Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Václav Hübner

Lemniskata

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 43 (1914), No. 1, 111--116

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/121674`

Terms of use:

© Union of Czech Mathematicians and Physicists, 1914

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* `http://project.dml.cz`

Lemniskata.

Podává **Václav Hübner**, škol. rada na Král. Vinohradech.

Geometrickým místem bodů, jež mají od dvou pevných bodů stálý součet nebo rozdíl nebo podíl vzdáleností jest — jak známo — pořadem ellipsa, hyperbola a kružnice. Zbývá ještě případ: Co jest geometrickým místem bodů majících stálý součin vzdálenosti od pevných dvou bodů? Hledané místo geometrické jest křivka Cassiniho, která ve zvláštním případě, když stálý součin rovná se čtverci poloviční vzdálenosti obou pevných bodů, sluje křivka lemniskata.

Rovnice lemniskaty.

Spustíme-li ze středu rovnoosé hyperboly kolmice na tečny této křivky, jest geometrickým místem pat těchto kolmic lemniskata.

Rovnice hyperboly rovnoosé jest — jak známo —

$$x^2 - y^2 = a^2;$$

rovnice tečny hyperboly jest

$$xx_1 - yy_1 = a^2 \tag{1}$$

(x_1, y_1 souřadnice bodu dotyčného), směrnice tečny

$$A = \frac{x_1}{y_1}.$$

Rovnice přímky jdoucí středem hyperboly kolmo na její tečnu jest

$$y = -\frac{y_1}{x_1}x. \tag{2}$$

Stanovíme-li souřadnice bodu dotyčného, jež hoví rovnici

$$x_1^2 - y_1^2 = a^2$$

z rovnic (1) a (2), obdržíme

$$x_1 = -\frac{y_1 x}{y} \text{ a } x_1 = \frac{a^2 + yy_1}{x},$$

pročež

$$-\frac{y_1 x}{y} = \frac{a^2 + yy_1}{x} \text{ a } y_1 = -\frac{a^2 y}{x^2 + y^2}.$$

Obdobně jest

$$x_1 = \frac{a^2 x}{x^2 + y^2}$$

a hledaná rovnice geometrického místa jest

$$\frac{a^4 x^2}{(x^2+y^2)^2} - \frac{a^4 y^2}{(x^2+y^2)^2} = a^2,$$

nebo

$$(x^2 + y^2)^2 + a^2 (y^2 - x^2) = 0$$

rovnice stupně čtvrtého. Je-li vzdálenost pevných bodů od počátku c, — c, jest tato vzdálenost

$$c = \frac{a\sqrt{2}}{2}, \quad \frac{-a\sqrt{2}}{2}$$

(polovina úhlopříčny čtverce sestrojeného nad osou a) a hledaný součin vzdálenosti lib. bodu od pevných bodů jest

$$\sqrt{\left(x - \frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + y^2} \cdot \sqrt{\left(x + \frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + y^2} = \frac{a^2}{2}$$

t. j.

$$(x^2 + y^2)^2 + a^2 (y^2 - x^2) = 0.$$

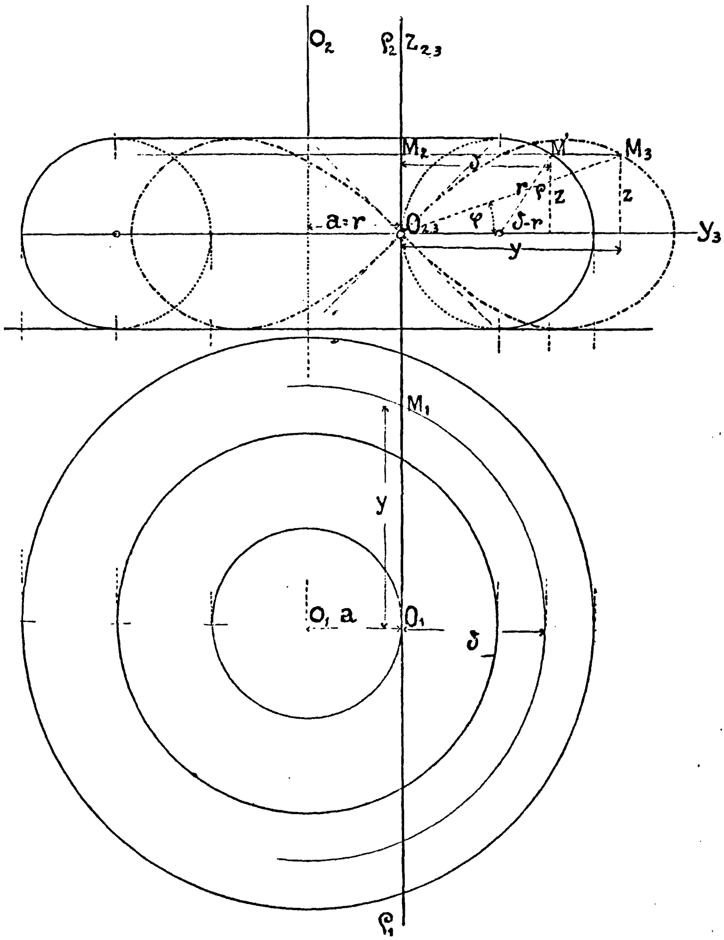
Lemniskata jest geometrickým místem vrcholů trojúhelníků, jejichž jedna strana jest stálá a součin druhých dvou stran jest roven $\frac{1}{2}$ čtverci stálé strany (základny).

Ze sestrojení jest patrno, že počátek jest dvojným bodem lemniskaty a asymptoty hyperboly jsou tečnami lemniskaty v tomto bodě dvojném a stojí na sobě kolmo. S kladným směrem osy X-ové svírají úhly 45^0 a 135^0.

Dvojný tento bod sluje uzlem křivky. Tvar lemniskaty jest ležatá osmička (znak nekonečnosti).

Lemniskatu obdržíme též na ploše anuloidu kruhového (ploše okruhové) — ploše stupně čtvrtého, kterou vytvoří kružnice, otáčí-li se kol přímky o, která leží v rovině křivky tvořící, ale s osou bodu společného nemá. Seče-li osa kružnici, t. j. otáčí-li se kolem sečny středem neprocházející, vznikne melonoid kruhový.

Rovina ϱ, která protíná plochu, budiž kolmá k oběma průmětnám a zároveň rovinou tečnou k této ploše v bodě O. Osa



Obr. 1.

otáčení $o \perp \pi$, vzdálenost ϱ od o rovna a a r velikost poloměru tvořící kružnice.

Sklopíme-li vzniklý řez do průmětny druhé, objeví se nám pravý tvar křivky. Libovolný bod M (M_1, M_2) křivky průsečné budiž na kružnici o poloměru $a + \delta$ (δ = vzdálenosti bodu M'

od ϱ_2). Počátek soustavy souřadnic (Y, Z) položen do bodu $O_{2/3}$, osa $Z \equiv \varrho_2$, souřadnice bodu M_3 buďtež y, z. Z obrazce jest zjevno, že pro bod M' platí rovnice

$$z^2 = r^2 - (\delta - r)^2$$

a vedle toho

$$y^2 = \delta\,(2a + \delta)$$

(z prvního průmětu). Jest tudíž

$$y^2 + z^2 = 2\delta\,(a + r),$$

z čehož

$$\delta = \frac{y^2 + z^2}{2\,(a + r)};$$

ze druhé rovnice jest též

$$\delta = -a \pm \sqrt{a^2 + y^2},$$

pročež

$$-a \pm \sqrt{a^2 + y^2} = \frac{y^2 + z^2}{2\,(a + r)}$$

a

$$\pm \sqrt{a^2 + y^2} = a + \frac{y^2 + z^2}{2\,(a + r)},$$

čili

$$\pm 2\,(a + r)\sqrt{a^2 + y^2} = 2a\,(a + r) + y^2 + z^2.$$

Povýšíme-li tuto rovnici na druhou a patřičně ji zjednodušíme, obdržíme

$$(y^2 + z^2)^2 - 4r\,(a + r)\,y^2 + 4a\,(a + r)\,z^2 = 0$$

rovnici křivky průsečné — jež jest stupně čtvrtého.

Je-li $a = r$, přejde rovnice ve tvar

$$(y^2 + z^2)^2 + 8r^2\,(z^2 - y^2) = 0$$

rovnice lemniskaty.

Vzdálenost pevných bodů od počátku $O_{2/3}$ jest $= \pm 2r$ a délka poloosy $= 2r\sqrt{2}$.

Zavedeme-li souřadnice polární ϱ, φ, jest pro bod

$$M_3 \ldots y = \varrho \cos\varphi, \quad z = \varrho \sin\varphi$$

a tudíž

$$(\varrho^2 \cos^2 \varphi + \varrho^2 \sin^2 \varphi)^2 = 8r^2 (\varrho^2 \cos^2 \varphi - \varrho^2 \sin^2 \varphi),$$

čili

$$\varrho^4 = 8r^2\varrho^2 \cos 2\varphi$$

a

$$\varrho^2 = 8r^2 \cos 2\varphi$$

rovnice polární lemniskaty.

Největší hodnoty ϱ nabude, je-li

$$\varphi = 0, \text{ pak } \varrho = 2r\sqrt{2} \text{ (délka poloosy).}$$

Nejmenší hodnoty ϱ nabude, je-li

$$\varphi = 45^0; \text{ pak } \varrho = 0.$$

Důsledky:

1. Je-li $a = 0$; přejde rovnice průsečné křivky ve tvar

$$(y^2 + z^2)^2 - 4r^2y^2 = 0,$$

nebo

$$(y^2 + z^2 - 2ry)(y^2 + z^2 + 2ry) = 0,$$

z čehož

$$y^2 + z^2 - 2ry = 0 \text{ a } y^2 + z^2 + 2ry = 0.$$

Řez přechází ve dvě shodné kružnice.

2. Je-li $r = \infty$, přejde tvořící kružnice v přímku || s osou o (ježto nesmí osu protínati) a otáčením vytvoří rotační plochu válcovou. Rovina ϱ jest pod rovinou tečnou a dotýká se jí podél přímky povrchové.

Dělíme-li rovnici průsečné křivky čtvercem poloměru, obdržíme:

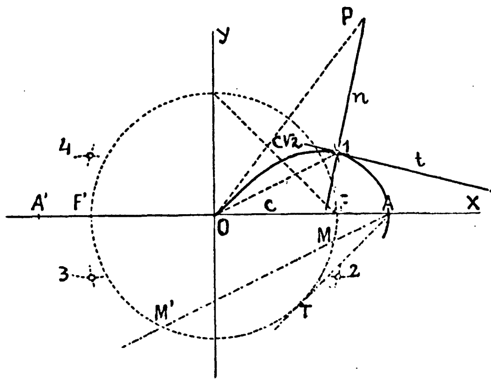
$$\frac{(y^2 + z^2)^2}{r^2} - 4\left(\frac{a}{r} + 1\right) y^2 + 4\frac{a}{r}\left(\frac{a}{r} + 1\right) z^2 = 0$$

a pro $r = \infty$, jest $4y^2 = 0$ t. j. $y = 0$ — rovnice osy Z — podél které se rovina dotýká plochy válcové.

Anuloid lze pokládati za stočený válec, při čemž obě základny splývají.

Sestrojení lemniskaty.

Zvolme dva pevné body F, F' ve vzdálenosti $2c$ a opišme nad průměrem $\overline{FF'}$ kružnici; ve vzdálenosti $\pm c\sqrt{2}$ od středu jejího sestrojme na ose X body A, A'. Vedeme-li na př. bodem A libovolný paprsek protínající kružnici, vymezí tato dva úseky měřené od A, jež jsou vzdálenosti čtyř bodů 1, 2, 3, 4 lemniskaty od pevných bodů F, F'. ($\overline{F1} = \overline{AM}$, $\overline{F'1} = \overline{AM'}$, $\overline{F'2} = \overline{AM}$ atd. Je totiž $\overline{AM} \cdot \overline{AM'} = \overline{AF} \cdot \overline{AF'}$ (mocnost bodu A



Obr. 2.

ke kružnici) čili $\overline{AM} \cdot \overline{AM'} = (c\sqrt{2} + c)(c\sqrt{2} - c) = c^2$. Dotýká-li se paprsek vedený bodem A kružnice v bodě T, jest $\overline{AT}^2 = c^2$ a $\overline{AT} = c$; bod 0 jest bodem lemniskaty.

Jiný způsob sestrojení: Píšeme-li rovnici $\overline{F1} \cdot \overline{F'1} = c^2$ ve tvaru $\overline{F1} : c = c : \overline{F'1}$, jest dle věty Euklidovy c výška v trojúhel. pravoúhelném, $\overline{F1}$ a $\overline{F'1}$ oba úseky na přeponě. Ze zvoleného c a jednoho úseku $\overline{F1}$ lze druhý úsek $F'1$ vyhledati.

Sestrojení tečny a normály v daném bodě.

Daný bod 1 spojme se středem O a sestrojme trojúhelník rovnoramenný $O1P$ tak, aby $\overline{O1}$ bylo jedno rameno a základna $\overline{OP}$ aby svírala s osou x úhel $AOP = 2 \sphericalangle AO1$; druhé rameno. $\overline{P1}$ jest pak normálou v bodě 1.