Matěj Pelnář

O součtu m-tých mocnin čísel řady přirozené

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 6 (1877), No. 5, 279--280

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121688

O součtu m-tých mocnin čísel řady přirozené.

Podává

M. Pelnář,

prof. na realném gymnasii v Příbrami.

Podlé binomické poučky platí všeobecně

$$(k+1)^m = k^m + (m)_1 k^{m-1} + (m)_2 k^{m-2} + \ldots + k^0,$$

z čehož jde, užijeme-li známého symbolu součtového,

$$\sum_{k=1}^{n} (k+1)^m - \Sigma k^m = (m)_1 \Sigma k^{m-1} + (m)_2 \Sigma k^{m-2} + \ldots + \Sigma k^0;$$

a poněvadž jednoduchým rozvedením se obdrží

$$\sum_{k=1}^{n} (k+1)^m - \Sigma k^m = (n+1)^m - 1,$$

povstane z posledního vzorce konečně

$$1 - (n+1)^m + (m)_1 \Sigma k^{m-1} + (m)_2 \Sigma k^{m-2} + \ldots + \Sigma k^0 = 0.$$

Zavedeme-li pak do tohoto vzorce $1, 2, 3, \ldots, (m+1)$ za m, zjednáme si řadu rovnic, v nichž se vyskytnou lineárně rozmanité součty a sice od Σk^0 až do Σk^m; rovnic těch bude na počet $m+1$, takže z celé soustavy bude možná vyloučiti m neznámých, totiž Σk^0, Σk^1, $\Sigma k^2, \ldots, \Sigma k^{m-1}$. K tomu cíli položí se roven nulle determinant příslušné soustavy, tedy

$$\begin{vmatrix} (n+1)^1 & -1 & ,1, & 0 & , & 0 & ,\ldots, & 0 \\ (n+1)^2 & -1 & ,1, & (2)_1 & , & 0 & ,\ldots, & 0 \\ (n+1)^3 & -1 & ,1, & (3)_1 & , & (3)_2 & ,\ldots, & 0 \\ (n+1)^4 & -1 & ,1, & (4)_1 & , & (4)_2 & ,\ldots, & 0 \\ \cdots & & & & & & & \\ (n+1)^{m+1} & -1 + (m+1)\Sigma k^m, & 1, & (m+1)_1, & & (m+1)_2, & \ldots, & (m+1)_{m-1} \end{vmatrix} = 0$$

Rozložíme-li tento determinant podlé prvků prvního sloupce, považujíce je za složeny ze dvou částí, totiž rozdílu $(n+1)^k - 1$ a k tomu připojené 0 nebo při posledním prvku připojeného členu $(m+1)\Sigma k^m$, obdržíme napřed, nehledíce k označení

$$(m+1)!\,\Sigma k^m = \begin{vmatrix} (n+1)^1 & -1, & 1, & 0, & 0 & \ldots & 0 \\ (n+1)^2 & -1, & 1, & (2)_1, & 0 & \ldots & 0 \\ (n+1)^3 & -1, & 1, & (3)_1, & (3)_2 & \ldots & 0 \\ (n+1)^4 & -1, & 1, & (4)_1, & (4)_2 & \ldots & 0 \\ \cdots & & & & & & \\ (n+1)^{m+1} & -1, & 1, & (m+1)_1, & (m+1)_2 & \ldots & (m+1)_{m-1} \end{vmatrix};$$

a rozložíme-li tento determinant stejným způsobem podlé prvků prvního sloupce, považujíce opět $(n+1)^k$ za část první, —1 pak za část druhou, obdržíme dva determinanty, z nichž druhý jest hodnoty 0, jelikož se v něm vyskytnou dva identické sloupce, takže konečně povstane, vyloučíme-li $(n+1)$ pro společný faktor,

$$(m+1)!\sum_{k=1}^{n} k = (n+1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ (n+1)^1 & 1 & (2)_1 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (n+1)^m & 1 & (m+1)_1 & (m+1)_2 & \dots & (m+1)_{m-1} \end{vmatrix}, \quad (1)$$

kterýžto vzorec určuje součet m-tých mocnin čísel přirozené řady od 1 do n.

Pro $m=3$ se obdrží na př. bez ohledu na označení

$$4!\sum_{k=1}^{n} k^3 = (n+1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ (n+1)^1 & 1 & 2 & 0 \\ (n+1)^2 & 1 & 3 & 3 \\ (n+1)^3 & 1 & 4 & 6 \end{vmatrix},$$

z čehož se snadným vyčíslením vyvede známý *) vzorec

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Poznámka redaktorova. Podobným způsobem užívá se zhusta determinantů, aby se určily hodnoty veličin, obyčejně jen způsobem rekurrentním vyhledávaných. Na př. uvádíme tu hodnoty tak zvaných čísel *Bernoulliho*, které se vyvinují ze vzorce *)

$$0 = (n)_1\, a_{n-1} + (n)_2\, a_{n-2} + (n)_3\, a_{n-3} + \dots + n a_1 + a_0\,;$$

píšeme-li tu za n postupně 2, 3, 4, ..., n, zjednáme si soustavu vzorců, z nichž se vyloučí střední veličiny a_0, a_1, a_2, ... a_{n-2}, načež se přijde konečně ku vzorci

$$(-1)^{n-1}\, n!\, a_{n-1} = \begin{vmatrix} 1 & (2)_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & (3)_1 & (3)_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & (n)_1 & (n)_2 & (n)_3 & (n)_4 & \dots & (n)_{n-2} \end{vmatrix} \quad (2)$$

podlé něhož se určují hodnoty veličin a_k, které poskytují čísla *Bernouilliho*, jež tento mathematik vyvinul ve spise „Ars conjectandi“ pag. 97.; zároveň tu poznáváme, že determinant (2) jest subdeterminantem stupně prvního pro (1), platí-li $m+1=n$.

*) Viz „Gaussiana“ III. Časop. pro pěstování mathem. a fysiky. R. VI. pag. 200.

*) Viz *Studnička* „Základové vyšší mathematiky“. Díl I. pag. 125.