Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky

Augustin Pánek

O trojúhelnících racionálních

Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky, Vol. 6 (1877), No. 5, 235--245

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121692

množství černých čar, které sčítati dlužno. Počet jich k, udává, že veličina $\frac{\lambda}{N_e - N_0}$ jest k krát obsažena v differenci tloušťěk na obou koncích klínových.

Tato difference se dá sférometrem změniti a poskytuje pak hodnotu pro λ, již jsem měřením ne přes příliš opatrným až na 1.5% nalezl v souhlasu s výsledky jiných. (Hlavní váha spočívá na čísle k).

I k měření úhlu, o který se pol. rovina v křemenu neb cukru stočí, dá se klínů velmi dobře upotřebiti. Užil jsem světla sodíkového, a položil jsem klíny tak, že v nižádné poloze Nikolu pruhy pozorovati se nedaly. Na to jsem podložil desku křemenovou, a vytočil klíny tak dalece, až totéž nastalo. Odstraniv pak desku, aniž bych byl polohu klínů změnil, nalezl jsem novou polohu klínů na hořejším dělení kruhovém dle návodu často již jmenovaného.

O trojúhelnících racionálních.

Napsal

Augustin Pánek.

Schumacher a *Gauss* pojednávají ve dvou dopisech svých o úloze z *analytiky neurčité*, totiž:

„Má se ustanoviti rovinný trojúhelník kosoúhelný, jehož strany a ploský obsah vyjádřeny jsou čísly racionálními.“[1])

Při všech řešeních úlohy této, která byla podána v *Grunertově* žurnálu svaz. 45., pag. 220., roku 1866 od professorů: *Rosenberga* (Halle a. d. S.), *Gretschela* (Leipzig), *Lehra* (Königs-

---

[1]) Briefwechsel zwischen *Gauss* und *Schumacher*. Herausgegeben von *C. A. F. Peters*. V. Band. Altona, 1863. Seite 375. — *Schumacher-ův* dopis *Gaussovi* jest datován 17. října 1847, *Altona*, a *Gaussův Schumacher-ovi* v témž roce 21. října, *Göttingen*.

Srovnej „Časopis pro pěstování mathem. a fysiky r. VI. p. 200, *Gaussiana od* dr. *Studničky*. — Tytéž dva dopisy uvedeny jsou také v *Grunert's* Archiv der Mathem. u. Physik. 44. Theil 1865. pag. 504.

Jak ale vlastně tento úkol *zněl* a jak jest v dotčeném psaní *Gaussem všeobecně* řešen, o tom viz v zmíněných *Gaussianech*, kdež i několik jiných zajímavých problémů *Gaussem* řešených se uvádí.

berg in Pr.) a *Fürstenaua* (Magdeburg), pak od řed. *Schradera* (Halle a. d. S.), zavedeny jsou dle *Gaussa* čtyři veličiny pomocné, za které se pak dosazují hodnoty vyhovující úloze dané.

Jinak řešili úlohu tuto ale *Ligowski* 1867[2]), a zejmena P. *Šimerka* 1870[3]) v témž žurnálu.

Nazveme-li úhly stranám a, b, c trojúhelníka protilehlé α, β, γ a jeho ploský obsah $\triangle$, jest, jak povědomo

$$\triangle^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)\,^4), \qquad (1)$$

dále

$$\begin{aligned} \cot\frac{\alpha}{2} &= \frac{s}{\triangle}(s-a) \\ \cot\frac{\beta}{2} &= \frac{s}{\triangle}(s-b) \qquad (2) \\ \cot\frac{\gamma}{2} &= \frac{s}{\triangle}(s-c), \end{aligned}$$

kdež značí $a+b+c=2s$.

Sečteme-li soustavu vzorců (2), obdržíme

$$\cot\frac{\alpha}{2}+\cot\frac{\beta}{2}+\cot\frac{\gamma}{2}=\frac{s}{\triangle}(3s-2s)=\frac{s^2}{\triangle}, \qquad (3)$$

a ze vzorce (1) dle (2) též

$$\frac{s^2}{\triangle}=\cot\frac{\alpha}{2}\cot\frac{\beta}{2}\cot\frac{\gamma}{2}, \qquad (4)$$

načež srovnavše (3) a (4), obdržíme relaci známou

---

[2]) Schreiben des H. Prof. Dr. *Ligowski* in Berlin an den Herausgeber. 46. Theil, pag. 503.

[3]) Die rationalen Dreiecke. 51. Theil, pag. 196.

[4]) Jest-li $a=b=c$, jest obsah trojúhelníka

$$\Delta=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2,$$

to jest: trojúhelník rovnostranný není nikdy racionální, a protož mohou pouze rovnoramenné a nerovnostranné trojúhelníky býti racionálními.

V příčině vzorce (1) upozorňujeme na pojednání dra *Studničky* „O vzorci vyjadřujícím plochu trojúhelníku pomocí stran jeho." Časopis pro pěst. mathem. a fysiky, r. I. pag. 253.

$$cot\frac{\alpha}{2}+cot\frac{\beta}{2}+cot\frac{\gamma}{2}=cot\frac{\alpha}{2}\,cot\frac{\beta}{2}\,cot\frac{\gamma}{2}\ ^{5}). \qquad (5)$$

Sečteme-li pak dva a dva vzorce soustavy (2), dostaneme vzorce

$$\begin{aligned} cot\frac{\alpha}{2}+cot\frac{\beta}{2} &= \frac{s}{\triangle}(2s-a-b)=\frac{sc}{\triangle} \\ cot\frac{\alpha}{2}+cot\frac{\gamma}{2} &= \frac{s}{\triangle}(2s-a-c)=\frac{sb}{\triangle} \qquad (6) \\ cot\frac{\beta}{2}+cot\frac{\gamma}{2} &= \frac{s}{\triangle}(2s-b-c)=\frac{sa}{\triangle}, \end{aligned}$$

z nichž lze sestaviti srovnalost

$$a:b:c=\left(cot\frac{\beta}{2}+cot\frac{\gamma}{2}\right):\left(cot\frac{\alpha}{2}+cot\frac{\gamma}{2}\right): \qquad (7)$$

$$\left(cot\frac{\alpha}{2}+cot\frac{\beta}{2}\right).$$

Poněvadž ze vzorce (5) jest

$$cot\frac{\gamma}{2}=\frac{cot\frac{\alpha}{2}+cot\frac{\beta}{2}}{cot\frac{\alpha}{2}\,cot\frac{\beta}{2}-1}, \qquad (8)$$

obdrží srovnalost (7) po snadném zjednodušení tvar

$$a:b:c=\left(cot^2\frac{\beta}{2}+1\right)cot\frac{\alpha}{2}:\left(cot^2\frac{\alpha}{2}+1\right)cot\frac{\beta}{2}:$$

$$:\left(cot\frac{\alpha}{2}\,cot\frac{\beta}{2}-1\right)\left(cot\frac{\alpha}{2}+cot\frac{\beta}{2}\right). \qquad (7')$$

Položíme-li

$$a=\left(cot^2\frac{\beta}{2}+1\right)cot\frac{\alpha}{2},$$

pak jest

$$b=\left(cot^2\frac{\alpha}{2}+1\right)cot\frac{\beta}{2} \qquad (9)$$

---

5) Táž relace jeví se v pojednání *Ligowského* ve tvaru

$$x+y+z=xyz,$$

a v *Šimerkově* ve tvaru

$$\frac{u}{t}+\frac{u'}{t'}+\frac{u''}{t''}=\frac{u\,u'\,u''}{t\,t'\,t''},$$

kdež značí $\frac{t}{u}$, $\frac{t'}{u'}$, $\frac{t''}{u''}$ tangenty úhlů polovičných.

$$c = \left(\cot\frac{\alpha}{2}\cot\frac{\beta}{2} - 1\right)\left(\cot\frac{\alpha}{2} + \cot\frac{\beta}{2}\right),$$

a polovička obvodu trojúhelníka bude dle (9)

$$s = \left(\cot\frac{\alpha}{2} + \cot\frac{\beta}{2}\right)\cot\frac{\alpha}{2}\cot\frac{\beta}{2}. \tag{10}$$

Nazveme-li výšku trojúhelníka v_c, jest

$$v_c = a \sin\beta = b \sin\alpha,$$

a poněvadž

$$\sin\alpha = \frac{2\cot\frac{\alpha}{2}}{1 + \cot^2\frac{\alpha}{2}},$$

bude dle (9) konečně

$$v_c = 2\cot\frac{\alpha}{2}\cot\frac{\beta}{2}\;^{6)}. \tag{11}$$

Buďtež c_1 a c_2 části, na které táž výška dělí stranu c, pak jest především

$$c_1 = a\cos\beta, \quad c_2 = b\cos\alpha,$$

a poněvadž

$$\cos\alpha = \frac{\cot^2\frac{\alpha}{2} - 1}{\cot^2\frac{\alpha}{2} + 1},$$

jest dle (9) konečně

$$\left.\begin{aligned} c_1 &= \left(\cot^2\frac{\beta}{2} - 1\right)\cot\frac{\alpha}{2}, \\ c_2 &= \left(\cot^2\frac{\alpha}{2} - 1\right)\cot\frac{\beta}{2}. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Ze vzorce (4) dle (8) a (10) obdržíme ploský obsah trojúhelníka

$$\triangle = \frac{s^2}{\cot\frac{\alpha}{2}\cot\frac{\beta}{2}\cot\frac{\gamma}{2}} =$$

$$= \left(\cot\frac{\alpha}{2}\cot\frac{\beta}{2} - 1\right)\left(\cot\frac{\alpha}{2} + \cot\frac{\beta}{2}\right)\cot\frac{\alpha}{2}\cot\frac{\beta}{2}. \tag{13}$$

Nazveme-li poloměry kruhů dotýčných trojúhelníka r, r_a, r_b, r_c, jest, jak známo,

---

[6]) Totéž obdržíme ze vzorce

$$v_c = \frac{2\Delta}{c}.$$

$$r=\frac{\triangle}{s},\quad r_a=\frac{\triangle}{s-a},\quad r_b=\frac{\triangle}{s-b},\quad r_c=\frac{\triangle}{s-c}\ ^{7})$$

a dle (9), (10) a (13)

$$\begin{aligned} r &= cot\frac{\alpha}{2}\,cot\frac{\beta}{2}-1 \\ r_a &= \left(cot\frac{\alpha}{2}+cot\frac{\beta}{2}\right)cot\frac{\beta}{2} \\ r_b &= \left(cot\frac{\alpha}{2}+cot\frac{\beta}{2}\right)cot\frac{\alpha}{2} \\ r_c &= \left(cot\frac{\alpha}{2}\,cot\frac{\beta}{2}-1\right)cot\frac{\alpha}{2}\,cot\frac{\beta}{2}\,; \end{aligned}\tag{14}$$

a poloměr opsaného kruhu

$$R=\frac{abc}{4\triangle},$$

neb dle (9) a (13) konečně

$$R=\frac{1}{4}\left(cot^2\frac{\alpha}{2}+1\right)\left(cot^2\frac{\beta}{2}+1\right).\tag{15}$$

Položíme-li na př. $cot\frac{\alpha}{2}=3$, $cot\frac{\beta}{2}=5$, jest dle (8) a (9)

$$cot\frac{\gamma}{2}=\frac{4}{7},\quad a=78,\ b=50,\ c=112,$$

a dle (11) a (12)

$$v_c=30,\quad c_1=72,\quad c_2=40,$$

dále pak dle (13), (14) a (15)

$$\begin{gathered} \triangle=112\,.\,15=1680,\ r=14 \\ r_a=40,\ r_b=24,\ r_c=210, \\ R=\frac{1}{4}\,.\,10\,.\,26=65. \end{gathered}$$

Tímto spůsobem možno sestrojiti tabulku trojúhelníků racionálních snadně a velmi rychle. [8])

---

[7]) Srovnej „Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky" r. V. pag. 57. P. *J. Vervaet*, Příspěvek k řešení trojúhelníků."

[8]) P. *Šimerka* uvádí v uvedeném žurnálu tabulky s názvem „Verzeichniss der rationalen Dreiecke, deren Seiten nicht 100 übersteigen." V těchto tabulkách uvedeny jsou hodnoty stran trojúhelníků, ploský obsah a tangenty úhlů polovičných.

Schema tabulky *trojúhelníků všeobecných:*

a	b	c		v_c	$\triangle$	r	r_a	r_b	r_c	R	$cot\frac{\alpha}{2}$	$cot\frac{\beta}{2}$	$cot\frac{\gamma}{2}$
		c_1	c_2										

Trojúhelníky *pravoúhelné racionálné* čili *pythagorejské* obdržíme tím, že položíme do předchozích vzorců $cot\frac{\alpha}{2}=1$, načež bude

$$a=cot^2\frac{\beta}{2}+1\,,\quad b=2\,cot\frac{\beta}{2}\,,\quad c=cot^2\frac{\beta}{2}-1\,,$$

$$cot\frac{\gamma}{2}=\frac{cot\frac{\beta}{2}+1}{cot\frac{\beta}{2}-1}\,,\quad \triangle=\left(cot^2\frac{\beta}{2}-1\right)cot\frac{\beta}{2}\,,$$

$$r=cot\frac{\beta}{2}-1\,,\quad r_a=\left(cot\frac{\beta}{2}+1\right)cot\frac{\beta}{2}\,,$$

$$r_b=cot\frac{\beta}{2}+1,\quad r_c=\left(cot\frac{\beta}{2}-1\right)cot\frac{\beta}{2}\,,$$

$$R=\frac{1}{2}\left(cot^2\frac{\beta}{2}+1\right).$$

Tak na př. pro $cot\frac{\beta}{2}=7$ dostaneme hodnoty trojúhelníka pythagorejského

$$a=50,\quad b=14,\quad c=48,\quad cot\frac{\gamma}{2}=\frac{4}{3}\,,$$

$$\triangle=336,\quad r=6,\quad r_a=56,\quad r_b=8\,,$$

$$r_c=42\,,\quad R=25.$$

Podobnou tabulku oné, kterou má sestavenou *Weiss* v obšírné své trigonometrii (Handbuch der Trigonometrie, Fürth 1851, p. 397), a kteráž se nalezá též ve *Wiegand's,* Sammlung trigonometrischer Aufgaben aus der reinen u. angewandten Mathematik, Leipzig, 1852" a taktéž v jeho „Lehrbuch der ebenen Trigonometrie, Halle, 1874 pag. 80", lze si takto za krátkou dobu zjednati.

Taková tabulka trojúhelníků pythagorejských, v kteréž se vyskytuje a, b, c, $\triangle$, α, β, nalezá se v uvedené knize *Weissově* pag. 361, a *Wiegandově,* Sammlung pag. 54, též v jeho Lehrbuch pag. 65.

Tuto tabulku sestavil ale nejprvé *Schulz* ve svých „Tafeln" Band 2., pag. 308, s názvem: Rationale Trigonometrie, a poněvadž výsledky byly většinou chybné, přepočítal tabulku tuto *Bretschneider* a uveřejnil ji v Grunertově archivu, sv. 1.

Již *Diophant* užívá ve své 6. knize následujících vzorců k sestrojení pythagorejských trojúhelníků kmenných

$$a = m^2 + n^2, \quad b = 2mn, \quad c = m^2 - n^2 \text{ [9]}, \qquad (17)$$

kdež m, n jsou čísla nesoudělná (relativná prvočísla).

Podlé vzorců těchto jest dříve zmíněná tabulka sestrojena, a mimo to připojeny ještě rovnice

$$tan\frac{\beta}{2} = \frac{m}{n}, \quad tan\frac{\gamma}{2} = \frac{m-n}{m+n}.$$

Jaké pravidlo dal *Pythagoras* a *Plato* k sestrojení racionálních trojúhelníků pravoúhelných, o tom možno se dočísti v díle dra *Studničky*, Základové nauky o číslech. Kn. I. Praha 1875, pag. 8[10]).

---

[9]) O vzorci

$$(m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2 = (m^2 + n^2)^2$$

viz *Berkhan,* Lehrbuch der unbestimmten Analytik, Halle, 1856, p. 98. a pak jeho spis „Die merkwürdigen Eigenschaften der Pythagorischen Zahlen." Podlé tohoto vzorce lze rozličné rovnice snadným spůsobem řešiti. Zároveň uvádí týž spisovatel ve své knize na str. 107 tabulku nazvanou: Tabelle der 100 ersten Pythagorischen Zahlen, oder unabhängigen rechtwinkeligen Dreiecke.

Jak se zmiňuje *Zavagno* v Zeitschrift für die österreichischen Gymnasien, Wien, 1877, pag. 233. o rukopisu *Tartiniho,* který jedná o pythagorejských trojúhelnících, jest týž zajisté dle výňatku uvedeného velmi zajímavým. Rukopis tento byl mimo jiné rukopisy věnován obecní bibliotece *Piranské.*

[10]) Srovnej též „Časopis mathem. a fysiky r. II., pag. 191. O sestrojování racionálních trojúhelníků."

Že věta Pythagorova právem se tak zove, dosvědčuje řecký geometr *Eudemis*, o němž nám zprávy částečně zachoval *Proclus.* (Proclus Diadochus, in primum Euclidis librum commentarius ed. Friedlein. Lipsiae 1873, pag. 44).

V předkřesťanské době zhotovili Číňané nástroj měřický na

Položíme-li v horních vzorcích $n = 1$, obdržíme pravidlo Platonovo $(2m)^2 + (m^2 - 1)^2 = (m^2 + 1)^2$, (18)
kteréž pravidlo vyjádřují i vzorce (16),

$$\left(2 \cot \frac{\beta}{2}\right)^2 + \left(\cot^2 \frac{\beta}{2} - 1\right)^2 = \left(\cot^2 \frac{\beta}{2} + 1\right)^2. \quad (18')$$

Pythagorejské trojúhelníky jsou, jak známo, rovnoramenné, neboť pro $b = c$, jest $\triangle = b\sqrt{2}$.

Vlastnosti, které se k pravoúhelným racionálním trojúhelníkům vztahují, najde čtenář v díle „Berkhan, Lehrbuch der unbestimmten Analytik".

Hojnost vět platných o racionálních trojúhelnících kmenných podává anonymní fragment z 10. století, který přeložil *Woepcke* „Recherches sur plusieurs ouvrages de Léonard de Pise découverts et publiés par M. le Prince B. Boncompagni et sur les rapports qui existent entre ces ouvrages et les travaux mathématiques des Arabes. 1. partie: Extraits et traductions d'ouvrages arabes inédits. III. Traduction d'un fragment anonyme sur la formation des triangles rectangles en nombres entiers, et d'un traité sur le même sujet par Aboû Dja' far Mohammed Ben Alhoçaïn. Roma, 1861[11]).

Gérono (Nouvelles annales de mathématiques, Tom. 17., pag. 395, 1858) řešil úlohu, jak se ustanovuje trojúhelník, jehož strany a ploský obsah činí řadu arithmetickou s rozdílem $= 1$, a shledal, že trojúhelník pythagorejský, jehož strany jsou 3, 4, 5 a ploský obsah 6, této úloze vyhovuje[12]).

Pythagorově větě se zakládající zvaný: *Ku-u* (Cantor, Mathematische Beiträge zum Culturleben der Völker. Halle, 1863, pag. 103).

Jak *Hankel* ve svém „Zur Geschichte der Mathematik im Alterthum u. Mittelalter, Leipzig, 1874" praví, jest první, ač ne snad spolehlivý svědek *Vitruv* (De architect. IX. praef.), který tuto větu Pythagorovi připisuje.

Dále praví *Hankel*, že, ač prý není žádná spolehlivá zpráva o vynálezci této důležité věty známa, přec ji nechce upírati Pythagorovi.

[11]) Srovnej „Grunerts Archiv, Theil 57., 1875. pag. 216. Miscellen. Kurze Notiz zu dem Aufsatze des *H. Rath,* Die rationalen Dreiecke (Archiv, Theil 56.; 1874. S. 188) von *Curtze.*"

[12]) *Berkhan,* II. pag. 97 uvádí důkaz, že ze všech čísel celistvých, kterými se dají strany trojúhelníka pravoúhlého vyjádřiti, jsou nejmenší 3, 4, 5.

Lebesque upozornil v témž žurnálu, sv. 18. str. 44., 1859, že podmínce, aby strany a ploský obsah trojúhelníka byly v progressi arithmetické s jakýmsi rozdílem, vyhovuje pouze a *jedině* trojúhelník o svrchu uvedených stranách.

Zjednejme si ještě hodnoty stran b, c, aby jich rozdíl $c - b$ rovnal se ± 1.

Jestli

$$m^2 - n^2 - 2mn = +1$$

čili

$$(m - n)^2 - 2n^2 = +1, \tag{19}$$

položme

$$m - n = x, \quad n = y,$$

pak máme především

$$m = x + y, \quad n = y,$$

a tedy

$$\begin{aligned} c &= m^2 - n^2 = x^2 + 2xy \\ b &= 2mn = 2xy + 2y^2. \end{aligned} \tag{20}$$

Nejmenší čísla positivná, která vyhoví rovnici (19), jsou $x = 3$, $y = 2$ a tudíž strany

$$c = 21, \quad b = 20.$$

Jestli

$$m^2 - n^2 - 2mn = -1$$

čili

$$(m + n)^2 - 2m^2 = +1, \tag{21}$$

položme

$$m + n = x, \quad m = y, \quad (n = x - y),$$

pak jest

$$\begin{aligned} c &= 2xy - x^2 \\ b &= 2xy - 2y^2. \end{aligned} \tag{22}$$

Za $x = 3$, $y = 2$, obdržíme

$$c = 3, \quad b = 4.$$

Konečně budiž ustanoven trojúhelník tak, aby čísly racionálními byly vyjadřeny strany a výšky jeho, kteréž jsou zároveň vztaženy na tutéž jednotku, jež jest průmětem jedné strany na druhou.

Nazveme-li strany trojúhelníka a, b, c a příslušné výšky v_a, v_b, v_c, a rovná-li se průmět strany b na stranu a jednotce, jest strana

$$b = \sqrt{1 + v_a^2} \tag{23}$$

a tedy strana

$$c = \sqrt{(a-1)^2 + v_a^2}. \tag{24}$$

Položíme-li

$$\sqrt{1 + v_a^2} = 1 + \alpha v_a \tag{23'}$$

$$\sqrt{(a-1)^2 + v_a^2} = a - 1 + \beta v_a\,, \tag{24'}$$

kdež značí α, β libovolné ryze, racionálné zlomky, pak se dá uvedených šest částí trojúhelníka jimi vyjádřiti.

Ze vzorce (23') plyne

$$v_a = \frac{2\alpha}{1-\alpha^2}\,. \tag{24}$$

a z (24'), použijeme-li vzorce (24),

$$a = 1 + \frac{1-\beta^2}{1-\alpha^2} \cdot \frac{\alpha}{\beta}\,, \tag{25}$$

i jest tedy výraz $\frac{(1-\beta^2)\alpha}{(1-\alpha^2)\beta}$, jak patrno, průmětem strany trojúhelníka c na stranu a, kterýž označíme krátce m, načež lze psáti

$$a = 1 + m\,. \tag{25'}$$

Stranu b obdržíme dle (23), použijeme-li (24), takže

$$b = \frac{1+\alpha^2}{1-\alpha^2}\,, \tag{26}$$

a poněvadž $a \,.\, v_a = b \,.\, v_b$, tudíž $v_b = \frac{a\,v_a}{b}$, konečně dle (24), (25') a (26)

$$v_b = (1+m)\frac{2\alpha}{1+\alpha^2}\,. \tag{27}$$

Strana třetí jest

$$c = \sqrt{v_a^2 + m^2}\,,$$

a zavedeme-li hodnoty za v_a a m, posléz

$$c = \frac{1+\beta^2}{1-\alpha^2} \cdot \frac{\alpha}{\beta}\,, \tag{28}$$

a příslušná výška vzhledem k rovnici $c v_c = a v_a$,

$$v_c = (1+m)\frac{2\beta}{1+\beta^2}\,. \tag{29}$$

Je-li protilehlý úhel strany b tupý, třeba v těchto vzorcích $+n$ nahraditi $-n$.

Jestli straně b úhel protilehlý jest pravý, pak

$$c = v_a, \text{ tedy } m = 0 \text{ a } \beta = 1,$$

takže

$$\begin{aligned} a &= 1, & v_a &= \frac{2\alpha}{1-\alpha^2} \\ b &= \frac{1+\alpha^2}{1-\alpha^2}, & v_b &= \frac{2\alpha}{1+\alpha^2} \\ c &= \frac{2\alpha}{1-\alpha^2}, & v_c &= 1. \end{aligned} \tag{30}$$

Z těchto vzorců plyne $a^2 + c^2 = b^2$ čili

$$1 + \left(\frac{2\alpha}{1-\alpha^2}\right)^2 = \left(\frac{1+\alpha^2}{1-\alpha^2}\right)^2$$

aneb

$$(1-\alpha^2) + (2\alpha^2) = (1+\alpha^2)^2$$

známé to pravidlo Platonovo.

Některé vlastnosti pravidelných těles vypuklých*).

Pro žáky středních škol

sestavil

prof. **F. Hoza.**

1. Odchylka dvou soumezných stěn.

Nechať značí m množství hran, které jdou jedním vrcholem pravidelného tělesa a n množství hran, jež obmezují jednu jeho stěnu.

Opišme z vrcholu v (Obr. 1.) toho pravidelného tělesa plochu kulovou, jejíž poloměr se rovná jednotce.

Hrany, které vrcholem v procházejí, protínají tu plochu v bodech $a, b, c, d, \ldots$ a stěny, jímž ony hrany náležejí, sekou ji v kruhových obloucích ab, bc, $cd, \ldots$, které tvoří na ploše kulové pravidelný sférický m-úhelník, jehož střed o povstal

*) Viz Archiv für Mathematik und Physik von Grunert — Hoppe, 59. d. 1. seš., na 50. str. „Propriétés nouvelles des polyèdres réguliers convexes, par G. Dostor.