Jan Schuster

O obsahu trojúhelníka

Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, Vol. 61 (1932), No. 1, R8--R9

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/121707

O obsahu trojúhelníka.

Dr. *Jan Schuster.*

Výrazy pro objemy útvarů obdobných trojúhelníkům v prostorech o větším počtu rozměrů, uvedené na souměrný tvar a vyjádřené čtverci prvků, jsou dvojí: vyjádřené čtverci délek hran a čtverci objemů útvarů $(n - 1)$-rozměrných, jak jsem ukázal v práci „Contribution à la théorie du volume" r. 1923 (Compte rendu du Congrès de l'Association Française pour l'Avancement des sciences tenu à Bordeaux).

Zde chci ukázat i pro trojúhelník platnost oné duálnosti. Ovšem věc je teď daleko jednodušší a zajímavost proto menší, že útvary $(n - 1)$-rozměrné při dvojrozměrnosti trojúhelníka jsou zase strany. Ale různost tvaru trvá.

Vyjděme od výrazu pro obsah trojúhelníka, když počátek soustavy je v jednom vrcholu a pišme

$$2\Delta = \begin{vmatrix} x_3 - x_2, & y_3 - y_2 \\ x_1 - x_3, & y_1 - y_3 \end{vmatrix}.$$

Přiřaďme nový první sloupec 1, 1, 3, a nový třetí řádek bude mít prvky 3, 0, 0, ale nuly nahraďme identitami

$$(x_3 - x_2) + (x_1 - x_3) + (x_2 - x_1) = 0,$$
$$(y_3 - y_2) + (y_1 - y_3) + (y_2 - y_1) = 0$$

a odečtěme součet prvních dvou od posledního řádku. Pak bude

$$6\Delta = \begin{vmatrix} 1, & x_3 - x_2, & y_3 - y_2 \\ 1, & x_1 - x_3, & y_1 - y_3 \\ 1, & x_2 - x_1, & y_2 - y_1 \end{vmatrix}.$$

Předsuňme nový první sloupec z jednotek a na novém prvním řádku v ostatních třech prvcích stůjte nuly. Utvořme pak nový determinant výměnou prvních sloupců. Když oba znásobíme,

$$-36\Delta^2 = \begin{vmatrix} 1, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & x_3 - x_2, & y_3 - y_2 \\ 0, & 1, & x_1 - x_3, & y_1 - y_3 \\ 0, & 1, & x_2 - x_1, & y_2 - y_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0, & 1, & 0, & 0 \\ 1, & 0, & x_3 - x_2, & y_3 - y_2 \\ 1, & 0, & x_1 - x_3, & y_1 - y_3 \\ 1, & 0, & x_2 - x_1, & y_2 - y_1 \end{vmatrix},$$

bude obsahovat hlavní úhlopříčka na prvním místě nulu, na ostatních vzniknou výrazy tvaru

$$(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2 = a^2, \text{ atd.}$$

Další prvky budou tvaru

$$(x_3 - x_2)(x_1 - x_3) + (y_3 - y_2)(y_1 - y_3) = \tfrac{1}{2}\{(x_3 - x_2 + x_1 - x_3)^2 -$$
$$- (x_3 - x_1)^2 - x_1 - x_3)^2 + (y_3 - y_2 + y_1 - y_3)^2 - (y_3 - y_1)^2 -$$
$$- (y_1 - y_3)^2\} = \tfrac{1}{2}(c^2 - a^2 - b^2).$$

Podobně

$$(x_3 - x_2)(x_2 - x_1) + (y_3 - y_2)(y_2 - y_1) = \tfrac{1}{2}(b^2 - c^2 - a^2),$$
$$(x_1 - x_3)(x_2 - x_1) + (y_1 - y_3)(y_2 - y_1) = \tfrac{1}{2}(a^2 - b^2 - c^2).$$

Máme tedy celkem

$$-36\Delta^2 = \begin{vmatrix} 0, & 1, & 1, & 1 \\ 1, & a^2, & \tfrac{1}{2}(c^2 - b^2 - a^2), & \tfrac{1}{2}(b^2 - c^2 - a^2) \\ 1, & \tfrac{1}{2}(c^2 - a^2 - b^2), & b^2, & \tfrac{1}{2}(a^2 - b^2 - c^2) \\ 1, & \tfrac{1}{2}(b^2 - a^2 - c^2), & \tfrac{1}{2}(a^2 - b^2 - c^2), & c^2 \end{vmatrix}$$

Znásobme obě strany číslem 4 a znásobme pak první sloupec resp. řádek postupně číslem a^2, b^2, c^2 a přičtěme ke druhému resp. třetímu a čtvrtému.

Tím vznikne

$$-144\Delta^2 = \begin{vmatrix} 0, & 1, & 1, & 1 \\ 1, & 4a^2, & c^2, & b^2 \\ 1, & c^2, & 4b^2, & a^2 \\ 1, & b^2, & a^2, & 4c^2 \end{vmatrix} \qquad (A)$$

K tomuto determinantu bychom také dospěli, když bychom si uvědomili, že trojúhelník sestrojený z těžnic t_a, t_b, t_c daného trojúhelníka má obsah rovný $\tfrac{3}{4}$ jeho, takže běžný výraz má tvar

$$-9\Delta^2 = \begin{vmatrix} 0, & 1, & 1, & 1 \\ 1, & 0, & t_c^2, & t_b^2 \\ 1, & t_c^2, & 0, & t_a^2 \\ 1, & t_b^2, & t_a^2, & 0 \end{vmatrix}$$

Zaveďme sem známé výrazy tvaru

$$t_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4},$$

znásobme determinant číslem 4^2 a bude

$$-144\Delta^2 = \begin{vmatrix} 0, & 1, & 1, & 1 \\ 1, & 0, & 2b^2 + 2a^2 - c^2, & 2c^2 + 2a^2 - b^2 \\ 1, & 2a^2 + 2b^2 - c^2, & 0, & 2c^2 + 2b^2 - a^2 \\ 1, & 2a^2 + 2c^2 - b^2, & 2b^2 + 2c^2 - a^2, & 0 \end{vmatrix}$$

Znásobíme-li první řádek resp. sloupec čísly $-2a^2$, $-2b^2$, $-2c^2$ resp. a přičteme-li je k ostatním, obdržíme po znásobení číslem $(-1)^2$ výraz (A).

Výrazy tvaru (A) jsou pro počet rozměrů větší než 2 nutným prostředníkem, chceme-li určit úměry, jež uvádějí ve vztah funkce polovičních úhlů k povrchům nebo jejich kombinacím se stěnami. U trojúhelníka vede k tomu jednoduché obrácení cosinové věty, čímž formule (A) ztrácí význam jako pomůcka pracovní. Avšak její existence je zcela rovnoprávná se známou formulí, která má prázdnou úhlopříčku.