnosti, až dostaví se úkaz A, bude opět sledován úkazem B?

Abychom přizpůsobili tuto úlohu počtu pravděpodobnosti, mysleme si schematicky, že z osudí, do něhož r-kráte bylo sáhnuto (úkaz A), pokaždé byla vyzdvižena bílá koule (úkaz B).

Jaká jest pravděpodobnost, že i příštím tahem bílou kouli vyzvedneme?

Kdybychom mohli předpokládati, že v osudí jest obsaženo n koulí, mohli bychom ihned použíti výsledku úlohy 5a), s tou pouze změnou, že místo jednoho tahu bylo by r tahů. Místo zlomků $\frac{k}{n}$ stály by zlomky $\left(\frac{k}{n}\right)^r$. Tak bychom vypočítali pravděpodobnosti $h_1, h_2, \ldots h_n$ pro všechny možné hypothesy a mohli bychom ihned posouditi pravděpodobnost příštího tahu následující úvahou: Je-li správná hypothesa prvá, čehož lze se s pravděpodobností h_1 domýšleti, pak se může úkaz v budoucnosti očekávaný uskutečniti s pravděpodobností na př. q_1; složená pravděpodobnost, že obojí očekávání bude splněno (i pravdivost domněnky o složení i příští tah), jest $h_1 q_1$. Podobně lze souditi o hypothese druhé, třetí atd. Jelikož však možnosti tyto se navzájem vylučují, proto celková pravděpodobnost, že úkaz opět se dostaví, bude dána součtem

$$h_1 q_1 + h_2 q_2 + \ldots + h_n q_n.$$

Křivdili bychom však velice nekonečné rozmanitosti světového dějství, kdybychom je chtěli zobraziti osudím, které by pro svoje složení mělo jen n různých možností. Proto musíme předpokládati, že osudí obsahuje nekonečně mnoho koulí, čili že proměnné číslo udávající složení osudí může spojitě probíhati všemi hodnotami od 0 do 1. Označme toto číslo x. Tím dostali jsme se k důležitým úlohám, kde pravděpodobnosti přestávají býti veličinami nespojitými. Nutno především rozhodnouti se o pravděpodobnostech *a priori*, které jsme dříve označili ω_k. Nyní jedná se o to, určiti pravděpodobnost, že číslo x jest obsaženo v určitých mezích x a $x + dx$. Tato pravděpodobnost bude tím menší, čím kratší bude interval dx. Budeme-li z nedostatku jiných důvodů každé složení osudí očekávati se stejnou pravděpodobností, vyjde nám ve shodě s úlohou 5*a*) pravděpodobnost pro všechny možnosti stejná a úměrná intervalu dx. Položíme tedy $\omega = c \,.\, dx$. Dřívější pravděpodobnost p_k bude nyní zastoupena výrazem x^r, protože pro jeden tah jest dána číslem x.

Tím přejde dřívější výraz pro h_k ve zlomek

$$h = \frac{c \, . \, dx \, . \, x^r}{\sum\limits_{x=0}^{x=1} c \, . \, dx \, . \, x^r} = \frac{x^r dx}{\int\limits_0^1 x^r dx} = (r + 1) \, x^r dx.$$

Pravděpodobnost tato se tedy blíží nulle současně, jak se interval dx do nekonečna zmenšuje; to se ostatně dalo očekávati.

Nyní však lze dosaditi do součtu

$$h_1 q_1 + h_2 q_2 + \ldots + h_n q_n,$$

kterým jsme vyjádřili pravděpodobnost, že i příštím tahem vyjde opět koule bílá. Součet ten přejde v integrál

$$\int\limits_0^1 (r + 1) \, x^r dx \, . \, x = \frac{r+1}{r+2}.$$

Jestliže se tedy nějaký úkaz opakoval na př. 8krát, možno jej pro příště čekati s pravděpodobností 0·9. Tato pravděpodobnost roste tím více, čím častěji byl úkaz pozorován. Laplace ve svém klassickém díle o počtu pravděpodobnosti nerozpakoval se řešiti tímto vzorcem otázku, s jakou pravděpodobností lze očekávati, že po dnešní noci opět vyjde slunce. Kdybychom na př. předpokládali, že již 2,000.000-krát vyšlo, byla by pravděpodobnost ta vyjádřena číslem, které by se od jednotky skoro nelišilo. Bylo by však nesprávno, kdybychom se domnívali, že výpočet takový může oceniti jistotu, s jakou se spoléháme, že žádná katastrofa nezastaví dnešní noci otáčení zeměkoule a nepromění celý vesmír v chaos. Naše jistota nevyplývá jen ze stálého sledu dvou úkazů — noci a dne — nýbrž z veškerého našeho vědění o dějství přírodním. To však se číselně vyjádřiti nedá.

Z uvedeného mohlo by se zdáti, že počet pravděpodobnosti vede mnohem častěji k illusím než k opravdovému vědění. Je skutečně pravda, že právě theorému o pravděpodobnosti příčin musí býti jen s velikou obezřelostí užíváno. Jak jsme již poznali, hlavní nesnáz spočívá v posouzení pravděpodobností, které *a priori* jednotlivým hypothesám chceme přikládati. Příklady, jako byly 2., 3. a 5., bývají už tak vymyšleny, abychom se mohli snadno *a priori* rozhodnouti. Skutečné problémy však zřídka kdy této podmínce vyhovují.

Avšak proto přece nesmíme Bayesův theorém podceňovati. Jest přece jen pro počet pravděpodobnosti nepostradatelným a to jednak pro applikace na takové zjevy, které ovládány jsou také zákonem velkých čísel, jednak pro vnitřní logickou souvislost celého počtu.

Počet pravděpodobnosti může totiž jen tenkráte vykonati nějakou *skutečnou* službu, když výpočty přivádějí nás k pravděpodobnostem nejen snad velmi značným, nýbrž takovým, že mohou se libovolně přiblížiti k jednotce, roste-li dostatečně počet vykonaných zkoušek. O tom právě jedná zákon velkých čísel, kterému podřizuje se veliká řada zjevů společenských a vůbec hromadných. Ve spojení s ním činí Bayesův theorém dobré služby, protože pak vliv oněch pravděpodobností *a priori* nepadá tak na váhu, stačí úplně, dovedeme-li je alespoň přibližně posouditi.

Pro logickou souvislost vykonává Bayesův theorém především tu důležitou službu, že připouští obrácení zákona velkých čísel Zjistíme-li totiž, že nějaký úkaz při velkém počtu pozorování řídil se dle zákona velkých čísel, můžeme z toho zpět posouditi, jaká pravděpodobnost příslušela úkazu jednotlivému a zdali lze tuto pravděpodobnost za stálou považovati. Podobně víme-li, že chyby při měření nějaké veličiny řídí se určitým zákonem, můžeme z vykonaných pozorování souditi zpět na příčinu, t. j. na pravou hodnotu veličiny měřené. Tím dospíváme pak k t. zv. methodě nejmenších čtverců.

Mathematické zpracování těchto myšlenek však vybočovalo by daleko z rámce střední školy.